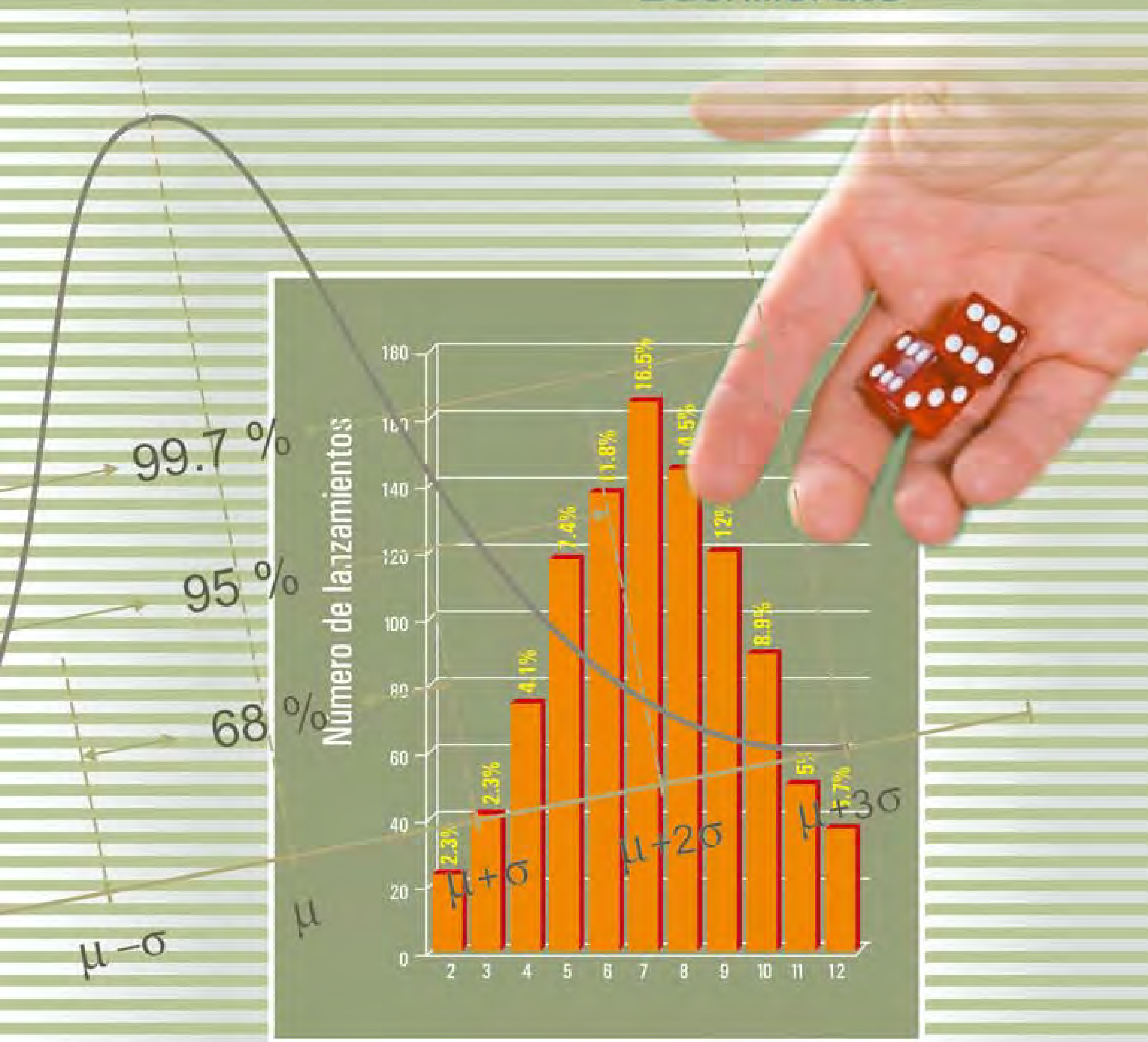
Probabilidad

Bachillerato



Segunda edición

Plan de estudios 2009

José Alfredo Juárez Duarte
Arturo Ylé Martínez • Armando Flórez Arco
Santiago Inzunsa Cazáres

Dirección General de Escuelas Preparatorias

DIRECTORIO

Dr. Víctor Antonio Corrales Burgueño
Rector

DR. José Alfredo Leal Orduño
Secretario General

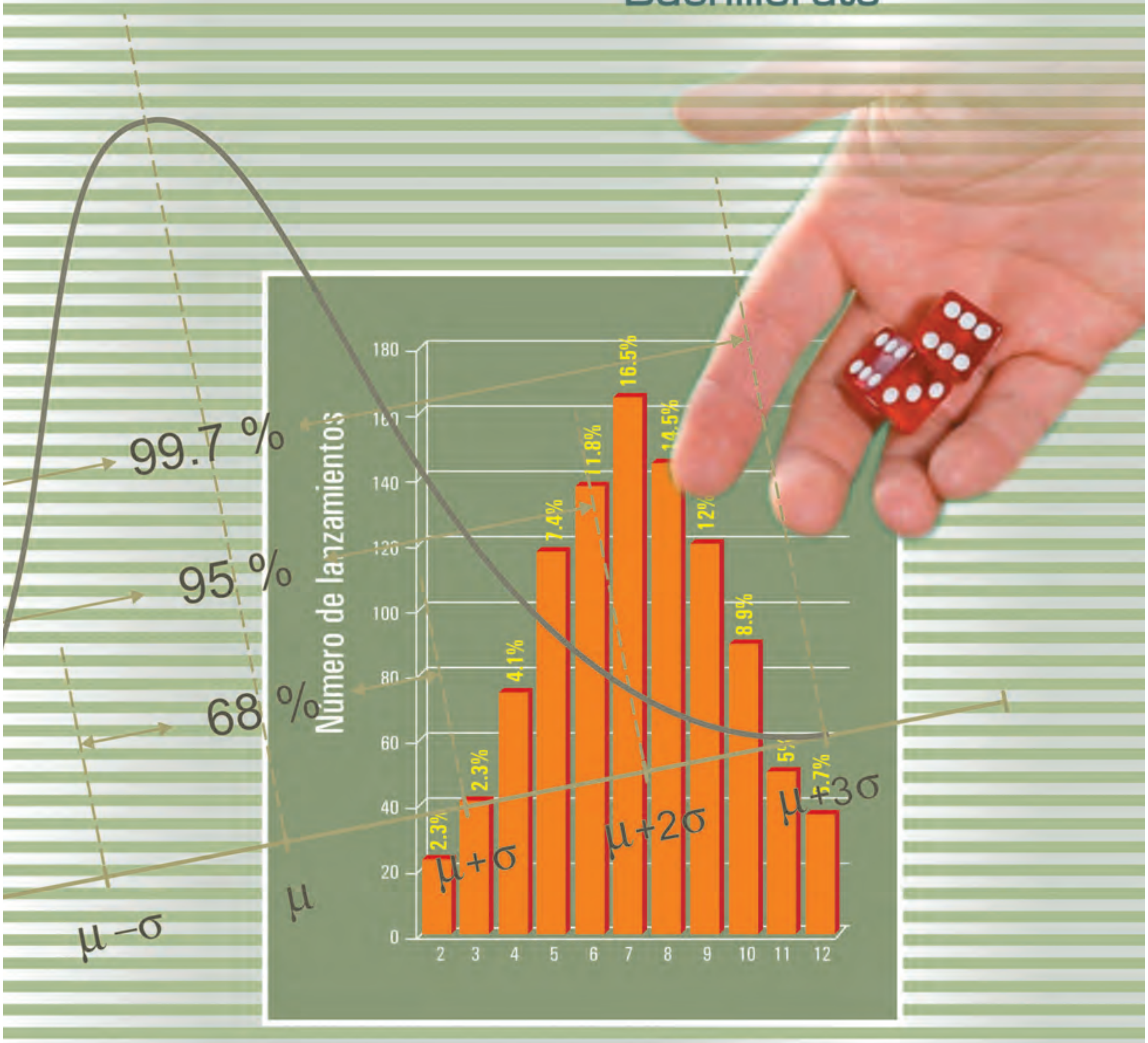
LAE y MA Manuel de Jesús Lara Salazar
Secretario de Administración y Finanzas

Q.F.B. Ofelia Loaiza Flores
Director de Servicios Escolares

Dr. Armando Flórez Arco
Director de DGEP

Probabilidad

Bachillerato



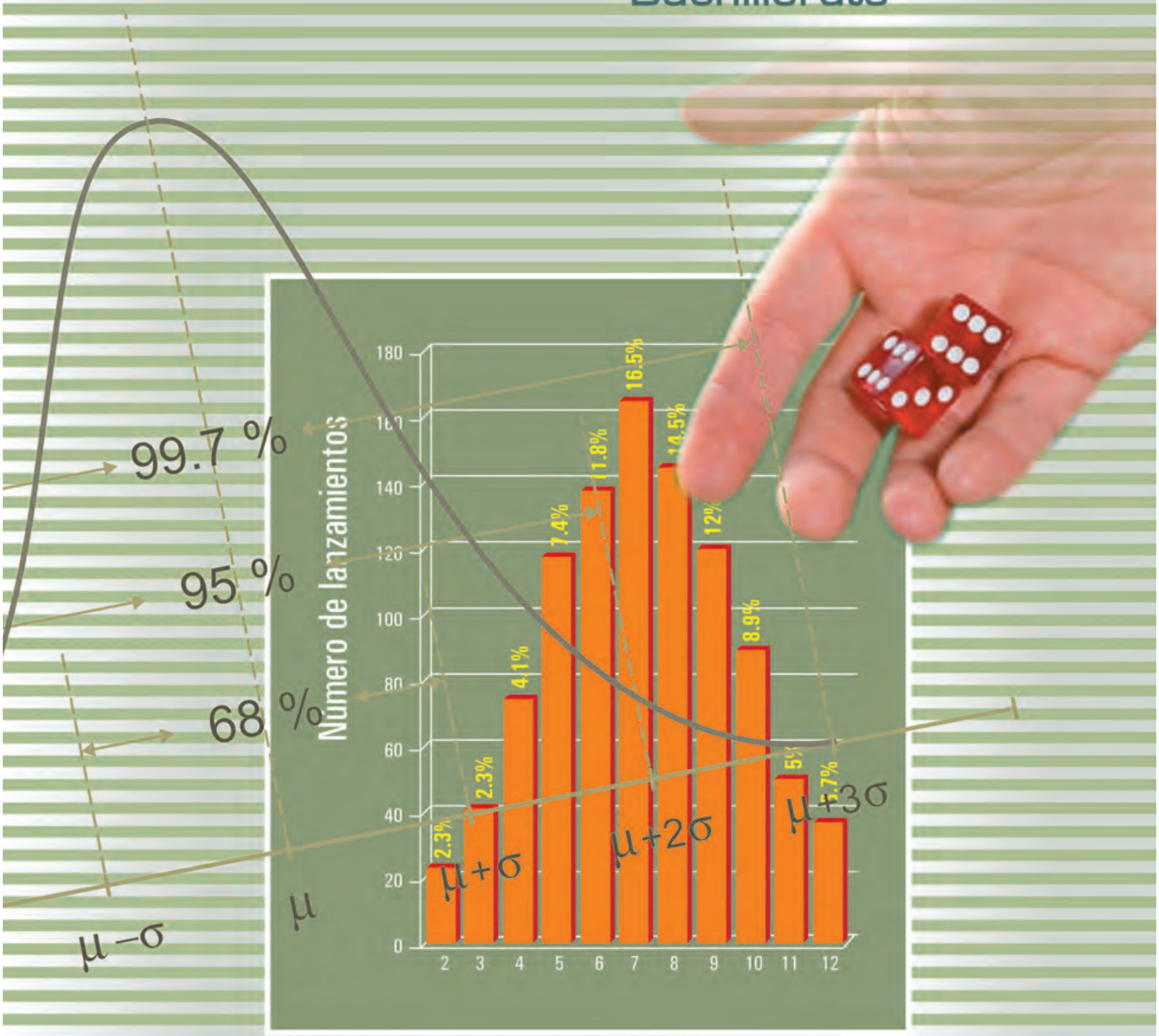
Segunda edición

Plan de estudios 2009

José Alfredo Juárez Duarte
Arturo Ylé Martínez • Armando Flórez Arco
Santiago Inzunsa Cazáres

Probabilidad

Bachillerato



Segunda edición

Plan de estudios 2009

José Alfredo Juárez Duarte
Arturo Ylé Martínez • Armando Flórez Arco
Santiago Inzunsa Cazáres

Probabilidad

Bachillerato

José Alfredo Juárez Duarte
Arturo Ylé Martínez
Armando Flórez Arco
Santiago Inzunsa Cázares

Plan de estudios 2009

Probabilidad
Bachillerato

Autores
José Alfredo Juárez Duarte
Arturo Ylé Martínez
Armando Flórez Arco
Santiago Inzunsa Cázares

Primera edición: enero de 2010
Segunda edición: enero de 2012

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE SINALOA
DIRECCIÓN GENERAL DE ESCUELAS PREPARATORIAS

Diseño: Leticia sánchez Lara

Editado en los talleres gráficos de Servicios Editoriales Once Ríos,
Río Usumacinta 821, Col. Industrial Bravo, Culiacán, Sin.

Impreso en Sinaloa, México

Presentación

Este libro, fue escrito para utilizarse en la asignatura de PROBABILIDAD que se cursa en el sexto semestre de bachillerato plan 2009 de la Universidad Autónoma de Sinaloa.

Su principal característica está en el énfasis que se hace en el uso de representaciones visuales al solucionar problemas de probabilidad. En este sentido, uno de sus principales objetivos es promover que los estudiantes usen de manera espontánea tales representaciones visuales mientras resuelven problemas de probabilidad o cuando están explorando o desarrollando algún concepto. Básicamente son tres las representaciones usadas: listado de resultados, diagramas de árbol y diagramas de Venn.

La evidencia aportada por la investigación didáctica en probabilidad, sugiere que la visualización juega un rol importante en la manera como los expertos resuelven problemas de probabilidad (y en general problemas matemáticos). Las representaciones visuales se convierten en un fuerte apoyo de la memoria, facilitan la atención y comunicación, el registro de información, y facilitan el descubrimiento y las inferencias. En suma, el uso de representaciones lleva a una comprensión total del problema y a un incremento en la profundización del proceso implicado.

El uso de representaciones visuales, nos ha permitido plantear en este libro, una estrategia de enseñanza desde una perspectiva constructivista, donde se busca que el alumno a través de un intenso trabajo en el estudio de ejemplos y la solución de problemas, adquiera una sólida base, antes y como preparación para la introducción y el trabajo con fórmulas, de modo que se tenga más posibilidades de lograr un aprendizaje significativo. En otras palabras, a través del estudio bajo esta propuesta de trabajo, el alumno podrá resolver prácticamente cualquier problema básico de probabilidad, sin una necesidad obligada de utilizar fórmulas.

Sin embargo, no debemos perder de vista, que uno de los propósitos centrales en el estudio de las matemáticas, es el proceso mismo de abstracción. De lo que se trata, es de evitar presentar al estudiante un objeto abstracto ya construido, sin una comprensión de las ideas básicas implícitas. En palabras de Miguel de Guzmán: «*La matemática está muy lejos de ser una colección de recetas. La matemática es un ejercicio de la imaginación y del pensamiento. La aplicación de una rutina, de una fórmula, sólo tiene sentido, dentro de la matemática, si va acompañada de otras estrategias del pensamiento*». O en palabras de Stewart: «*¿Fórmula? ¿quién se preocupa por las fórmulas? Las fórmulas están en la superficie de las matemáticas no en la esencia*».

La presente propuesta metodológica para estudiar probabilidad, también contempla un nuevo orden en el tratamiento de los contenidos. Se plantean cuatro bloques: conceptualización del azar, estudio de los sucesos compuestos, estudio de los experimentos compuestos, y estudio de las distribuciones de probabilidad. A su vez, el primero y segundo bloque constituyen el conocimiento conceptual básico de la probabilidad, y, el tercero y cuarto el estudio de los experimentos compuestos. Esto último, significa, que debido al enfoque didáctico utilizado, el estudio de las distribuciones es simplemente una extensión de los experimentos compuestos: es la llegada a modelos probabilísticos abstractos. En otras palabras, un alumno(a) que domine la unidad tres, no tendrá ninguna dificultad para abordar el estudio de las distribuciones.

Con respecto al uso del libro en el salón de clase, asumimos que un libro de texto, es un instrumento de enseñanza para el profesor y un instrumento de aprendizaje para el alumno. El libro de texto debe estar diseñado de tal manera que fomente el trabajo independiente de los alumnos(as).

Holmes plantea que «*la peor manera de enseñar es hablar, y la mejor manera de aprender es hacer*»

En esta idea, debemos tener muy en cuenta que: «*en el proceso docente-educativo el profesor debe enseñar lo esencial, lo fundamental. Explicar aquellos aspectos básicos de los cuales se pueden deducir todo un conjunto de elementos derivados, secundarios que no deben, por lo general ser explicados, para que los alumnos (as), los desarrollen de manera independiente. A la exposición inicial se le debe dedicar el mínimo imprescindible del tiempo y a la independencia escolar el máximo. Todo el contenido no debe ser expuesto por el docente, sólo lo esencial, lo que posibilite que el alumno trabaje y forme la habilidad*».

A partir de esta concepción, el libro está basado en el desarrollo de actividades de aprendizaje en las que el rol principal del maestro es la mediación. Las actividades fueron diseñadas para estimular la experimentación, el planteamiento de conjeturas y la búsqueda de explicaciones.

Este libro, es producto de muchos otros. Cada uno de los libros o materiales citados en la bibliografía aportaron algo, desde una idea vaga, hasta un propuesta que sólo requirió de ajuste.

Finalmente, ante la incertidumbre natural que implica el tratar de implementar cambios en lo establecido, nos permitimos citar a Gilberto Guevara Niebla: «*No se sabe si una nueva propuesta pueda modificar la situación actual, pero lo que sí se conoce es que las prácticas tradicionales no han rendido los frutos esperados*».

Cualquier comentario o sugerencia para mejorar esta propuesta, que agradecemos de antemano, favor de enviarlo a la dirección: *jjuarez@uas.uasnet.mx*.

Deseamos a profesores y estudiantes, mucho éxito en su estudio de la probabilidad, disciplina que junto con la estadística, nos permite entender fenómenos del mundo real que incluyen incertidumbre, esto es, fenómenos que no pueden ser predecidos con certeza.

Atentamente
Culiacán Rosales, Sinaloa, enero de 2012.
Los autores

Contenido

UNIDAD 4
DISTRIBUCIONES DE PROBABILIDAD

Introducción a la Probabilidad

1

UNIDAD

Lección 1.1 Conceptos básicos: azar, experimento aleatorio, significado de probabilidad

Objetivos: Conocer la noción de azar y de experimentos aleatorios.
Diferenciar entre experimentos aleatorios y deterministas.
Comprender el concepto de probabilidad.

La noción de aleatoriedad es el punto de partida para el estudio de la probabilidad. En la vida diaria nos referimos de manera indirecta a este concepto de muchas formas; por ejemplo, con frecuencia decimos que algo sucede por azar. En la siguiente actividad, se pide que expongas tus ideas iniciales sobre estas cuestiones.

Actividad 1.1 a

Qué hacer

Contesta las siguientes preguntas:

a) ¿Qué es lo primero que piensas al escuchar los términos azar y aleatorio?______________
____

b) Elabora una lista de términos del lenguaje ordinario que utilizas en vez de azar o aleatorio
____
____

c) Compara los términos que escribiste con los de tus compañeros.
¿Qué coincidencias encuentras? ______________________________
____

d Intenta explicar lo que significa para ti azar.__________________________
____
____

Existen muchas expresiones que se usan en la vida diaria, que de manera implícita se refieren al azar o a la aleatoriedad. Por ejemplo:

“Por suerte, de chiripa, sin querer, sin intención, por accidente, por casualidad....”

Utlizamos estos términos para hacer referencia a la casualidad, a cosas fortuitas o imprevistas, a situaciones inciertas o no controladas.

Así pues, en el lenguaje ordinario, el azar es entendido como sinónimo de suerte o casualidad, de falta de intención. Por ejemplo, hablamos de encuentros casuales o accidentales, de coincidencias al azar, de logros por suerte, de acciones sin intención, etcétera.

Sin embargo, el azar no debe entenderse simplemente como sinónimo de suerte o casualidad, sino como una acción altamente compleja, debido a que una pequeña variación en dicha acción, produce un efecto considerable en el resultado. Ésto ocasiona una total incertidumbre respecto a lo que va a ocurrir en el futuro. Decimos entonces que el resultado es aleatorio, porque la predicción resulta imposible.

Ejemplo:

Consideremos el sencillo experimento de arrojar una moneda al aire y observar de qué lado cae. La experiencia nos indica que, aunque se intente repetir el experimento en idénticas condiciones, es imposible predecir con certeza cuál será el resultado. La explicación de esta incertidumbre, es que no se pueden replicar idénticamente las condiciones iniciales, porque cualquier cambio imperceptible, por ejemplo en la fuerza de lanzamiento o en la posición en que se coloca la moneda, tendrá un gran efecto en el resultado. Ese efecto considerable, causado por cosas modestas e imperceptibles, a falta de mejor explicación, se dice que es causado por el azar.

Los fenómenos cuyos resultados se atribuyen al azar se llaman fenómenos aleatorios o sucesos aleatorios. Es decir, los fenómenos aleatorios son aquellos cuyos resultados no se pueden predecir con certeza debido a que pequeños cambios en las condiciones iniciales producen efectos muy complejos en el desarrollo del fenómeno.

En contraparte, los fenómenos cuyos resultados si pueden preverse, se llaman determinísticos.

Experimentos aleatorios y experimentos determinísticos

En probabilidad la palabra “experimento” tiene un significado amplio. Se le llama experimento, tanto a los verdaderos experimentos que se pueden provocar, como a los fenómenos observables en el mundo real. Es decir, la acción de observar un fenómeno se considera un experimento. Por lo general, antes de observar debemos realizar otra acción, por ejemplo: extraer o seleccionar un objeto y después observar alguna característica de interés, tirar un dado o una moneda y observar su cara superior.

Así como distinguimos entre fenómenos aleatorios y determinísticos, también diferenciamos entre experimentos aleatorios y determinísticos.

Un experimento es determinístico, si al realizarse en las mismas circunstancias sólo tiene un resultado posible el cual es predecible.

Por ejemplo, si colocamos un trozo de hielo bajo el sol, sabemos de antemano cuál será el resultado.

Un experimento es aleatorio, si cumple con las siguientes características:

- Se conocen de antemano, todos los posibles resultados, pero no se sabe cuál de esos resultados se va a obtener al realizarse el experimento.
- Se puede repetir en circunstancias similares.

Actividad 1.1 b

a) Indica cuáles de los siguientes experimentos son aleatorios y cuáles determinísticos. En el caso que sean aleatorios, anotar todos los posibles resultados, y si son determinísticos anotar el resultado esperado.

1) Observar un partido de fútbol y registrar el resultado
Experimento__________Posibles resultados (o resultado)___________

2) Ejecutar un tiro libre en básketbol y observar si el balón entra en la canasta.
Experimento__________Posibles resultados (o resultado)___________

3) Medir con gran precisión tanto la longitud de una circunferencia como su diámetro y calcular el cociente Circunferencia / Diámetro.
Experimento__________Posibles resultados (o resultado)___________

4) Colocar dentro del congelador una botella de vidrio cerrada llena de agua.
Experimento__________Posibles resultados (o resultado)___________

5) Lanzar un dado y observar el número de puntos que muestra la cara que queda hacia arriba.
Experimento__________Posibles resultados (o resultado)___________

b) Escribe tres ejemplos de experimentos aleatorios y sus resultados posibles.
____
____

c) Escribe tres ejemplos de experimentos determinísticos
____
____

d) Lanza una moneda al aire diez veces y realiza lo indicado:
1) Anota un resultado cualquiera obtenido________________
2) Registra todos los resultados obtenidos___________________________________
3) ¿Cuántas águilas obtuviste?____________________

Si repites varias veces un experimento aleatorio, obtendrás una sucesión de resultados muy irregular, denominada sucesión aleatoria.
Anota la sucesión aleatoria que obtuviste al lanzar la moneda 10 veces________________

En resumen, en un experimento aleatorio, se destacan cuatro aspectos:

- El proceso de generación de resultados, el cual es el experimento mismo.
- Los posibles resultados.
- El resultado obtenido en un ensayo.
- La sucesión de resultados obtenida en una serie de ensayos particulares.

Ahora, cabe plantear la siguiente pregunta: si al efectuar un experimento aleatorio, de lo único que estamos seguros es que ocurrirá uno de los posibles resultados, ¿qué utilidad tiene estudiar este tipo de experimentos?

En la siguiente actividad, podrás convencerte que, aunque parezca un contrasentido, el azar tiene leyes, y es precisamente la probabilidad el campo de las matemáticas que trata de encontrar esas leyes a fin de tomar decisiones adecuadas en aquellas situaciones que parecen estar dominadas por el azar.

Actividad 1.1 C

Qué hacer

a) Contesta las siguientes preguntas:

1) Si lanzas una moneda una vez y cae “águila”, ¿qué puedes comentar?

____

2) Si lanzas una moneda 5 veces y caen 5 “águilas”, ¿qué opinas?

____

3) Si lanzas una moneda 1000 veces y aparece “águila” 950 veces, ¿qué opinas de este hecho?____

Con toda seguridad, de acuerdo a tu experiencia, consideras totalmente “normal” que al lanzar una moneda una vez, pueda caer águila, o al lanzarla 5 veces puedan caer 5 águilas. Pero, si al lanzar la moneda 1000 veces caen 950 águilas, inmediatamente sospecharás de la moneda. Tal vez concluyas que se está haciendo trampa o que la moneda no es “honesta” o que está “cargada”.

Al concluir que algo no anda bien cuando al lanzar una moneda 1000 veces caen 950 águilas, estás ya aplicando una ley del azar. Así pues, las leyes del azar surgen cuando en lugar de considerar un sólo fenómeno, contemplas cientos o miles de tales fenómenos.

Para que adquieras más elementos sobre esta cuestión, seguiremos con la exploración de fenómenos aleatorios trabajando con el sencillo experimento de lanzar una moneda.

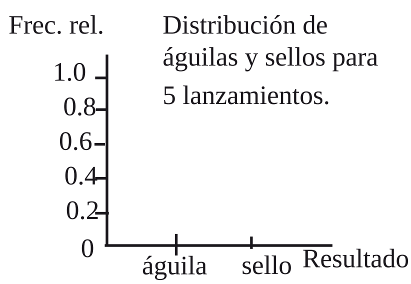
Actividad 1.1 d

Qué hacer

a) Contesta con base en tu experiencia: "si lanzas una moneda, ¿cuál es la probabilidad de que caiga águila?______¿En qué basas tu respuesta?

b) Lanza una moneda 5 veces. Denota con "*a*" al resultado cae águila, y con "*s*" al resultado cae sello. Anota la sucesión obtenida______________. A continuación, completa la tabla siguiente y traza su gráfico de barras correspondiente

Resultado	Frec. abs.	Frec. rel.
águila		
sello		
Total	5	1.0

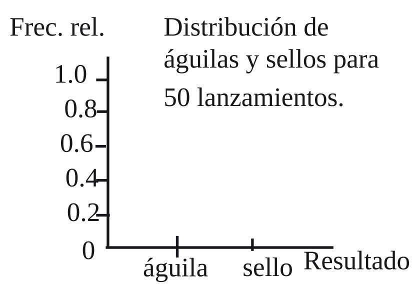


c) Lanza una moneda 50 veces. Anota la sucesión obtenida__________________________.

____

A continuación, completa la tabla siguiente y traza su gráfico de barras correspondiente

Resultado	Frec. abs.	Frec. rel.
águila		
sello		
Total	50	1.0



Compara tus resultados con los de tus compañeros, y escribe alguna conclusión sobre los resultados obtenidos.____

____

Gran parte del trabajo matemático (y en consecuencia de la probabilidad), consiste en encontrar patrones o leyes que nos permitan modelar los fenómenos estudiados. En este caso, estamos interesados en encontrar algún patrón mostrado por las sucesiones aleatorias. Pero, como ya se mencionó, la única manera de descubrir patrones en una secuencia aleatoria, es repetir un gran número de veces el experimento correspondiente. Por tanto, deberás trabajar en equipo tal y como se indica en la siguiente actividad.

Actividad 1.1 e

a) Un equipo de dos alumnos (as) lanza la moneda 50 veces y anotan el número de veces que caen águila y sello. Además, debes calcular la frecuencia relativa tanto de águila como de sello.

Resultados primer equipo	
# de lanz.	50
f de águila	
f de sello	
f_r de águila	
f_r de sello	

b) Otro equipo de dos alumnos (as) vuelve a lanzar la moneda 50 veces, pero ahora, sumarán sus resultados con los de la primer pareja, de tal manera que contabilizaremos 100 lanzamientos y un número de águilas y sellos igual a la suma de lo obtenido por los equipos uno y dos.

Equipo	1	2
# de lanz.	50	100
f de águila		
f de sello		
f_r de águila		
f_r de sello		

Estamos asumiendo que el equipo 2 lanzó la moneda 100 veces

c) Un tercer equipo vuelve a lanzar 50 veces la moneda y suma sus resultados a los de las parejas anteriores.

Equipo	1	2	3
# de lanz.	50	100	150
f de águila			
f de sello			
f_r de águila			
f_r de sello			

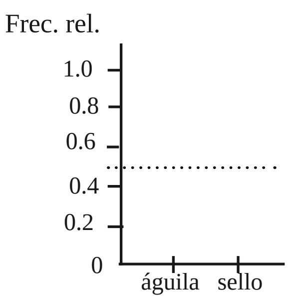
Estamos asumiendo que el equipo 3 lanzó la moneda 150 veces

Y así sucesivamente, otras parejas de alumnos deberán lanzar la moneda y los resultados de cada pareja se van acumulando con los anteriores.
A continuación, deben organizarse para completar la siguiente tabla:

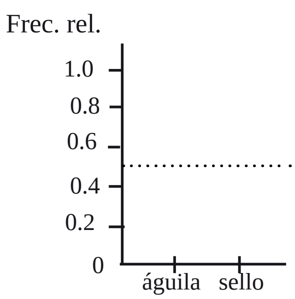
Actividad 1.1 e (Cont.)

Equipo	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
# de lanz.	50	100	150	200	250	300	350	400	450	500	550	600	650	700	750	800	850	900	950	1000
$f_{\text{águila}}$																				
f_{sello}																				
$f_{r\ \text{águila}}$																				
$f_{r\ \text{sello}}$																				

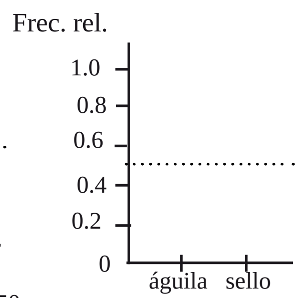
h) Enseguida, realiza cuatro gráficos de barras que muestren el comportamiento de las distribuciones de las frecuencias relativas de los dos resultados posibles: águila y sello, al aumentar el número de lanzamientos.



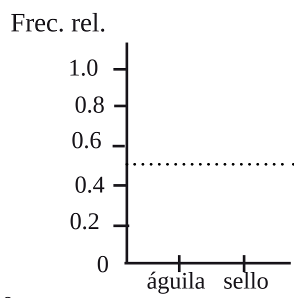
Distribución para 5 lanzamientos



Distribución para 50 lanzamientos

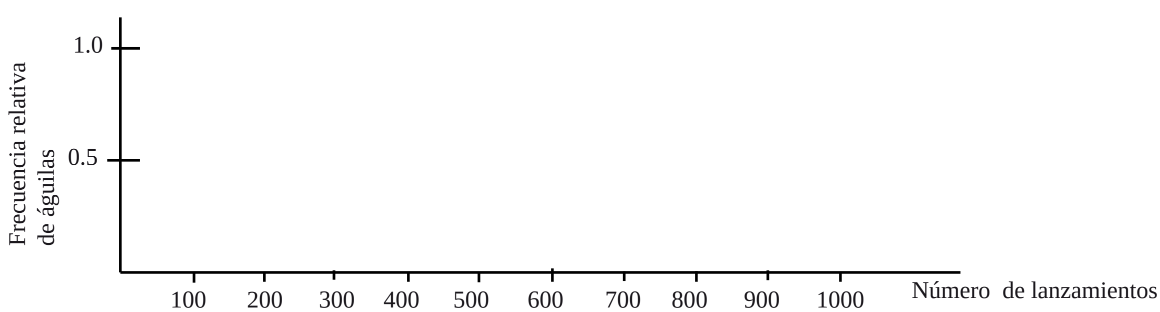


Distribución para 500 lanzamientos



Distribución para 1000 lanzamientos

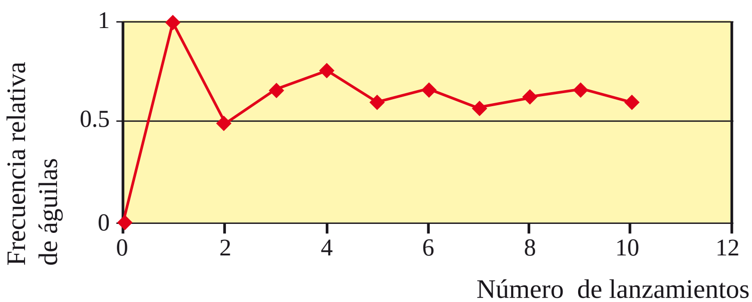
Ahora, regresemos a la primer pregunta planteada al inicio de esta actividad: "si lanzas una moneda, ¿cuál es la probabilidad de que caiga águila?". Seguramente contestaste que ½, 0.5 ó 50%. Pero, ¿qué significa ésto? Los gráficos de barras que acabas de trazar, nos permiten avanzar hacia una respuesta: con pocos lanzamientos la frecuencia relativa puede ser cualquier valor, pero después de muchos (cientos o miles), esta frecuencia se mantiene muy cerca de 0.5. Ésto se aprecia mejor si nos concentramos únicamente en un resultado; para ello, traza un gráfico que muestre cada una de las frecuencias relativas del resultado águila conforme aumenta el número de lanzamientos:



Actividad 1.1 e (Cont.)

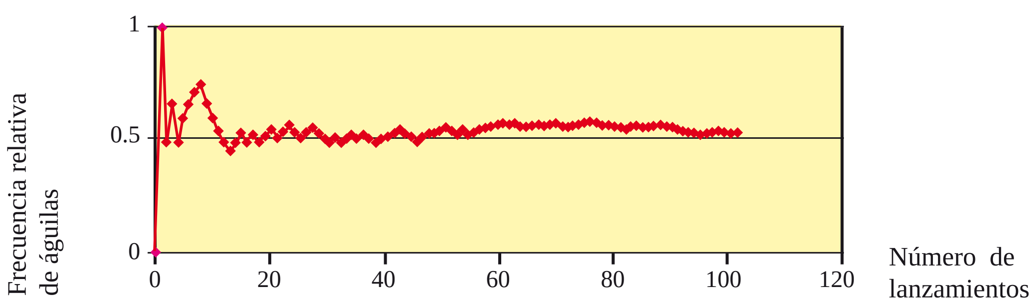
Aún sin conocer tus resultados en el momento de escribir este texto, estamos seguros que el comportamiento de tu segundo gráfico es muy parecido al mostrado a continuación:

Gráfico que muestra lo que ocurrió al ir repitiendo el experimento de lanzar una moneda hasta 10 veces. Analiza la tabla adjunta para que interpretes mejor lo mostrado en el gráfico.

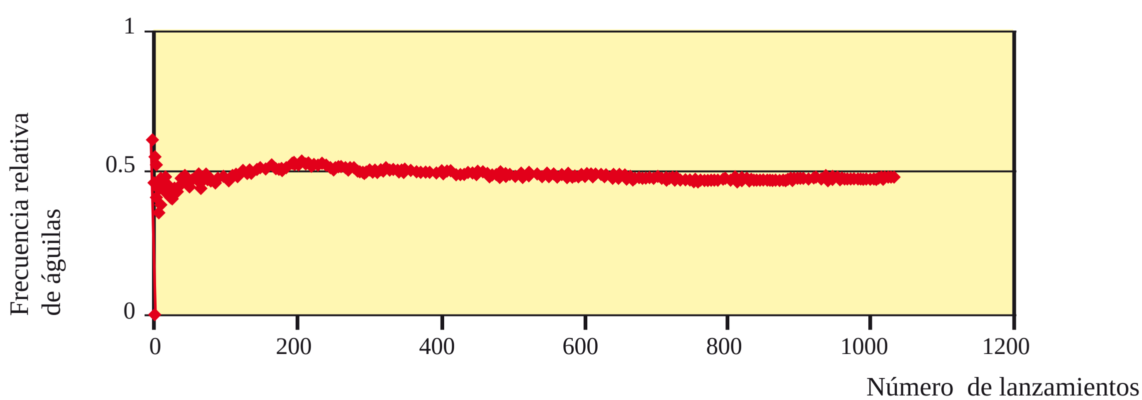


Número de lanza-mientos	Sucesión aleatoria	Frec. rel. de "águila"
1	*a*	1.0
2	*as*	0.5
3	*asa*	0.66
4	*asaa*	0.75
5	*asaas*	0.6
6	*asaasa*	0.66
7	*asaasas*	0.55
8	*asaasasa*	0.62
9	*asaasasaa*	0.66
10	*asaasasaas*	0.6

Ahora, observa lo que ocurrió conforme se lanzaba la moneda hasta 100 veces:



Finalmente observa lo sucedido conforme se lanzaba la moneda hasta 1000 veces:



Actividad 1.1 e (Cont.)

Estudia con mucha atención la siguiente conclusión derivada de tu trabajo realizado, y de los gráficos presentados como apoyo:

Si atendemos los resultados obtenidos con pocos lanzamientos de una moneda, las frecuencias relativas del resultado "águila" son muy irregulares; sin embargo, si a partir de un cierto momento, siguen aumentando los lanzamientos, dicha frecuencia relativa, tiende a estabilizarse alrededor de 0.5. Esta frecuencia relativa también puede verse como una proporción:

$$0.5 = \frac{1}{2} = \frac{50}{100}$$

A este número al que tienden a estabilizarze las frecuencias relativas de un suceso (en este caso el suceso "cae águila") se le llama probabilidad de que ocurra el suceso.

Probabilidad de que ocurra un suceso: es la frecuencia relativa con la que puede esperarse que el suceso ocurra, al repetir el experimento más y más veces.

Entonces, según estos resultados, la probabilidad de que ocurra águila al lanzar una moneda es 0.5.

Simbólicamente: *P(águila)* = 0.5 ⟶ Se lee: "*la probabilidad de que ocurra el suceso águila" es 0.5*

i) Lee con mucha atención: La afirmación *P(águila)* = 0.5, significa que, conforme aumenta el número de lanzamientos de una moneda, (cientos o miles de veces), la frecuencia relativa o proporción conque aparece el resultado águila tiende a ser 0.5.

Ahora, considera el experimento de lanzar un dado. Según tu experiencia contesta:

1) ¿Cuáles son los resultados posibles?______________________________

2) ¿Cuál es la probabilidad de que la cara superior muestre un punto?__________
¿En qué basas tu respueta?____

3) Observa las siguientes distribuciones que muestran las frecuencias relativas de cada uno de los seis resultados posibles, obtenidas conforme se lanza un dado más y más veces:

Actividad 1.1 e (Cont.)

Distribución de 101 lanzamientos

x	f	f_r
1	19	0.188
2	14	0.139
3	20	0.198
4	19	0.188
5	18	0.178
6	11	0.109

Distribución de 301 lanzamientos

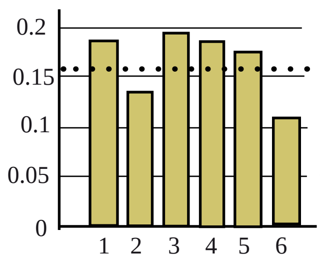
x	f	f_r
1	57	0.189
2	47	0.156
3	57	0.189
4	49	0.163
5	54	0.179
6	37	0.123

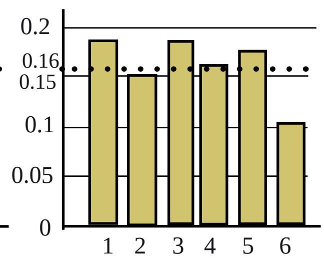
Distribución de 1001 lanzamientos

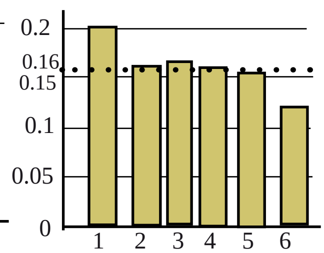
x	f	f_r
1	203	0.203
2	163	0.163
3	167	0.167
4	162	0.162
5	157	0.157
6	149	0.149

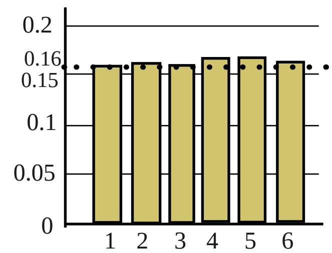
Distribución de 5001 lanzamientos

x	f	f_r
1	802	0.160
2	818	0.164
3	815	0.163
4	862	0.172
5	864	0.173
6	840	0.168

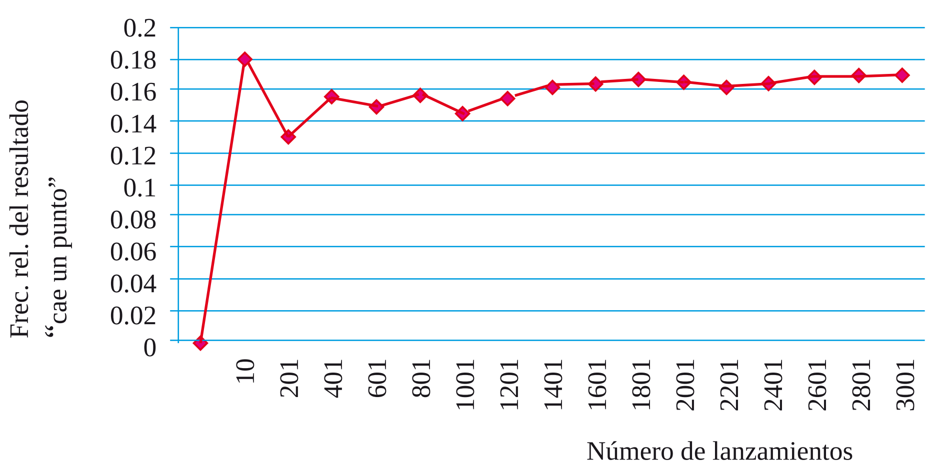








Ahora, considera tu respuesta a la pregunta: al lanzar un dado, ¿cuál es la probabilidad de que la cara superior muestre un punto? Tu respuesta seguramente fue 1/6 ó 0.166. Una vez más, ¿qué significa ésto? Apoyándonos en los gráficos anteriores, podemos asegurar que, conforme el número de lanzamientos del dado se hace cada vez más grande, la frecuencia relativa conque aparece cualquier cara del dado tiende a ser 1/6 ó 0.166. Ésto se aprecia mejor si nos concentramos únicamente en un resultado; para ello, observa el siguiente gráfico, que muestra el comportamiento de las frecuencias relativas del resultado “*cae un punto*” conforme aumenta el número de lanzamientos de un dado.



Describe el comportamiento de este gráfico:

Actividad 1.1 e (Cont.)

Atendiendo este gráfico, ¿qué se quiere decir cuando se afirma que la probabilidad de que caiga un punto al lanzar un dado es 1/6? ____

Ya estamos en condiciones de establecer las siguientes conclusiones:

- En un suceso aleatorio, después de un gran número de repeticiones del experimento que lo genera, surge una especie de orden o regularidad estadística, manifestado por la estabilización de la frecuencia relativa (o proporción), conque aparece dicho suceso. Esa frecuencia relativa se conoce como probabilidad de que ocurra el suceso.
- El valor conocido como probabilidad de un suceso, sólo nos informa sobre la proporción de veces que aparecerá dicho suceso en un gran número de repeticiones del experimento correspondiente. En otras palabras, en la sucesión aleatoria originada por la repetición de un experimento aleatorio, se observará mucha variabilidad local que impide predecir su comportamiento inmediato, pero hay una regularidad global (***llamada regularidad estadística***) manifestada por la estabilidad de las frecuencias relativas.

La interpretación dada a la probabilidad de un suceso, también se conoce como ley de los grandes números, y fue enunciada por primera vez por Jakob Bernoulli en su obra «*arte de conjeturas*» a finales del siglo XVII de la siguiente manera:

«*La frecuencia relativa de un suceso tiende a estabilizarse en torno a un número, a medida que el número de pruebas del experimento crece indefinidamente*»

Jakob Bernoulli (1654 - 1705)

Lee con atención:

Debe quedar muy claro, que la estabilización a largo plazo, se presenta en las frecuencias relativas y no en las absolutas. Por ejemplo, en el caso de la moneda, no es correcto decir que a medida que el número de lanzamientos aumenta, el número de águilas se aproxima a la mitad del número de lanzamientos. Así pues, la regularidad a largo plazo significa que la proporción de veces que aparece águila (o sello), tiende a estabilizarse. Ésto puede apreciarse en la siguiente tablas que muestra los resultados obtenidos por diversos investigadores:

Resultado / Investigador	$f_{\text{águilas}}$	$f_{r\ \text{águilas}}$	Total de lanzamientos
Buffon	2048	0.5069	4040
Pearson	12012	0.5005	24000
Kerrich	5067	0.5067	10000

Nota. En la moneda norteamericana, se habla de caras y cruces, en vez de águilas y sellos.

Ejercicio 1.1

1. Contesta:
   a) Explica la relación que existe entre azar y experimento aleatorio.
   b) Explica qué es una sucesión aleatoria.
   c) Explica la diferencia entre experimento aleatorio y experimento determinístico.
   d) Al repetir más y más un experimento aleatorio, ¿qué ocurre con la frecuecnia relativa de un suceso? ___________________________
   e) Según la ley de los grandes números, ¿por qué se dice que al lanzar una moneda honesta, la probabilidad de que caiga águila es 0.5?___________________________

2. Investiga en algún periódico o revista, cinco enunciados que lleven implícito lo que hasta este momento entendemos por probabilidad.

3. Frecuentemente se critica, a los encargados de pronosticar el tiempo, afirmando que siempre ocurre lo contrario a su pronóstico, ¿cómo explicarías estas supuestas fallas?

4. Supón que lanzas una moneda honesta, ésto es, una en la que la probabilidad de salir sello en cada lanzamiento es ½. Tienes la posibilidad de escoger 10 ó 100 lanzamientos.
   a) En la primera apuesta, ganas si la proporción de sellos está entre 0.4 y 0.6. ¿Escogerías 10 ó 100 lanzamientos? ¿Por qué?
   b) En la segunda apuesta, ganas si exactamente la mitad de lanzamientos fueron sellos. ¿Escogerías 10 ó 100 lanzamientos ¿Por qué?
5. Si lanzaras una moneda honesta 8 veces, ¿cuál de los siguientes resultados es más probable? (*A*, indica que salió águila; *S*, indica que salió sello):
   ASASASAS *AAAASSSS* *ASAASSAS*

6. Supón que en 6 lanzamientos consecutivos de una moneda obtienes AAAAAA. ¿Qué es más probable obtener en el próximo lanzamiento, águila o sello? Explica por qué.

Lección 1.2 Asignación de probabilidades: enfoque frecuencial.

Objetivos: Conocer el enfoque frecuentista para asignar probabilidades.
Asignar probabilidades según el enfoque frecuencial.

Hay diferentes maneras de asignar probabilidades a los resultados de un experimento aleatorio. En las próximas lecciones estudiarás tres de ellos: frecuencial, subjetivo y teórico.

Actividad 1.2 a

Qué hacer

Estudia con atención:

La asignación de probabilidades mediante el enfoque frecuencial, utiliza la frecuencia relativa obtenida al repetir el experimento aleatorio un gran número de veces. De esta manera, surge la siguiente definición:

Definición de probabilidad según el enfoque frecuencial

Se define la probabilidad frecuentista o empírica de un suceso *A*, representada por ***P (A)*** como el valor obtenido para la frecuencia relativa conque se observa *A*, en un número grande de repeticiones del experimento.

Al aplicar esta definición, estamos asumiendo que el número de veces que se repitió el experimento es suficiente para garantizar una cierta estabilización de las frecuencias relativas; por tanto, sólo nos fijamos en el número total de casos considerados, y en las veces que apareció el suceso de interés. Entonces, aplicamos directamente la siguiente fórmula:

$$P\,(\textit{de un suceso}) = \frac{\textit{frecuencia absoluta del suceso}}{\textit{número total de repeticiones del experimento}} = \frac{f}{N}$$

En la práctica, este enfoque nos permite utilizar como fuente de datos, las frecuencias relativas de sucesos del pasado.

Ejemplos:

1. En beisbol, si un bateador pegó 120 hit en 400 intentos, el porcentaje de bateo (así se llama en ese deporte) es

$$\frac{120}{400} = 0.300$$

En términos probabilísticos, decimos que este jugador, tiene una probabilidad de 0.300 de pegar de hit en su próximo turno.

Simbólicamente: *P(hit)* = 0.300. O bien *P(hit)* = 30%.

¿Qué nos indica ésto? que en promedio en cada 100 turnos pegará de hit 30 veces. Sin embargo, no puede asegurarse que sean exactamente 30; pueden ser digamos 34 ó 28.

2. Cuando el encargado del tiempo observa que en el pasado, en 1200 de 1500 días con condiciones meteorológicas parecidas a las observadas al día de hoy, se presentaron lluvias, entonces, pronosticará que la probabilidad de que el día de mañana llueva es de:

$$\frac{1200}{1500} = 0.800$$

Probabilidad de lluvia = 0.800 = 80%

Si llamamos *Ll* al suceso lluvia: *P(Ll)* = 80%

Simbólicamente *P(lluvia)* = 80%

3. ¿Va a someterse dentro de poco a una intervención quirúrgica? ¡Las posibilidades señalan que no habrá complicaciones! A continuación se presentan las estadísticas del número de determinadas operaciones realizadas y el número de éxitos obtenidos en el último año.

TIPO	NÚMERO DE OPERACIONES	NÚMERO DE ÉXITOS
Vesícula biliar	472 000	465 300
Apéndice	784 000	781 000
Hernia	508 000	506 000

Con base en estas estadísticas, calcule:

a) La probabilidad de que una operación de la vesícula biliar tenga éxito.
b) La probabilidad de que una operación del apéndice resulte exitosa.

Ejemplos:
(Cont.)

Solución:

a) Este experimento se realizó 472 000 veces.

Los posibles resultados son: éxito (e) o fracaso (f)

$$\underbrace{\text{e e e . . . f . . . e e . . . f . . .}}_{\text{472 000 resultados}}$$

El número de veces que apareció éxito (e) fue: 465 300

Por lo tanto: $P(e) = \dfrac{465\,300}{472\,000} = 0.9858$

b) Este experimento se realizó 784 000 veces.

Los posibles resultados son también: éxito (e) o fracaso (f).

$$\underbrace{\text{e e e . . . f . . . e e . . . f . . .}}_{\text{784 000 resultados}}$$

El número de veces que apareció “e” fue: 781 000

Por lo tanto: $P(e) = \dfrac{781\,000}{784\,000} = 0.9961$

Ejercicio 1.2

1. Utilizando los datos del ejemplo de la actividad 1.2 a, calcula la probabilidad de que:
   a) Una operación de vesícula fracase
   b) Una operación apéndice fracase
   c) Una operación de hernia fracase.

2. Como ya se mencionó, el estadístico Pearson lanzó una moneda 24000 veces y obtuvo 12012 águilas. Con base en estos datos determina:
   a) La probabilidad de que una moneda caiga águila.
   b) La probabilidad de que una moneda caiga sello.

3. La siguiente tabla, muestra la distribución de 5001 lanzamientos de un dado.

x	f	f_r
1	802	0.160
2	818	0.164
3	815	0.163
4	862	0.172
5	864	0.173
6	840	0.168

Determina:
P(1)________, P(2)______, P(3)______,
P(4)________, P(5)_______ y P(6)______.

4. De los últimos 12 000 tornillos para coches producidos por la corporación Tuercas y Tornillos, 66 eran defectuosos (D) y los tornillos restantes eran buenos (B). Se tomará un tornillo al azar para inspeccionarlo. ¿Cuál es la probabilidad de que el tornillo seleccionado sea defectuoso? ¿Y de que sea bueno?

5. Las estadísticas demográficas demuestran que sobre 1000 nacimientos, se registran un promedio de 515 mujeres y 485 varones. Si se escoge una persona al azar de una población. ¿Cuál es la probabilidad de que sea mujer?

Lección 1.3 Asignación de probabilidades: enfoque subjetivo

Objetivos: Conocer el enfoque subjetivo para asignar probabilidades.
Asignar probabilidades según el enfoque subjetivo.
Conocer la escala de probabilidad.
Distinguir entre suceso seguro y suceso imposible.

Actividad 1.3 a

Qué hacer

a) Estudia con atención:

En la actividad anterior, asignamos probabilidades a sucesos mediante la expresión:

$$P(suceso) = \frac{f}{N}$$

Recordemos que los datos requeridos por esta fórmula, pueden obtenerse repitiendo el experimento muchas veces o bien utilizando datos ya conocidos en el pasado. Sin embargo, no siempre existen posibilidades de repetir un experimento en circunstancias semejantes, ni contar con datos registrados previamente. En estas circunstancias, podemos utilizar el denominado enfoque subjetivo.

Definición de probabilidad según el enfoque subjetivo

Se define la probabilidad subjetiva, como el número asignado para cuantificar la ocurrencia de un suceso, según el grado de confianza o credibilidad que se tiene de que ese suceso ocurra.

Esta manera de asignar probabilidades se llama subjetivo debido a que la confianza o credibilidad que se atribuye a la ocurrencia de un suceso, es generalmente reforzado por la cantidad de información que tenemos sobre el fenómeno. Es decir dos personas diferentes pueden asignar probabilidades diferentes.

Para asignar valores a la probabilidad de un suceso, debemos tener en cuenta la escala de probabilidad.

Escala de probabilidad. Suceso seguro y suceso imposible

Para entender la escala de probabilidad, contesta las siguientes preguntas relacionadas con la fórmula de la probabilidad frecuentista:

$$P(suceso) = \frac{f}{N}$$

1) ¿Cómo es el valor de f con respecto a N? ¿Puede ser $f > N$? ¿Es $f < N$? ¿Puede ser $f = N$? ¿Puede ser $f = 0$?

En la tabla siguiente se presentan algunas sucesiones que pueden ocurrir al lanzar una moneda.

Sucesión aleatoria	$f_{águila}$	N	Probabilidad de águila (f / N)
SSSSSSSSSS	0	10	0/10 = 0
ASSAASSSSS	3	10	3/10 = 0.3
SSSSAASAAA	5	10	5/10 = 0.5
AAASAAAASA	8	10	8/10 = 0.8
AAAAAAAAAA	10	10	10/10 = 1.0

Aunque las frecuencias relativas calculadas no son propiamente probabilidades (por corresponder a sucesiones demasiado pequeñas), el rango que muestran dichas frecuencias ilustra los posibles valores que puede tomar la probabilidad de un suceso. Dicho rango, es el siguiente:

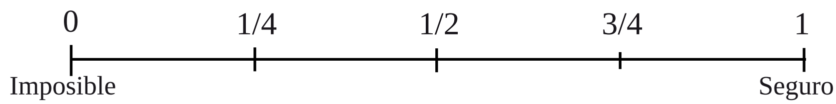
La probabilidad de un suceso, es un número real que va desde 0 hasta 1.

En otras palabras, para medir la mayor o menor posibilidad de que ocurra un suceso en un experimento, se le asigna un número entre 0 y 1, llamado su probabilidad. Se asigna una probabilidad 0, cuando el suceso de interés nunca puede ocurrir, y 1, cuando el suceso ocurre siempre que se realiza el experimento.

Un suceso con probabilidad cero, se llama imposible, y un suceso con probabilidad 1, se llama seguro.

Por ejemplo, la probabilidad de que una persona viva 200 años es 0; el suceso "una persona vive 200 años" es un suceso imposible. La probabilidad de que haya nubes si está loviendo es 1; el suceso "hay nubes si está lloviendo" es un suceso seguro.

A continuación, se presenta la escala de probabilidad:



Ejercicio 1.3

1. Inventa un suceso de cada tipo.
   a) muy probable o casi seguro
   b) medianamente probable
   c) poco probable
   d) casi imposible

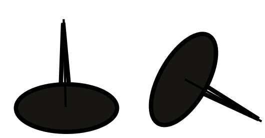
2. Contesta las siguientes preguntas. (Si desconoces el deporte al que se hace referencia, pregunta a tus compañeros (as). Compara tus respuestas con las de tus compañeros (as).

   a) En fútbol soccer profesional, ¿cuál es la probabilidad de que se anote un gol en las siguientes siuaciones?:
   - Tiro libre____
   - Tiro de esquina___
   - Tiro de penalty___
   - Tiro de media cancha___

   b) En básketbol profesional, asigna un valor a la probabilidad de encestar en:
   - Tiro libre____
   - Tiro de dos puntos___
   - Tiro de tres puntos____

   c) En la vida cotidiana, asigna un valor a la probabilidad de:
   - Infraccionen a una persona por estacionar su auto en línea amarilla____
   - Neva en tu lugar de origen___
   - Llueva un día de verano en tu lugar de residencia___

3. Considera el experimento de colocar una chincheta en un vaso y lanzarlo sobre una mesa. Aplicando el enfoque subjetivo, ¿podrías asignar una probabilidad al suceso “la chincheta cae apuntando hacia arriba” y una probabilidad al suceso “la chincheta apunta hacia abajo?” ¿Cómo podrías verificar tus probabilidades?________________
   ____



Lección 1.4 Asignación de probabilidades: enfoque clásico o teórico.

Objetivos: Conocer el enfoque teórico o clásico para asignar probabilidades.
Asignar probabilidades según el enfoque teórico o clásico.
Distinguir entre resultados equiprobables y no equiprobables.
Conocer la regla de Laplace y aplicarla en la asignación de probabilidades de experimentos simples (de una etapa).

La manera más inmediata de asignar probabilidades, es utilizando el razonamiento ***parte-todo***. Cuando afirmaste que al lanzar una moneda la probabilidad de que caiga águila es un "medio" (o 0.5), o "una posibilidad de dos", usaste el hecho de que la moneda tiene dos caras, y una de ellas es águila.

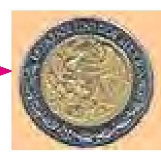
Actividad 1.4 a

Qué hacer

a) Estudia con atención:

Experimento: Lanzar una moneda → Dos resultados posibles

→ Un resultado corresponde a águila



→ P(águila) = 1/2

Asimismo, P (sello) = 1/2.

¿Cuál es valor de la suma: P (águila) + P (sello)?____

De manera semejante, al lanzar un dado, podemos razonar de la siguiente manera:

Experimento: lanzar un dado

↓ Seis resultados posibles:

→ Un resultado corresponde a un punto

→ P(un punto) = 1/6

Actividad 1.4 a (Cont.)

b) Resuelve: Si 1, 2, 3, 4, 5 y 6, representan los sucesos: cae uno, dos, tres, cuatro, cinco y seis puntos respectivamente, determina:

P (1) = _____ P (3) = _____ P (5) =___

P (2) = _____ P (4) =_____ P (6) =____

¿Cuál es el valor de la suma: P (1) + P (2) + P (3) + P (4) + P (5) + P (6)?__________

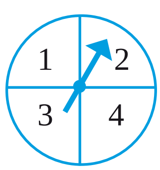
Además del razonamiento ***parte-todo***, se hace uso de un supuesto: al lanzar la moneda, los dos resultados posibles (águila y sello) son igualmente probables, y al lanzar un dado, los seis resultados son también igualmente probables. Los resultados que son igualmente probables, se llaman ***equiprobables.***

Para cumplir con el supuesto de equiprobabilidad, deben cunplirse algunas condiciones que dependen del contexto en el que se realiza el experimento. En el caso de experimentos con monedas o dados, la equiprobabilidad exige que dichos artefactos no estén "cargados", es decir sean totalmente simétricos en el sentido de estar perfectamente balanceados. A continuación analizarás otros contextos.

Contexto de ruletas

Imagina los siguientes tipos de ruletas (en cada caso, se garantiza el giro libre de la flecha). Los experimentos consisten en girar vigorosamente la flecha y observar en qué sector se detiene. Analiza lo que se afirma y contesta lo que se indica.

1)

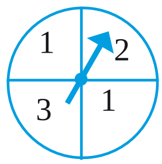


Se cumple la equiprobabilidad puesto que el todo (el círculo) está formado por cuatro sectores de igual área.

P(apuntar en cualquier sector) = 1/4.

Completa: P(1) = ___, P(2) = _____, P(3) = ____, P(4) =___

P(1) + P(2) + P(3) + P(4) = ____

2) 

Se cumple la equiprobabilidad puesto que el todo (el círculo) está formado por cuatro sectores de igual área.

P(apuntar en cualquier sector) = 1/4.

Completa: *P(1)* = ___, *P(2)* = _____, *P(3)* = ____.

P(1) + *P(2)* + *P(3)* = ____

En esta ruleta aparece un suceso que <u>*no es elemental:*</u> el suceso “*la flecha apunta en 1*”

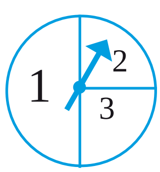
Sucesos elementales y sucesos compuestos

Un suceso es elemental, si no se puede descomponer en otros sucesos, y es compuesto si se puede descomponer en dos o más sucesos elementales.

Los sucesos: “*la flecha apunta en 2*” y “*la flecha apunta en 3*” son elementales. En cambio el suceso “*la flecha apunta en 1*” es compuesto puesto que está formado por dos sectores de área que equivalen a dos sucesos elementales.

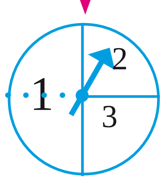
La probabilidad de un suceso compuesto es igual a la suma de las probabilidades de los sucesos elementales que lo componen.

P(1) = 1/4 + 1/4 = 2/4 = 1/2.

3) 

En esta ruleta, no se cumple la equiprobabilidad puesto que el todo (el círculo) está formado por tres sectores de diferente área.

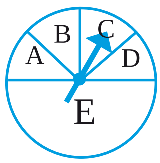
Para que se cumpla la equiprobabilidad, podemos presentar la ruleta con sectores iguales.



P(apuntar en cualquier sector) = 1/4.

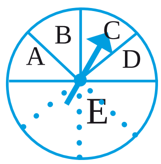
Completa: P(1) = ___, P(2) = _____, P(3) = ____.

P(1) + P(2) + P(3) = ____

4) 

En esta ruleta, no se cumple la equiprobabilidad puesto que el todo (el círculo) está formado por cinco sectores de diferente área.

Para que se cumpla la equiprobabilidad, podemos presentar la ruleta con sectores iguales.



P(apuntar en cualquier sector) = 1/8.

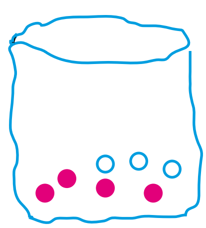
Completa: P(A) = ___, P(B) = _____, P(C) = ____,P(D) =__
P(E) = ____

P(A) + P(B) + P(C) + P(D) + P(E) = ____

Contexto de urnas, bolsas o cajas

En estos casos, los experimentos consisten en seleccionar elementos de un conjuno (población). Para que se cumpla la equiprobabilidad, cada elemento debe seleccionarse al azar; para ello, antes de cada selección el contenido del conjunto debe mezclarse perfectamente y la selección debe hacerse sin ver los elementos.

Por ejemplo, sea una bolsa con siete canicas. El experimento consiste en extraer una canica al azar.



Se cumple la equiprobabilidad puesto que las extracciones se hacen al azar

Contesta:

1) P(extraer cualquier canica) =_______
2) P(extraer una canica negra)= ______
3) P(extraer una canica blanca) =______
4) El suceso “extraer una canica negra” , ¿es elemental o compuesto? ¿Por qué?____________
5) El suceso “extraer una canica negra”, ¿es elemental o compuesto? ¿Por qué?___________
6) *P(negra) + P(blanca)* = ___

____

La probabilidad asignada de esta manera, se llama probabilidad teórica o clásica.

Definición de probabilidad según el enfoque teórico o clásico

Se define la probabilidad teórica o clásica, como el número asignado para cuantificar la ocurrencia de un suceso de la siguiente manera: Si N es el número de sucesos elementales (partes) equiprobables, que forman una unidad (el todo), entonces la probabilidad de cada suceso elemental (parte) es igual a $\frac{1}{N}$. Y si un suceso consta de k sucesos elementales, su probabilidad será $\frac{k}{N}$.

Esta fórmula, generalmente se plantea de la siguiente manera:

$$\textit{Probabilidad de un suceso} = \frac{\textit{Número de resultados favorables al suceso}}{\textit{Número total de resultados posibles}} = \frac{k}{N}$$

Esta manera de asignar probabilidades, la enunció por primera vez el matemático Pierre Simon de Laplace, razón por la cual al enfoque teórico o clásico, también se le llama probabilidad Laplaciana.

Pierre Simon Laplace (1749 - 1827), astrónomo y matemático francés. Trabajó sobre la teoría de la probabilidad en su Teoría Analítica de las Probabilidades (1812) en la que enuncia la definición de probabilidad: «la probabilidad de un suceso A es el cociente entre el número de casos favorables al suceso y el número de casos posibles»

De esta definición surgen dos conceptos importantes: resultados favorables a un suceso y espacio muestral.

Espacio muestral y resultados favorables

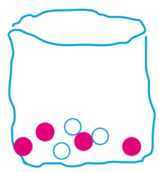
El espacio muestral es el conjunto de todos los posibles resultados de un experimento aleatorio.

El número de elementos del espacio muestral, constituye el total de resultados posibles que tiene el experimento.

Los resultados favorables a un suceso, son aquellos que tienen la propiedad o cualidad del suceso.

Ejemplos

a) Consideremos el experimento de extraer una canica de una bolsa que contiene cuatro rojas y 3 blancas.

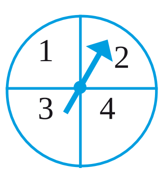


El espacio muestral está formado por siete elementos:

El suceso "*se extrae una canica roja*" tiene cuatro resultados favorables.

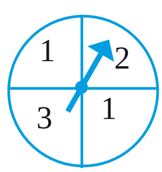
El suceso "*se extrae una canica blanca*" tiene tres resultados favorables.

b) Consideremos el experimento de girar la flecha de las distintas ruletas mostradas:



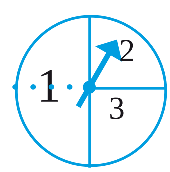
El espacio muestral está formado por cuatro elementos equiprobables.

El suceso "*la flecha apunta en 1*", tiene un resultado favorable.



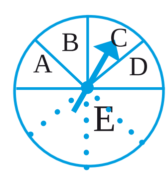
El espacio muestral está formado por cuatro elementos equiprobables.

El suceso "*la flecha apunta en 1*", tiene dos resultados favorables.



El espacio muestral está formado por tres elementos no equiprobables los cuales se pueden convertir en cuatro equiprobables.

El suceso "*la flecha apunta en 1*", tiene dos resultados favorables equiprobables..



El espacio muestral está formado por cinco elementos no equiprobables los cuales se pueden convertir en ocho equiprobables.

El suceso "*la flecha apunta en E*", tiene cuatro resultados favorables equiprobables.

El espacio muestral en el lenguaje de conjuntos

Puesto que el espacio muestral es un conjunto, podemos representarlo utilizando las notaciones conjuntistas.

Así, al lanzar un dado, obtenemos el siguiente espacio muestral:

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

Los espacios muestrales como el anterior se llaman finitos, porque se pueden contar sus elementos. Para indicar el número de elementos que tiene *S*, utilizamos la notación ***n(S)***. Los espacios muestrales que corresponden a experimentos cuyos resultados pueden ser cualquier valor de una escala contínua, se llaman infinitos. Por ejemplo, la duración de una lámpara podría variar en el intervalo [0,2000] .

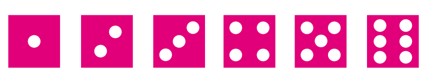
Antes de asignar probabilidades a los resultados de un experimento aleatorio, debemos describir todos los resultados posibles del experimento, es decir, debemos establecer su espacio muestral. Por desgracia un experimento puede tener más de un espacio muestral, dependiendo de lo que el observador decida registrar. Solamente deben cuidarse tres requisitos:

- Todo elemento del espacio muestral es un resultado potencial del experimento.
- Cualquier resultado que se observe al realizar el experimento, debe ser un elemento del espacio muestral.
- El resultado observado debe coincidir con un sólo elemento del espacio muestral.

Ejemplos

a. Suponga que se lanza un dado. Establece tres espacios muestrales.

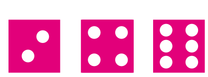
Espacio muestral 1. Observando que un dado tiene 6 caras con 1, 2, 3,4, 5 y 6 puntos respectivamente, podemos listar:

S = {  }

o simplemente: $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Espacio muestral 2. Si el observador registra que la cara mostrada tiene un número par o impar de puntos, podría listar:

$$S = \{par,\ impar\} = \{p, i\}$$

p es favorecido por: 

i es favorecido por: 

Ejemplo
(Cont.)

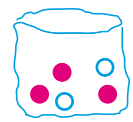
Espacio muestral 3. Si al observador le interesa la aparición de la cara con 3 puntos, podría listar:

$S = \{\ 3, \text{no } 3\}$

3, es favorecido por: 

no 3, es favorecido por: 

b. Supón ahora, que de una bolsa que contiene 3 canicas negras y dos blancas, se tomará una sóla canica. Encuentra tres espacios muestrales.



Espacio muestral 1. Observando que los objetos son cinco canicas, podemos listar:

S = {  }

O bien, $S = \{c_1, c_2, c_3, c_4, c_5\}$

Espacio muestral 2. Si queremos registrar el color de la canica extraída, podemos escribir:

$S = \{\textit{roja, blanca}\}$ o $S = \{r, b\}$

Espacio muestral 3. Si nos interesa la aparición del color rojo, escribiríamos:

$S = \{\textit{rojo, no rojo}\}$ o $S = \{r, \text{no } r\}$

Actividad 1.4 b

Resuelve:

1. De un grupo de personas de los cuales 25 son mujeres y 15 hombres, se va a seleccionar a una de ellas. Establece tres espacios muestrales.

Sucesos como subconjuntos del espacio muestral

Cada suceso será un subconjunto del espacio muestral formado por sus resultados favorables; por ejemplo,

A = "*obtener un número par*" = $\{2, 4, 6\}$

Recordemos que la probabilidad de un suceso es igual a la suma de las probabilidadesde los sucesos elementales que lo componen.

Así:

$$P(par) = P(2) + P(4) + P(6) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

Actividad 1.4 C

Escribe los elementos que favorecen a cada suceso:

B = "número impar" = { }

C = "número primo" = { }

D = "múltiplo de 3" = { }

Asigna probabilidades a cada uno de los sucesos B, C y D:

P(B) =_______; P(C) = _______; P(D) = _______

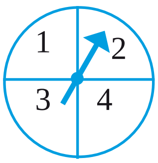
En el lenguaje de conjuntos, la regla de Laplace, puede establecerse de la siguiente manera:

Probabilidad de un suceso X cualquiera = $P(X) = \dfrac{\textit{Número de elementos de X}}{\textit{Número de elementos de S}} = \dfrac{n(X)}{n(S)}$

¡Atención! Para aplicar la fórmula anterior, ***n(X)*** y ***n(S)***, deben provenir de espacios muestrales equiprobables.

Analiza cuidadosamente los siguientes casos, que muestran la forma de proceder para transformar en espacio muestral equiprobable, uno que no lo es.

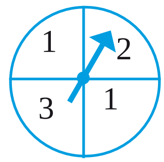
1)



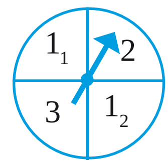
$S_{\text{equiprobable}} = \{1, 2, 3, 4\}$

$n(S) = 4$

2)



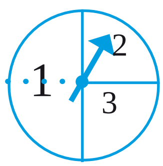
$S_{\text{no equiprobable}} = \{1, 2, 3\}$

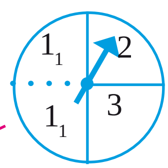


$S_{\text{equiprobable}} = \{1_1, 1_2, 2, 3\}$

$n(S) = 4$

3)



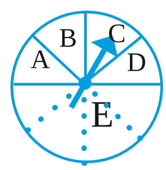


$S_{\text{no equiprobable}} = \{1, 2, 3\}$

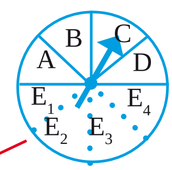
$S_{\text{equiprobable}} = \{1_1, 1_2, 2, 3\}$

$n(S) = 4$

4)



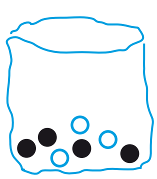
$S_{\text{no equiprobable}} = \{A, B, C, D, E\}$



$S_{\text{equiprobable}} = \{A, B, C, D, E_1, E_2, E_3, E_4\}$

$n(S) = 8$

5)



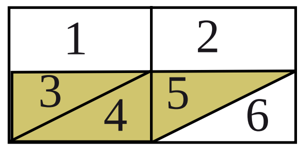
$S_{\text{no equiprobable}} = \{\text{negra, blanca}\} = \{n, b\}$

$S_{\text{equiprobable}} = \{n_1, n_2, n_3, n_4, b_1, b_2, b_3\}$

$n(S) = 7$

Actividad 1.4 d

1. El dibujo de la derecha muestra un tiro al blanco. Si un dardo que se lanza al azar cae en la zona 1, diremos que ha ocurrido el suceso 1. La probabilidad de que ocurra el suceso 1 la representamos por *P(1)*. De manera semejante nos referimos a los sucesos 2, 3, 4, 5 y 6. Además consideremos el suceso "el dardo cae en zona coloreada" y representemos su probabilidad como *P(zona de color)*

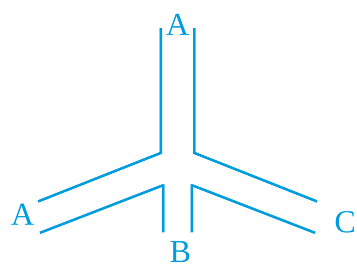


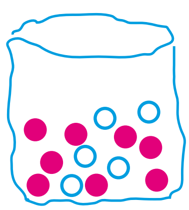
a) Clasifica estos sucesos en elementales o compuestos. Argumenta tu respuesta.
b) Determina:

P(1)=_____, P(2)=_____, P(3) =_____, P(4) = _______, P(5) =_______, P(6)= _____

P(zona de color) = _____, P(zona blanca) =______

2. Un ratón sale de *A* y puede irse, con igual probabilidad, por cualquiera de las bifurcaciones que encuentra. Asigna un número a la probabilidad de llegar a *B*.





3. Una bolsa contiene 8 canicas rojas y 5 blancas. Si se extrae una canica al azar.
   a) Establece dos espacios muestrales uno equiprobable y otro no equiprobable.

   b) Sea **b** el suceso "*sale una canica blanca*" y ***r*** el suceso "*sale una canica roja*". Determina:
      - *P(b),*
      - *P(r),*
      - *P(b) + P(r)* = ___

Relación entre probabilidad frecuentista y teórica

Una vez estudiados los distintos enfoques, es necesario contestar la siguiente pregunta: ¿Qué relación existe entre la probabilidad teórica y la frecuencial (empírica)?

Para contestar, recuerda que cuando estudiaste el comportamiento de las frecuencias relativas del suceso "*cae águila*" en el experimento de lanzar una moneda, se pudo apreciar que, conforme aumenta el número de lanzamientos, dicha frecuencia relativa tiende a estabilizarse alrededor de valores muy cercanos a 0.5. Y, cuando aplicaste el enfoque clásico, encontraste que la probabilidad de que "*caiga águila*" es: $\frac{1}{2} = 1.5$

De igual manera, en el lanzamiento de un dado, la frecuencia relativa del suceso "*cae un punto*", se estabiliza en valores cercanos a 0. 16 y 0.17, y aplicando el enfoque clásico encontramos que la probabilidad de "*cae un punto*" es: $\frac{1}{6} = 0.1666...$

Así pues, la probabilidad teórica, nos indica la proporción aproximada conque aparecerá el suceso a la larga. Se debe recalcar que las probabilidades teóricas sólo serán aproximadamente válidas para el experimento real. Este hecho, no debe sorprendernos, puesto que la asignación teórica, está basada en una idealización de la realidad. Esta idealización recibe el nombre de modelo. Por ejemplo, imaginamos que las monedas o los dados son completamente simétricas. Un modelo es adecuado, si a pesar de la simplificación que hace de la realidad, los resultados que proporciona son bastante aceptable para todos los propósitos prácticos. La probabilidad se encarga de encontrar modelos apropiados para describir los fenómenos aleatorios.

Otro aspecto que debe recordarse es que, la estabilización se presenta con las frecuencias relativas (o proporciones), y no con las absolutas. Por ejemplo, si n es el número de lanzamientos de una moneda, el número teórico de águilas (o sellos) es: $\frac{1}{2}$ (n).

Sin embargo, Kerrich por ejemplo, obtuvo en 10000 lanzamientos, 5067 águilas contra 4933 sellos, en vez de $\frac{1}{2}$ (10000) = 5000 águila (o sellos).

También, debemos recordar que, si el número de veces que se repite el experimento es muy pequeño, las frecuencias relativas son muy irregulares, y, en estos casos, no podemos asegurar nada acerca de los resultados esperados.

Propiedades de la probabilidad

En los apartados anteriores estudiaste tres modos diferentes de asignar probabilidades:

1) Si es posible y práctico repetir muchas veces el experimento o si contamos con información estadística sobre las frecuencias relativas de aparición de distintos sucesos, podemos utilizar el enfoque frecuencial de la probabilidad.

2) En el caso de espacios muestrales con un número finito de resultados equiprobables, calculamos las probabilidades usando el enfoque clásico o teórico.

3) En los demás casos, el único modo de asignar probabilidades a los sucesos es de modo subjetivo.

En todos los casos, las probabilidades deben cumplir las siguientes propiedades:

1. Una probabilidad es siempre un valor numérico entre cero y uno, incluyendo a éstos. Es decir, para todo suceso A se cumple que: $0 \leq P(A) \leq 1$

   Propiedades relacionadas con la propiedad 1:
   La probabilidad es 0, si el evento no puende ocurrir (suceso imposible).
   La probabilidad es 1 si el evento siempre ocurre (***suceso seguro***).
   En los demás casos, la probabilidad de un suceso es un número fraccionario entre 0 y 1.

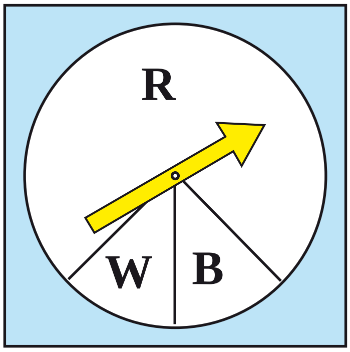
2. La suma de las probabilidades de todos los resultados de un experimento es igual a 1.

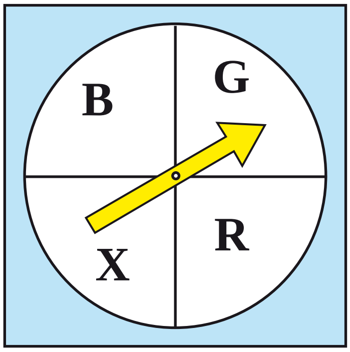
   Esta propiedad es consecuencia de las condiciones que debe reunir todo espacio muestral: El espacio muestral debe incluir a todos los posibles resultados del experimento, y el resultado observado debe coincidir con un sólo elemento del espacio muestral.

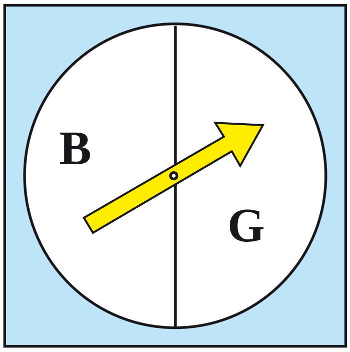
3. La probabilidad de un suceso compuesto es la suma de las probabilidades de los sucesos elementales que lo componen.

Ejercicio 1.4

1. Escribe un espacio muestral para cada una de las flechas giratorias de las figuras de abajo. Indica si son equiprobables o no. En caso de que no sean equiprobables, determina uno equiprobable.

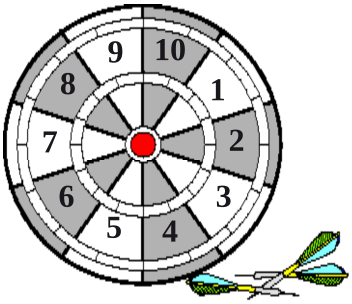






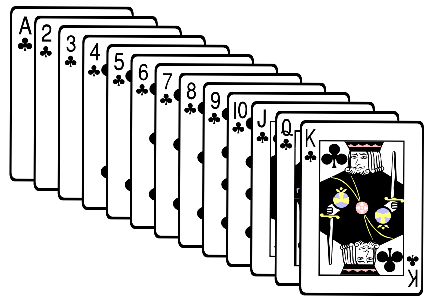
2. Una bolsa contiene 4 canicas rojas, 3 azules y 3 verdes. Se extrae una sola canica.
   a) Tabula un espacio muestral con tres resultados.
   b) Tabula un espacio muestral con diez resultados.
   c) Tabula un espacio muestral suponiendo que nos interesa el color rojo.

3. Si se tira un dardo a la rueda de la figura, encuentra las probabilidades de obtener:
   a) Tres puntos
   b) Número par
   c) Número menor que 4
   d) Número impar, mayor o igual que 7



4. Investiga la composición de una baraja española y contesta:
   a) Si se extrae una carta al azar, ¿cuál es la probabilidad de que sea un as?
   b) Se llaman figuras a las cartas As, Sota, Caballo y Rey. Calcular la probabilidad de sacar figura al extraer una carta de esta baraja.

Ejercicio 1.4 (Cont.)



5. Al extraer una carta de una baraja americana calcular:
   a) P(as de corazones)
   b) P(as)
   c) P(diamante)
   d) P(no diamante)
   e) P(as de tréboles)

6. En el experimento de lanzar un dado, calcula las siguientes probabilidades:
   a) Sacar un 4
   b) Sacar par
   c) No sacar 4
   d) Sacar 3 ó 4
   e) Sacar número primo.

7. Tenemos 20 canicas rojas y 2 negras Extraemos una. ¿Cuál es la probabilidad de que sea roja? ¿Y de que sea negra?

8. Sea S = {a, b, c} el espacio muestral de cierto experimento aleatorio.
   Si $P(a) = 0.3$ $P(b) = 0.6$, ¿cuánto debe valer P(c)?

9. Encuentra los errores de cada una de las siguientes aseveraciones:

   a) Las probabilidades de que un vendedor de automóviles cierre 0, 1, 2, 3 o más operaciones en cualquier día de febrero son, respectivamente, 0.19, 0.38, 0.29 y 0.15.

   b) La probabilidad de que llueva mañana es de 0.40 y la de que no suceda es de 0.52

   c) Las probabilidades de que una impresora cometa 0, 1, 2, 3 , 4 o más errores en la impresión de un documento son, respectivamente, 0.19, 0.34, -0.25, 0.43 y 0.29.

AUTOEVALUACIÓN (UNIDAD I)

1. Relaciona correctamente las dos columnas

a) Según este enfoque,

$$P(E) = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{\text{Resultados favorables a } E}{\text{Total de resultados}}$$

b) Probabilidad emitida en base a la experiencia. Por ejemplo: "si estudio es muy probable que apruebe"

c) $P(E) = 1$

d) $P(E) = 0$

e) La asignación de probabilidades mediante este enfoque, requiere que el experimento se repita muchas veces.

f) Cada resultado tiene distinta probabilidad de ocurrencia.

g) Parte de la matemática que trata de manejar con números la incertidumbre

( ) Probabilidad frecuentista

( ) Evento imposible

( ) Espacio muestral equiprobable

( ) Probabilidad

( ) Probabilidad clásica

( ) Evento seguro

( ) Espacio muestral no equiprobable

( ) Probabilidad subjetiva

2. Lee cuidadosamente las preguntas. Selecciona la mejor respuesta.

A. El enfoque laplaciano con respecto a la asignación de probabilidades consiste en:
   a) Asignar a cada resultado la mitad de la probabilidad del resultado anterior.
   b) No hace ninguna hipótesis a priori acerca de la probabilidad del resultado anterior.
   c) Asignar a cada resultado la misma probabilidad.
   d) Suponer que todos los resultados son iguales.

B. La equiprobabilidad requiere que:
   a) Sólo haya un número finito de resultados favorables.
   b) Cada resultado tenga la misma probabilidad de ocurrir.
   c) No se dé ningún resultado.
   d) Todos los resultados son iguales.

C. La frecuencia relativa de un suceso es:
   a) El número de veces que se observa.
   b) El número de veces que lo anotamos.
   c) El cociente del número de veces que ocurre dicho suceso entre el número de repeticiones del experimento.
   d) Un número irracional.

D. Los sucesos elementales son aquellos que:

a. Constan de un sólo resultado.
b. Son muy sencillos.
c. Se ven al principiop del curso.
d. No son muy importantes.

E. Al evento seguro se le asigna una probabilidad de:

a. 1.
b. 0.5
c. Igual a la de los demás.
d. 0.

3. Se emitió un documental sobre terremotos y la frecuencia con que éstos ocuren. El documental incluía un debate sobre la posibilidad de predecir los terremotos.

Un geólogo dijo: *En los próximos veinte años, la posibilidad de que ocurra un terremoto en la ciudad de Zed es de dos de tres.*

¿Cuál de las siguientes opciones refleja mejor el significado de la afirmación del geólogo?

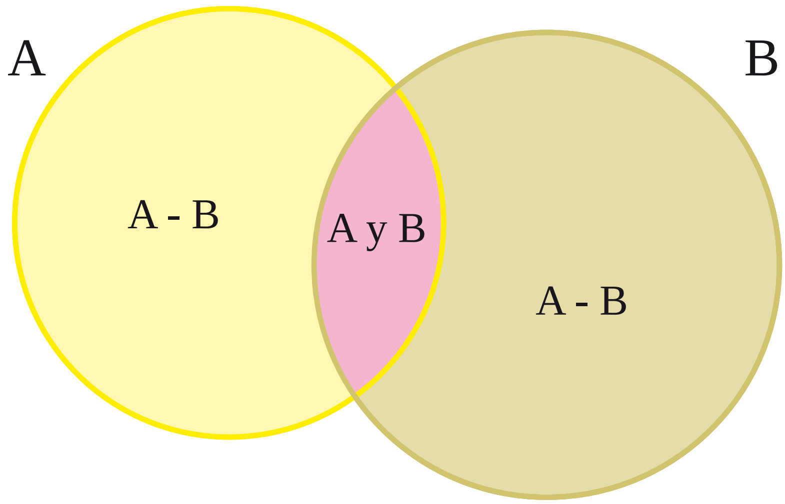
A) $\frac{2}{3} \times 20 = 13.3$, por lo que entre 13 y 14 años a partir de ahora habrá un terremoto en la Ciudad de Zed.

B) $\frac{2}{3}$ es más que $\frac{1}{2}$, por lo que se puede estar seguro de que habrá un terremoto en la Ciudad de Zed en algún momento en los próximos 20 años.

C) La posibilidad de que haya un terremoto en la Ciudad de Zed en algún momento en los próximos 20 años es mayor que la probabilidad de que no haya ningún terremoto.

D) No se puede decir lo qué sucederá, porque nadie puede estar seguro de cuándo tendrá lugar un terremoto.

Probabilidad de sucesos compuestos



2

UNIDAD

Lección 2.1 Elementos básicos de conjuntos:

Objetivos: Comprender la simbología básica de los conjuntos.
Identificar y representar en un diagrama de Venn las operaciones entre conjuntos y entre sucesos.

La probabilidad utiliza el lenguaje de los conjuntos para establecer muchos de sus conceptos y leyes. Por tal razón a continuación se hará un repaso de los conceptos y operaciones entre conjuntos que ya estudiaste en tu curso de matemáticas I.

Actividad 2.1 a

Qué hacer

Estudia con atención:

Un conjunto es una colección bien definida de objetos los cuales se llaman elementos.

Un conjunto puede expresarse de dos maneras:

a) **Por extensión**: nombrando todos y cada uno de los elementos que lo forman. Para escribirlo, se encierran los elementos entre llaves separados por comas.

Ejemplo: el conjunto formado por las vocales del alfabeto castellano puede escribirse,

$$V = \{a, e, i, o, u\}$$

y se lee: "*V* es el conjunto formado por las letras *a, e, i, o, u*".

Para indicar que un elemento "**a**" está en un conjunto "A" escribimos $\mathbf{a} \in \mathbf{A}$
Si un elemento "**b**" no pertenece al conjunto "A", se simboliza, $\mathbf{b} \notin \mathbf{A}$.

b) **Por comprensión**: nombrando una propiedad que cumplan todos los elementos del conjunto.

El conjunto de las vocales definido por comprensión, se escribe:

$$V = \{x/x \text{ es letra vocal}\}$$

y se lee: "V es el conjunto de los elementos x, tal que x es letra vocal"

El símbolo / se lee "tal que".
También podemos escribir simplemente la propiedad entre las llaves

$$V = \{\text{letra vocal}\}$$

Ejemplos

Los siguientes conjuntos están dados por extensión. Escríbelos por comprensión:

a) O = {suma, resta, multiplicación, división}

b) B = {enero, febrero, marzo, ..., diciembre}

c) P = {2, 4, 6, 8, 10, 12, ...}

d) Q = {2, 3, 5, 7, 11, 13, 17,...}

Solución

a) Es el conjunto de las operaciones fundamentales de la aritmética.

O = {*x* / *x* es una operación fundamental de la aritmética}

Se lee: "A es el conjunto de todas las *x*, tal que *x* es una operación fundamental de la aritmética".

b) Es el conjunto de los meses del año.

B = {x / x es un mes del año}

Se lee: "B es el conjunto de todas las x, tales que x es un mes del año".

c) Es el conjunto de los números naturales pares.

P = {x / x es un número natural divisible entre 2}

O bien:

P = {x / x es un número natural par}.

O en forma más compacta:

$P = \{x \,/\, x \in N \text{ y es par}\}$,

$P = \{x \,/\, x \in N \text{ y es divisible entre } 2\}$,

$P = \{x \,/\, x = 2n,\ n \in N\}$

d) Es el conjunto de los números primos.

Q = {x / x es un número primo}

A continuación recordaremos las definiciones y operaciones elementales entre conjuntos que se utilizan en el estudio de la probabilidad.

Conjuntos finito e infinitos

Un conjunto es finito si sus elementos se pueden contar.

El conjunto V = {*a, e, i, o, u*} es finito

En caso contrario, es decir, un conjunto en que no se pueden contar sus elementos se denomina conjunto infinito.

El conjunto de los números naturales, el de números pares, el de números enteros, el de los racionales, el de los reales, son todos conjuntos infinitos.

Cardinalidad de un conjunto

En un conjunto finito cualquiera *A*, se llama cardinalidad del conjunto al número de sus elementos.

La cardinalidad del conjunto *A* suele representarse por *n*(A).

La cardinalidad del conjunto *A* = {*a, e, i, o, u*} es *n*(A) = 5.

Conjunto vacío

Tratemos de enumerar los elementos del siguiente conjunto:

A = {*x/x* es una mujer que haya sido presidente de México hasta el año 2009}

Obsérvese que no existe persona que tenga esta propiedad. Por lo tanto, este conjunto A, no tiene elementos:

A = { }

Este tipo de conjuntos sin elementos, se presenta frecuentemente en matemáticas; se llama **conjunto vacío** y se representa con el símbolo: ϕ.

Conjunto vacío, es un conjunto que no tiene elementos. El símbolo que lo representa es: ϕ

Subconjuntos

Un conjunto *A* se dice que es subconjunto del conjunto *B* cuando todo elemento de *A* es elemento de *B*.

Se representa : $A \subset B$

y se lee: "*A* es subconjunto de *B*" o "*A* está contenido en *B*" o "*A* está incluido en *B*"

Para representar que un conjunto no es subconjunto de otro, se utiliza el simbolo $\not\subset$.

$H \not\subset D$ significa que *H* no es subconjunto de *B*.

El conjunto vacío, ϕ, es subconjunto de cualquier conjunto.

Si *A* es un conjunto arbitrario, entonces $\phi \subset A$

Sea *A* un conjunto cualquiera, se cumple que $A \subset A$.

Ejemplos:

1. En los conjuntos A = {1, 2, 3, 4, 5}, B = {1, 2, 3, 4, 6, 7} el elemento 5 pertenece a A y no pertenece a B; por lo tanto **A no es subconjunto de B**. Esto se denota $\mathbf{A} \not\subset \mathbf{B}$ (Se lee: A no está contenido en B, o A no es subconjunto de B).

2. El conjunto A = {*x/x* es un paralelogramo}es un subconjunto del conjunto C = {cuadriláteros}

Conjunto universal

Se llama conjunto universal, al conjunto que contiene como subconjuntos, a todos los conjuntos que intervienen en el problema que se esté tratando.

Generalmente el conjunto universal se representa por la letra U.

Por ejemplo, si trabajamos con conjuntos de letras, un conjunto universal sería el conjunto de todo el abecedario. Si hablamos de los deportistas olímpicos, un conjunto universal podría ser el conjunto de deportistas de alto rendimiento o bien el conjunto de todos los deportistas, esto muestra que el conjunto universal no es único y su selección depende del proceso o problema que se aborde.

Ejemplo

Establecer un conjunto universal para los siguientes conjuntos:

A = {*x/x* es un alumno de primer año de la preparatoria Allende}
B = {*x/x* es un alumno de segundo año de la preparatoria Allende}
C = {*x/x* es un alumno de tercer año de la preparatoria Allende}

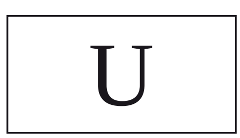
Conjunto universal: **U** = {x/x es un alumno de la preparatoria Allende}

O bien:

U = {*x/x* es un alumno de la UAS}

Diagramas de Venn

Al trabajar con conjuntos es ilustrativo representarlos en un diagrama, esto nos ayuda a ver con más objetividad la situación que se aborda. Generalmente se utilizan regiones del plano representadas por figuras cerradas. Por convención, se acostumbra representar al conjunto universal **U** con un rectángulo.

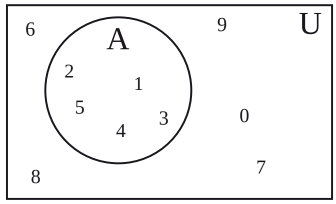


Cualquier conjunto, deberá quedar incluido dentro del área del rectángulo. Estos diagramas se llaman **diagramas de Venn**.

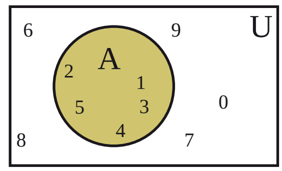
Ejemplo

Si U = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9} y A = {1, 2, 3, 4, 5}

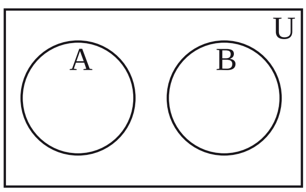
El diagrama de Venn es:



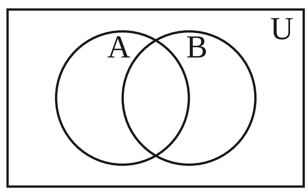
En estos diagramas, se utilizan colores o sombreados para destacar algún conjunto de interés. En el diagrama de la derecha se ha coloreado el conjunto A.



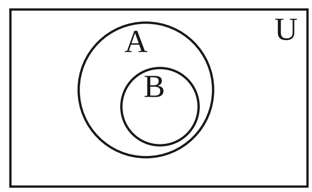
La representación de dos conjuntos presenta alguna de las siguientes opciones



Cuando A y B no tienen elementos comunes. A y B se llaman conjuntos mutuamente excluyentes, disjuntos o ajenos.



Cuando A y B tienen al menos un elemento común.



Cuando todos los elementos del conjunto B pertenecen al conjunto A.

Ejemplo

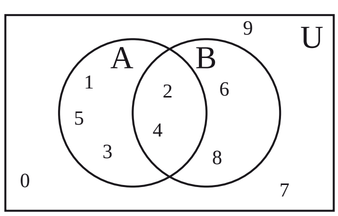
a) Los conjuntos:

U = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}

A = {1, 2, 3, 4, 5}

B = {2, 4, 6, 8}

quedan representados:



El diagrama ilustra que los elementos 2 y 4 pertenecen a ambos conjuntos.

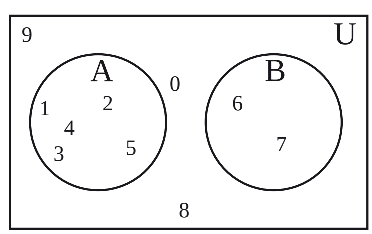
b) Los conjuntos:

U = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}

A = {1, 2, 3, 4, 5}

B = {6, 7}

quedan representados:



El diagrama ilustra que los conjuntos A y B no tienen elementos comunes. Son conjuntos **disjuntos, ajenos o mutuamente excluyentes.**

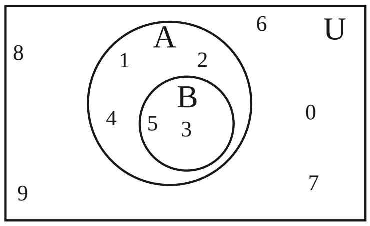
c) Los conjuntos:

$U = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

$B = \{3, 5\}$

quedan representados:



El diagrama ilustra que A contiene a B, o lo que es lo mismo, todo elemento de B es elemento de A.

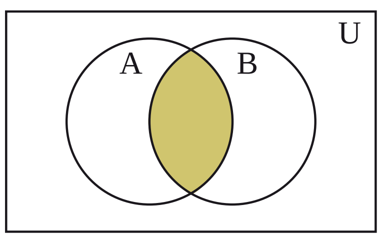
$$B \subset A$$

Intersección

Dados dos conjuntos A y B, la **intersección de A y B**, que se escribe **$A \cap B$**, es el conjunto formado por todos aquellos elementos que son comunes a A y a B. En forma simbólica:

$$A \cap B = \{x / x \in A \text{ y } x \in B\}$$

En un diagrama de Venn:

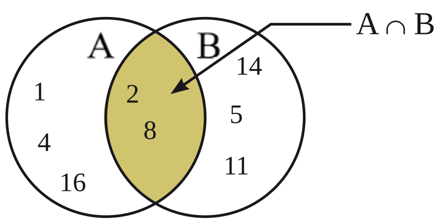


La región ▬ representa $A \cap B$

Ejemplo Si $A = \{1, 2, 4, 8, 16\}$ y $B = \{2, 5, 8, 11, 14\}$

$$A \cap B = \{2, 8\}$$

Para formar el diagrama de Venn, primero se localizan los elementos de la intersección y después se completa cada conjunto.



La intersección cumple con las siguientes propiedades

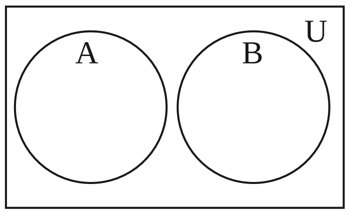
$A \cap B = B \cap A$

$A \cap A = A$

$A \cap \phi = \phi$

$A \cap U = A$

Si $A \cap B = \phi$, entonces A y B son conjuntos disjuntos o ajenos.



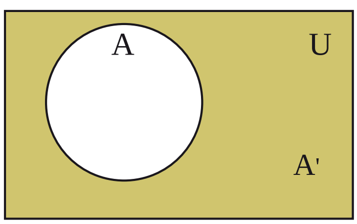
$A \cap B = \phi$

Complemento

Si tenemos un conjunto universal U y A un subconjunto de U, el conjunto formado por todos aquellos elementos de U que no pertenecen a A, se llama **complemento de A** y se denota como **A'** o bien como $\bar{A}$. Simbólicamente:

$A' = \{x / x \in U \text{ y } x \notin A\}$ $\longrightarrow$ Equivale a decir: ***no está*** en A

Visto en un diagrama de Venn:



La región representa A' $\longrightarrow$ A' = ***No*** A.

Ejemplo

Sea U = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9} y A = {2, 3, 4, 9}

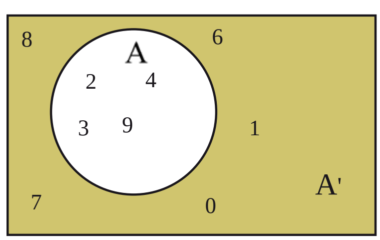
a) Determina el complemento de A.

Solución

a) Complemento de A: Está formado por los elementos que están en U y no pertenecen a A; estos elementos son: 0, 1, 5, 6, 7, 8. Entonces:

A' = {0, 1, 5, 6, 7, 8}

También leemos A' como "***no está*** en A".



La región representa A'

Las operaciones combinadas, $A \cap B'$, $A' \cap B$ y $A' \cap B'$

Estas operaciones cobran relevancia especial en el tratamiento de la probabilidad. Nos interesa de manera particular, la región que ocupan dentro de un diagrama de Venn. Utilizaremos un ejemplo para encontrar tales regiones.

Ejemplo

Dados: U = {x/x es un número dígito}

A = {x/x es dígito múltiplo de 2}

B = {x/x es dígito múltiplo de 3}

Determina: a) $A \cap B$, b) $A \cap B'$, c) $A' \cap B$ y d) $A' \cap B'$

Solución

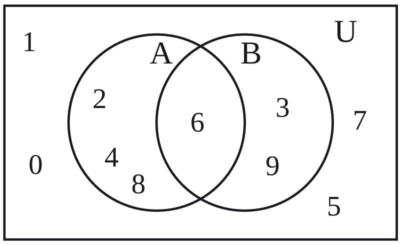
Primero formemos el diagrama de Venn. Para ello necesitamos expresar los conjuntos dados, por extensión

U = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}

A = {2, 4, 6, 8}

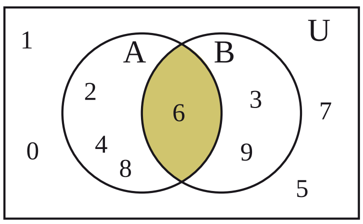
B = {3, 6, 9}

Para formar el diagrama de Venn primero se localizan los elementos comunes y después se completa cada conjunto



a) $A \cap B$

Está formado por los elementos que *están en A* **y** *en B* (múltiplos de 2 **y** múltiplos de 3)



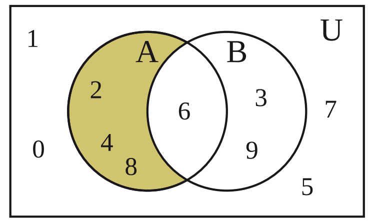
$A \cap B = \{6\}$

La región representa $A \cap B$

b) $A \cap B'$

Está formado por los elementos que ***están*** en A **y** ***no*** **están** en B (múltiplos de 2 **y** ***no son*** múltiplos de 3)

$A \cap B' = \{2, 4, 6, 8\} \cap \{0, 1, 2, 4, 5, 7, 8\} = \{2, 4, 8\}$

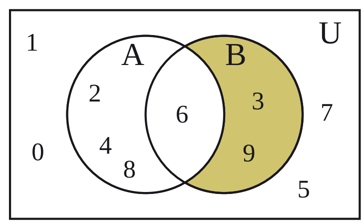


La región representa $A \cap B'$ (sí A y no B)

c) $A' \cap B$

Está formado por los elementos que **no están** en A **y sí están** en B (**no son** múltiplos de 2 **y son** múltiplos de 3)

$A' \cap B = \{0, 1, 3, 5, 7, 9\} \cap \{3, 6, 9\} = \{3, 9\}$

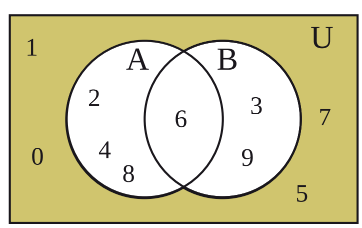


La región representa $A' \cap B$ (***no*** A y sí B)

d) $A' \cap B'$

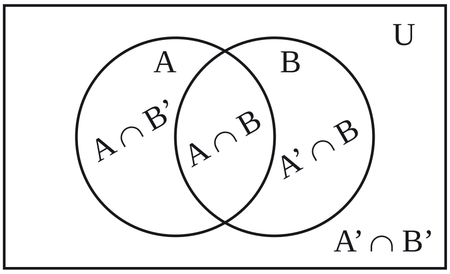
Está formado por los elementos que **no están** en A **y no están** en B (**no son** múltiplos de 2 **y no son** múltiplos de 3)

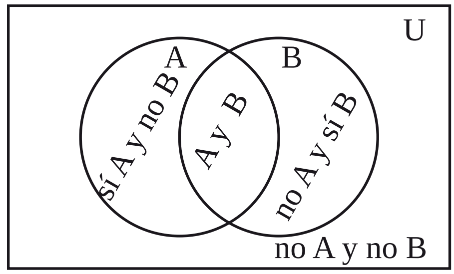
$A' \cap B' = \{0, 1, 3, 5, 7, 9\} \cap \{0, 1, 2, 4, 5, 7, 8\} = \{0, 1, 5, 7\}$



La región representa $A' \cap B'$ (no A y no B)

Resumen de regiones





Actividad 2.1 b

1. Sean los conjuntos:

U = {x/x es número dígito}
A = {x/x es número dígito primo}
B = {x/x es número dígito impar}

Determina e interpreta a) $A \cap B$

b) $A \cap B'$

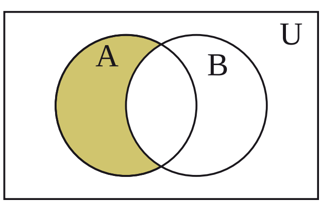
c) $A' \cap B$

d) $A' \cap B'$

Diferencia

La diferencia del conjunto A y el conjunto B, se denota A – B y es el conjunto formado por los elementos que están en A pero no están en B.

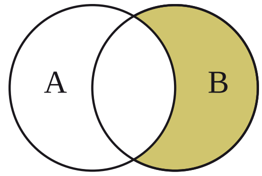
$$A - B = \{x/x \in A \text{ y } x \notin B\}$$



La región representa A – B

Asimismo,

$$B - A = \{ x/x \in B \text{ y } x \notin A\}$$



Actividad 2.1 c

Observa el resumen de regiones correspondientes a la intersección de un conjunto con su complemento.

a) ¿Con qué región coincide $A - B$?

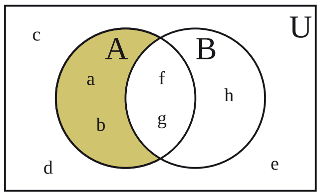
b) ¿Con qué región coincide $B - A$?

Ejemplo

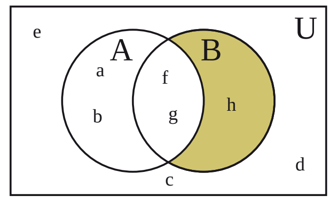
Sean los conjuntos: U = {a, b, c, d, e, f, g, h}, A = {a, b, f, g} y B = {f, g, h}

La diferencia A – B es: A – B = {a, b, f, g} – {f, g, h} = {a, b}

Asimismo: B – A = {f, g, h} – {a, b, f, g} = {h}



La región representa A – B

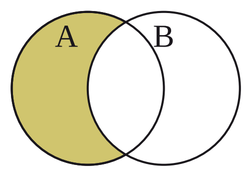


La región representa B – A

La operación "–" tiene un significado equivalente a una intersección.

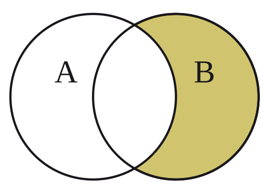
A – B significa "***sí*** A y ***no*** B"

$\boxed{A - B = A \cap B'}$



Asimismo B – A significa "***sí*** B y ***no*** A"

$\boxed{B - A = B \cap A'}$



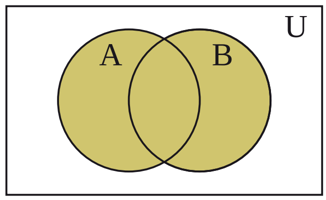
Actividad 2.1 d

Con los datos del ejemplo anterior, comprueba que $A - B = A \cap B'$, $B - A = B \cap A'$. Para ello, determina los elementos de $A \cap B'$ y $B \cap A'$ y compáralos con los de A – B y B – A respectivamente (dos conjuntos son iguales si tienen los mismos elementos, sin importar el orden).

Unión El conjunto de los elementos que pertenecen a A o a B o a los dos se llama **unión de A y B**; se le designa mediante **A** ∪ **B** y se define como:

A ∪ **B** = {x/x ∈ A o x ∈ B o ambas cosas a la vez}

El conjunto A ∪ B está representado en la región sombreada del siguiente diagrama:



La unión cumple con las siguientes propiedades

$$A \cup B = B \cup A$$

$$A \cup A = A$$

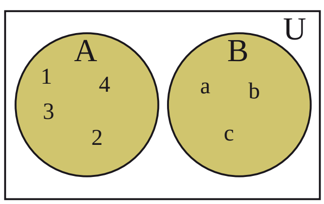
$$A \cup \phi = A$$

$$A \cup U = U$$

Ejemplos

1) Dados los conjuntos A = {1, 2, 3, 4} y B = {a, b, c} la unión de ambos será

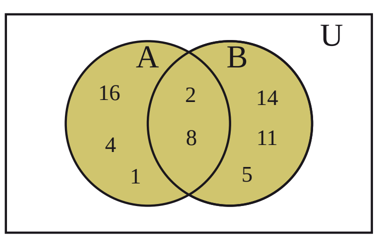
A ∪ B = {1, 2, 3, 4, a, b, c}



La región representa A ∪ B

2) Si A = {1, 2, 4, 8, 16} y B = {2, 5, 8, 11, 14} entonces

A ∪ B = {1, 2, 4, 5, 8, 11, 14, 16}   Los elementos comunes a ambos conjuntos no deben repetirse



La región representa A ∪ B

Leeremos ∪ como "o".

Ejemplos
(Cont.)

Por ejemplo, en los conjuntos ya estudiados

U = {x/x es un número dígito}

A = {x/x es dígito múltiplo de 2}

B = {x/x es dígito múltiplo de 3}

$A \cup B$ = {x/x es múltiplo de 2 **o** múltiplo de 3}

$A \cup B = \{2, 4, 6, 8\} \cup \{3, 6, 9\}$

$= \{2, 3, 4, 6, 8, 9\}$ → Son múltiplos de 2 **o** multiplos de 3

Actividad 2.1 e

1. Sean los conjuntos U = {x/x es número dígito}

   A = {x/x es número dígito primo}

   B = {x/x es número dígito impar}

   Determina e interprete

   a) $A \cup B$

   b) $A \cup B'$

   c) $A' \cup B$

   d) $A' \cup B'$

Operaciones con sucesos

Debido a que existe un paralelismo entre conjuntos y sucesos, podemos extender la terminología de los conjuntos, para describir sucesos.

Primero, realiza la siguiente actividad:

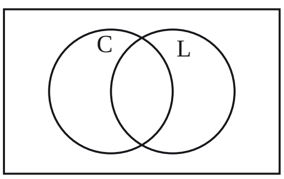
Actividad 2.1 f

Analiza las siguientes situaciones y contesta lo indicado.

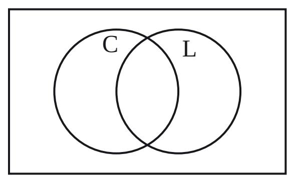
1) El señor Vega necesita recoger un paquete en la oficina de correos. Para realizar dicho trámite le piden como identificación credencial de elector ***o*** licencia de manejo.

¿Cuáles de las siguientes opciones tiene el señor Vega? (Señala en un diagrama de Venn la zona correspondiente a cada posibilidad).

a) Puede llevar la credencial.

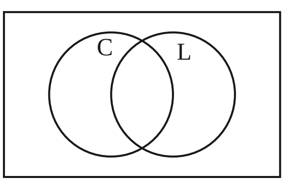


b) Puede llevar la credencial únicamente

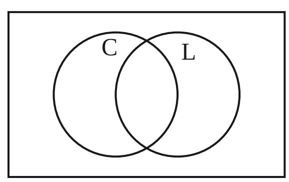


C indica credencial.
L indica licencia

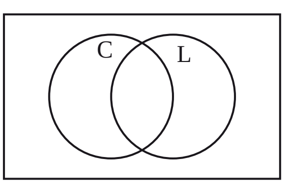
c) Puede llevar la licencia.



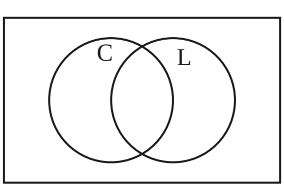
d) Puede llevar la licencia únicamente.



e) Puede llevar la credencial y la licencia.



Sombrea la parte del diagrama que “favorece” al señor Vega (licencia o credencial):



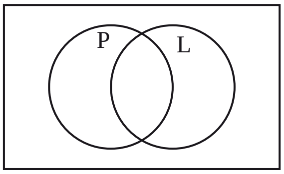
Plantea aquí tu respuesta:_____

____

____

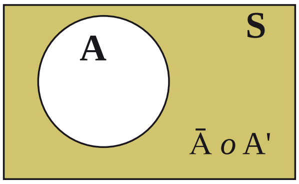
Actividad 2.1 f (Cont.)

2) Ahora, el señor Vega necesita comprar un automóvil en EEUU. Le piden como requisito pasaporte ***y*** licencia de manejo. ¿Cómo debe interpretarse el conectivo "***y***" al pedirle pasaporte ***y*** licencia? Señala en un diagrama la zona que favorece al señor Vega.

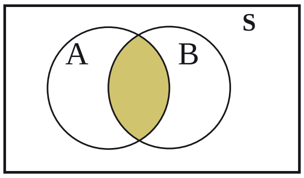


Ahora, procederemos a establecer la equivalencia entre conjuntos y sucesos (o eventos). Para ello, consideraremos como conjunto universal al espacio muestral correspondiente al experimento de interés.

El ***suceso complemento*** del suceso A, es el suceso constituido por todos los resultados de S que no están en A y se representa por Ā *o* A' . El complemento de A, equivale a la negación de A.



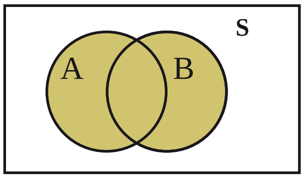
Intersección de dos sucesos A y B , es un suceso que ocurre si A ***y*** B se realizan simultáneamente (ambos). Esto se escribe: ***A*** ∩ B



Unión de dos sucesos A y B es un suceso que se realiza si A ***o*** B se realizan. Es decir, el suceso A ***o*** B, ocurre, si:

- Sucede A
- Sucede B
- Suceden ambos.

En términos de conjuntos se escribe: ***A*** ∪ B



A ***o*** B = ***A*** ∪ B significa:

- Al menos uno.
- Cualesquiera.

Actividad 2.1 g

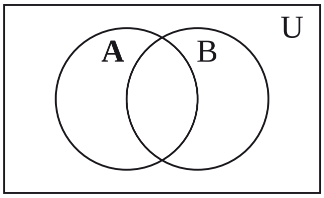
Contesta: ¿A qué operación entre sucesos corresponde cada una de las situaciones planteadas en la actividad (2.1 f)?______________________________________

Actividad 2.1 h

1) Sean los siguientes sucesos:

Suceso A = la gente de pelo castaño

Suceso B = la gente de ojos grises



a) Dibuja diagramas de Venn y sombrea los sucesos siguientes:

$A \cup B$ $\qquad$ $A \cap B'$ $\qquad$ $\bar{A}$

$A \cap B$ $\qquad$ $A' \cap B$ $\qquad$ $\bar{B}$

b) Interpreta con palabras cada uno de los sucesos combinados encontrados en a).

2. Hacer un diagrama de Venn en donde aparezca:

Universo: estudiante de la UAS:

Suceso P = estudiantes de preparatoria

Suceso I = estudiantes del Centro de Idiomas

Ahora, mostrar un diagrama que indique:

(a) Un estudiante está en P pero no en I

(b) Un estudiante no está en I

(c) Un estudiante no está en P

(d) Ni en P, ni en I

(e) En P, pero no en I

Ejercicio 2.1

1. Expresar los siguientes conjuntos, describiendo la propiedad de sus elementos (método de comprensión):

   1. A = {5, 10, 15, 20, 25, 30, 35}
   2. D = {7, 14, 21, 28}
   3. E = {Luna}
   4. F = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}

2. Expresar cada uno de los siguientes conjuntos enlistando sus elementos (método de extensión):

   1. L = {x/x es un planeta del sistema solar}
   2. M = {x/x es un número positivo múltiplo de 4 y menor que 20}
   4. Q = {x/x es dígito del sistema decimal}
   5. R = {x/x es un número entero y x + 2 = 0}
   6. S = {t / t es entero y $t^2 + 2t = 0$}

3. Dado el conjunto universal U= {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}, escribe cuatro subconjuntos que sean parte de él.

4. Sea el experimento de lanzar un dado. Considera como conjunto universal el conjunto de resultados posibles de este experimento y sean los siguientes sucesos:

   $A = \{x/x < 4\}$

   $B = \{x/x < 5\}$

   $C = \{x/x \text{ es par}\}$

   $D = \{x/x \text{ es impar}\}$

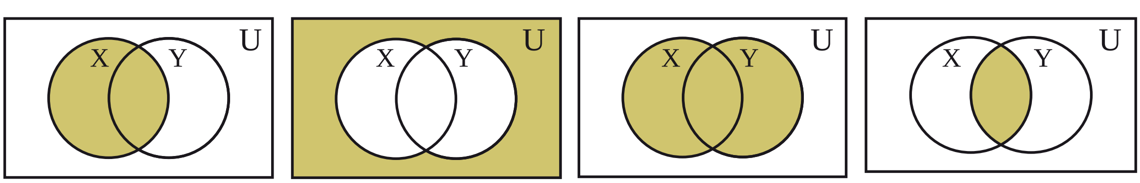
   Describe por extensión cada uno de los sucesos siguientes:

   a) $A \cup B$ b) $A \cap C$ c) $A \cap B$
   d) $(A \cup B)'$ e) $A \cap (B \cup C)$

5. Describe los sucesos que se representan mediante las zonas sombreadas de los cuatro diagramas de Venn de la figura, si:

   X indica que el señor López tiene credencial de elector y

   Y indica que la esposa del señor López tiene credencial de elector



Lección 2.2 Cálculo de probabilidades de sucesos compuestos. Uso de la regla de Laplace.

Objetivos: Determinar probabilidades condicionales utilizando el concepto de espacio muestral modificado.
Entender que los sucesos compuestos comprenden la realización de más de un suceso.

Los sucesos compuestos se forman al combinar dos o más eventos simples (o elementales). Los conectivos: "*y*", "*o*", se utilizan para combinar sucesos elementales. En esta lección asignarás probabilidades a los siguientes tipos de sucesos compuestos:

1. La probabilidad de que ocurra cualquiera de los sucesos *A o B*: *P*(*A o B*).
   En términos conjuntistas:
   $$P \;\; A \; o \; \mathrm{B}) = P\,(\mathrm{A} \cup \mathrm{B})$$
2. La probabilidad de que ocurra ambos sucesos *A y B*: *P(A y B).*
   En términos conjuntistas:
   $$P \; A \; \mathrm{y} \; \mathrm{B}) = P\,(\mathrm{A} \cap \mathrm{B})$$
3. La probabilidad de que ocurra un suceso únicamente: A *y* $\overline{\mathrm{B}}$:
   $$P \; A \; \mathrm{y} \; \overline{\mathrm{B}}) = P\,(\mathrm{A} \cap \overline{\mathrm{B}})$$
4. La probabilidad de que ocurra el suceso A dado que ocurrió el suceso *B:*
   P(A / B). Se lee: Probabilidad de *A* dado *B.*

Actividad 2.2 a

Qué hacer

Parte I

Estudia atentamente cada uno de los siguientes apartados:

Cuando tratamos con una situación incierta, esperamos que si se obtiene más información las probabilidades cambiarán. Alternativamente, podríamos decir que conforme se dispone de mayor información, se modifica el espacio muestral porque se excluyen algunos resultados. El siguiente ejemplo nos ilustrará lo antes planteado.

En un concurso participan tres personas, a cada una de ellas se les entrega una llave y sólo una de éstas encenderá un automóvil; cada persona prueba la llave y si no enciende se retira. José tiene la llave número 3. Consideremos las siguientes fases del concurso:

Actividad 2.2 a (Cont:)

- Al inicio del concurso, el espacio muestral consta de tres posibilidades:

$S = \{$  $\}$

P (gane José) $= \frac{1}{3}$

- A continuación la persona que tiene la llave 1 trata de encender el automóvil. Asumamos que éste no enciende. ¿Cuál es la probabilidad de que José gane?

Ahora, el espacio muestral se ha modificado: $S_{modificado} = \{$  $\}$

P (gane José, dado que el primero falló) $= \frac{1}{2}$

- Sigue la segunda persona y tampoco enciende el carro:

$S_{modificado} = \{$  $\}$

P (gane José, dado que falló el 1º y el 2º) $= \frac{1}{1} = 1$

Hemos calculado tres probabilidades para el mismo evento: "*gana José*".

Las últimas dos probabilidades contaron con información adicional, **son probabilidades condicionadas** (o condicionales).

Probabilidad condicional es la probabilidad con información adicional

Para designar la probabilidad de un evento B, condicionada a otro evento A, escribimos:

$P(B/A)$ Se lee: "**probabilidad de B, dado que ya ocurrió A**"

En el ejemplo anterior:

P (gane José / falló el 1º y el 2º) $= \frac{1}{2}$ Se lee: "*probabilidad de que gane José,* **dado que** *falló el 1º, es igual a* 1/2"

Asimismo,

P (gane José / falló el 1º y el 2º) $= 1$

El símbolo **P(B/A)** denota la probabilidad condicional de que el suceso B ocurra dada la información o condición de que el suceso A ocurre.

Similarmente:

P(A/B) denota la probabilidad condicional de que el suceso A ocurra dada la información o condición de que B ocurre.

Los siguientes ejemplos nos familiarizarán con este nuevo símbolo:

Ejemplos

1. Considera los sucesos:

   Ll: *"Lluvia"*
   N: *"Nubes"*

   - Simboliza el siguiente hecho: "*la probabilidad de lluvia dado que hay nubes es igual a 0.5*"
     Respuesta: $P(Ll / N) = 0.5$

   - Con estos mismos datos, interpreta la expresión:
     "La probabilidad de nubes, dado que hay lluvia es 1. Si llueve es seguro que hay nubes".
     Respuesta: $P(N / Ll) = 1$

2. Si lanzas una moneda al aire una vez, ¿qué significa *P*(*águila / sello*) = 0?

   Respuesta: *"La probabilidad de águila dado sello es cero. En un lanzamiento, no se puede obtener águila si ya sabemos que cayó sello"*.

3. Si se tira un dardo a la rueda de la figura, encuentra la probabilidad de obtener un número menor que 4, dado que se obtuvo un número par.

Respuesta:

Si ya se sabe que el dardo cayó en un número par, el espacio muestral ya no consta de 10 resultados; ahora, el espacio muestral incluye a aquellos resultados que sean números pares.

$$S_{\text{modificado}} = \{2, 4, 6, 8, 10\}$$

De aquí, nos interesan los resultados favorables al evento: *se obtiene un número menro que 4.*

Resultados favorables modificados = {2, 4}

Entonces: $P\,(\textit{menor que 4 / es par}) = \frac{2}{5}$

Actividad 2.2 a (Cont.)

Parte II

En la lección (2.1), al tratar con conjuntos, dentro de cada zona del diagrama de Venn repartíamos todos los elementos del conjunto universal.

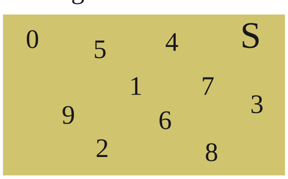
Por ejemplo, considera el experimento de elegir al azar un número dígito. Sean los sucesos:

a) I: se elige un número impar.
b) P: se elige un número primo.

Para construir el diagrama de Venn, enlistaremos cada elemento tanto del conjunto universal como de los sucesos indicados. Recordemos que al tratar con sucesos, el espacio muestral es el conjunto universal. Entonces:

Experimento:
elegir un número dígito $\xrightarrow{\text{Resultados posibles}}$ S = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}

Resultados posibles presentados en un diagrama de venn.



Estos elementos los repartimos con base en los sucesos I y P.

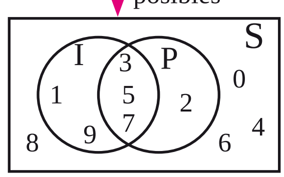
Primero, enlistamos los elementos de cada suceso

I = {1, 3, 5, 7, 9}
P = {2, 3, 5, 7}

A continuación determinamos I ∩ P

I ∩ P = {1, 3, 5, 7, 9} ∩ {2, 3, 5, 7}
= {3, 5, 7}

Repartimos los resultados posibles



Para el cálculo de probabilidades, estamos interesados en la cardinalidad de cada zona del diagrama. Entonces, *en vez de repartir los elementos, se reparten dichas cardinalidades*, tal y como se muestra a continuación:

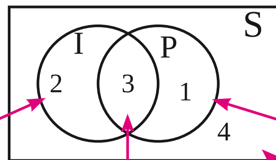
Actividad 2.2 a (Cont.)

En el ejemplo que estamos estudiando, tenemos que:

$n\,(S) = 10$
$n\,(I) = \;\; 5$
$n\,(P) = \;\; 4$
$n\,(I \cap P) = 3$

$\boldsymbol{n\,(S)} = 10$

Repartimos el 10, a partir de:
$n\,(I \cap P) = 3$



$n\,(I) \; - n\,(I \cap P) = 5 - 3 = 2$

$n\,(P) \; - n\,(I \cap P) = 5 - 4 = 1$

$n\,(I \cap P) = 3$

$10 - (2 + 3 + 1) \; = 10 - 6 = 4$

Estamos ya en condiciones de calcular probabilidades de sucesos compuestos aplicando la regla de Laplace.

Aplicación de la regla de Laplace

Puesto que conocemos las cardinalidades de los sucesos, simplemente aplicamos la fórmula de Laplace: $P\,(A) = \dfrac{n(A)}{n(S)}$

Ejemplo

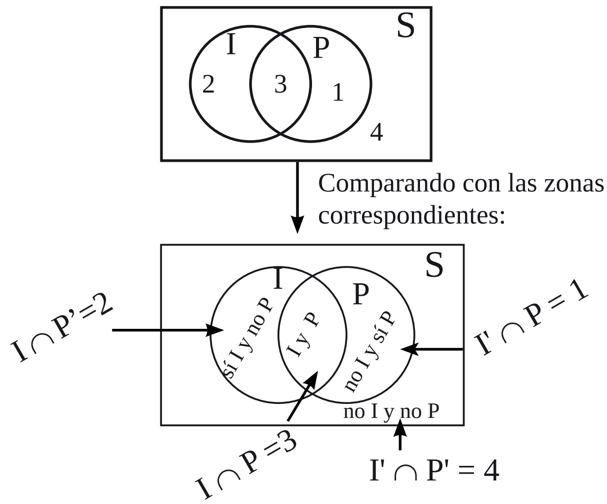
En el experimento de seleccionar un dígito al azar, calcular la probabilidad de seleccionar:

a) Un número impar.
b) Un número primo.
c) Un número impar que no sea primo.
d) Un número primo que no sea impar.
e) Un número que no sea ni impar, ni primo.
f) Un número que sea impar y primo.
g) Un número que sea impar o primo.
h) Un número que no sea impar.
i) Un número primo, si se sabe que, el número seleccionado es impar.

Ejemplo
(Cont.)

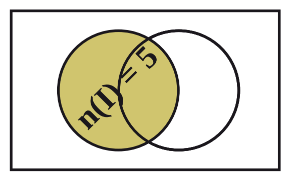
Solución

El experimento y los sucesos involucrados son los mismos que acabamos de analizar. Por tanto, retomamos el diagrama de Venn que tiene cardinalidades.



a) P (número impar) = P(I):

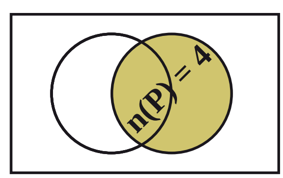
***n* (*S*)** = 10



$$P\,(I) = \frac{n(I)}{n(S)} = \frac{5}{10} = 0.5$$

b) P (número primo) = *P(P)*:

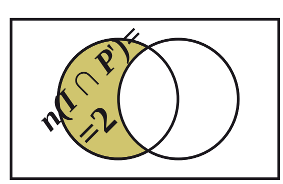
***n* (*S*)** = 10



$$P\,(P) = \frac{n(P)}{n(S)} = \frac{4}{10} = 0.4$$

c) P (impar que no sea primo) = *P*(I ∩ P'*)*:

***n* (*S*)** = 10

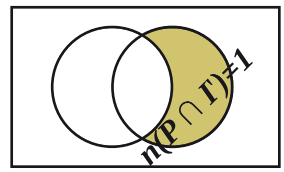


$$P\,(\mathrm{I} \cap P') = \frac{n(I \cap P')}{n(S)} = \frac{2}{10} = 0.2$$

Ejemplo
(Cont.)

d) P (primo que no sea impar) = $P(P \cap I')$:

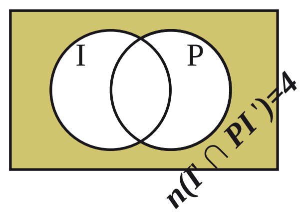
$n\ (S) = 10$



$$P\ (P \cap I\,') = \frac{n(P \cap I\,')}{n(S)} = \frac{1}{10} = 0.1$$

e) P (ni impar, ni primo) = $P(I' \cap P')$:

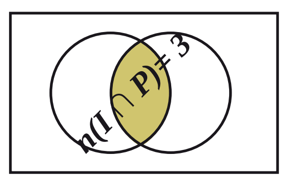
$n\ (S) = 10$



$$P\ (I' \cap P') = \frac{n(I' \cap P')}{n(S)} = \frac{4}{10} = 0.4$$

f) P (impar y primo) = $P(I \cap P)$:

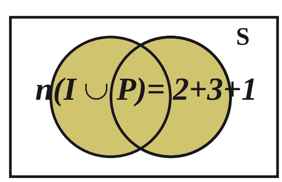
$n\ (S) = 10$



$$P\ (I \cap P) = \frac{n(I \cap P)}{n(S)} = \frac{3}{10} = 0.3$$

g) P (impar o primo) = $P(I \cup P)$:

$n\ (S) = 10$

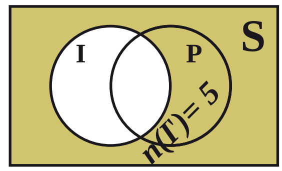


$$P\ (I \cup P) = \frac{n(I \cup P)}{n(S)} = \frac{2+3+1}{10} = \frac{6}{10} = 0.3$$

Ejemplo
(Cont.)

h) P (no impar) = $P(I')$:

$\boldsymbol{n\ (S)} = 10$

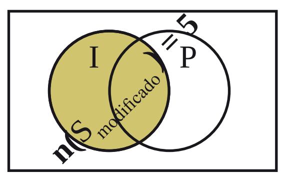


$$P\ (I') = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$$

i) P (Primo, dado que es impar) = P(P / I):

Si ya se sabe que el número es impar, *el espacio muestral ya no consta de toda la zona correspondiente al espacio muestral original*. Ahora, el espacio muestral incluye a aquellos resultados que sean números impares.

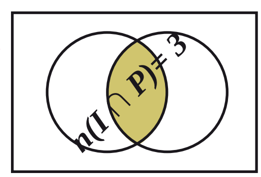
$S_{modificado} = \{1, 3, 5, 7, 9\}$



De aquí, nos interesan los resultados favorables al evento: *se obtiene un número primo.*

Resultados favorables modificados = {3, 5, 7}

Coincide con la intersección



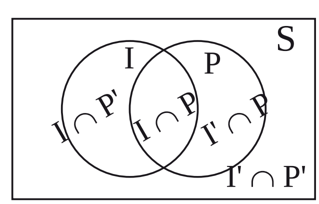
Entonces:

$$P\ (P\ /\ I) = \frac{n(P \cap I)}{n(S_{modificado})} = \frac{3}{5}$$

Actividad 2.2 b

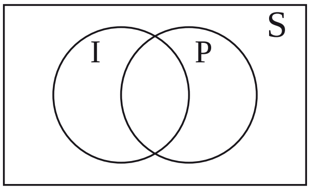
a) Recuerda que P(S) = 1. Ahora, puesto que el espacio muestral S se ha dividido de tal manera que: S = {I ∩ P', I ∩ P, I' ∩ P, I' ∩ P'}, debe cumplirse que:

$$P(S) = P(I \cap P') + P(I \cap P) + P(I' \cap P) + P(I' \cap P') = 1$$



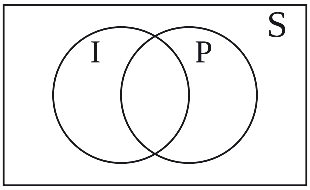
Actividad 2.2 b

b) El diagrama de Venn con dos conjuntos que tienen elementos en común, presenta 4 regiones. Utilizando los datos del ejemplo que estamos estudiando, anota en cada región la probabilidad que le corresponde.



¿Cuánto suman las probabilidades de las cuatro regiones?___

c) Ahora, anota las probabilidades de cada región expresadas en porcentaje.



¿Cuánto suman las probabilidades de las cuatro regiones?___

d) Utilizando estos datos, calcula las probabilidades de los siguientes sucesos:

1) P(*no P*) = ______
2) P(*I* / *P*) = ____

Ejercicio 2.2

1. En una entrevista efectuada por teléfono se encontró que 77 personas prefieren un producto A, 44 un producto B y 13 tanto A como B. ¿Cuántas personas prefieren por lo menos uno de estos productos?

2. Al entrevistar a 100 familias, se observó que 75 de ellas tenían suscripción al periódico El Debate, 55 al Noroeste y 10 a ninguno de ellos. ¿Cuántas familias están suscritas a ambas?

3. De 120 estudiantes, 60 estudian idioma francés, 50 estudian ruso y 20 estudian ruso y francés. Si escoge un estudiante aleatoriamente, hallar la probabilidad de que:
   a. Estudie francés y ruso
   b. Estudie francés o ruso
   c. No estudie ni francés, ni ruso.
   d. Estudie francés si se sabe que estudió ruso.
   e. Estudie ruso si se sabe que estudió francés.

4. Entre los 200 empleados de un departamento hay 150 graduados, 60 del total dedican por lo menos parte de su tiempo a trabajos de estadística y 40 de los 150 graduados dedican por lo menos parte de su tiempo a trabajos de estadística. Si se toma al azar uno de estos empleados:
   a) ¿Cuál es la probabilidad de que no sea graduado y no trabaje en estadística?
   b) ¿Cuál es la probabilidad de que trabaje en estadística si se sabe que es graduado?

5. En cierta ciudad, el 40% de la población tiene el cabello castaño; el 20% tiene los ojos negros y el 5% tiene los ojos negros y el cabello castaño. Se escoge una persona al azar, halle la probabilidad de que:
   a. Tenga el cabello castaño o los ojos negros
   b. Tenga el cabello castaño pero no los ojos negros
   c. No tenga el cabello castaño, ni los ojos negros.
   d. Tenga los ojos negros dado que tiene el cabello castaño.

6. Al tirar un dado, calcule la probabilidad de que:
   a. No se obtenga el 6
   b. No salga ni 1, ni 6
   c. Que salga el 1 o el 3

7. De 100 empleados de una compañía, 70 son casados, 80 son graduados y 60 son ambas cosas. Calcule la probabilidad de que si se selecciona una persona al azar de dicho grupo, ésta sea:
   a. casada y no graduada
   b. no casada
   c. soltera y no graduada

Lección 2.3 La regla del complemento

Objetivos: Entender y ser capaz de aplicar la regla del complemento

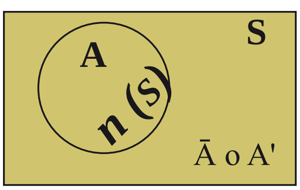
En la lección (2.2), calculaste probabilidades de sucesos compuestos aplicando la regla de Laplace. Ahora, estableceremos algunas reglas de probabilidades que son aplicables para este tipo de sucesos. Antes, estudiaremos la regla del complemento y continuaremos con la regla de la adición, regla de la probabilidad condicional y regla del producto de probabilidades.

Actividad 2.3 a

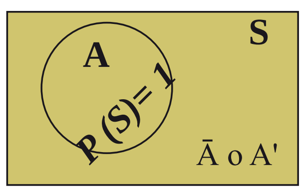
Qué hacer

Estudia atentamente:

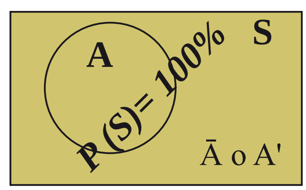
En un diagrama de Venn, todo el rectángulo representa el unverso de posibilidades que tiene el experimento aleatorio en cuestión. Es decir, el diagrama de Venn representa el "*todo*". Este "*todo*" o universo, puede representarse de tres maneras equivalentes, a saber:



El número total de resultados posibles es *n(S)*.



La suma de probabilidades de todos los resultados de *S* es 1.

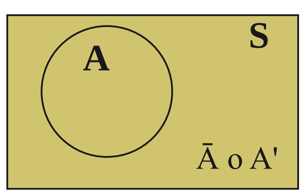


La suma de probabilidades de todos los resultados de *S* es 100%.

Si consideramos un experimento con un sólo suceso llamado *A*, entonces, un espacio muestral puede estar formado por dicho suceso y su complemento:

$$S = \{A, \bar{A}\}$$

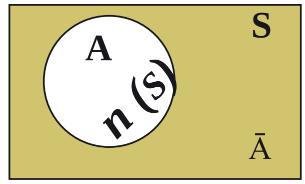
Representado en un diagrama:



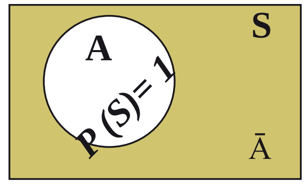
Actividad 2.3 a (Cont.)

Podemos establecer que:

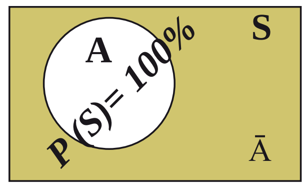
$$n(A) + n(\bar{A}) = n(S)$$



$$P(A) + P(\bar{A}) = 1$$



$$P(A) + P(\bar{A}) = 100\%$$



Eligiendo la segunda expresión se concluye que:

$$\boxed{P(\bar{A}) = 1 - P(A)}$$

Esta regla puede enunciarse así: Si A es un suceso, la probabilidad de la *no ocurrencia de A*, denotada como $P(\bar{A})$ es igual a: 1 menos la probabilidad de ocurrencia de A.

Más adelante, aplicaremos esta fórmula cuando sea más fácil o más práctico calcular $P(\bar{A})$ en vez de *P(A)*. Ésto sucede, cuando se pregunta por la probabilidad de "*por lo menos uno*" o "*al menos uno*". Por el momento, la aplicaremos simplemente para calcular la probabilidad del no ocurrencia de un suceso.

Ejemplos

1) Al lanzar un dado, ¿cuál es la probabilidad de obtener un número *distinto de tres*?

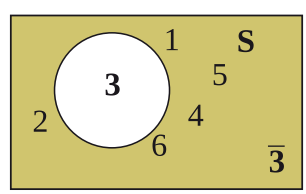
Solución

Como ya sabemos el, espacio muestral es:

$$S = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$$

Distino de 3, es equivalente a "*no cae 3*".

Además, "*no cae 3*" es complemento de "*cae 3*".



Si representamos con $\bar{3}$ al suceso "*no cae 3*", tenemos que:

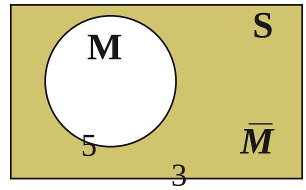
$$P(\bar{3}) = 1 - P(3) = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$$

Ejemplos

2) En una reunión del consejo técnico de una escuela, formado por 8 integrantes, asistieron 5 mujeres, 4 profesores y el director. ¿Cuál es la probabilidad de seleccionar al azar:

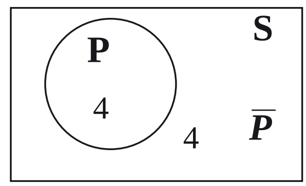
   a. ¿A un hombre?
   b. ¿A un integrante que no sea profesor
   c. ¿A un integrante que no sea el director?

Solución



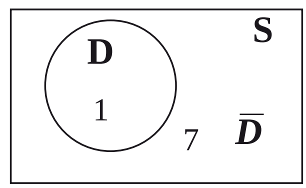
a. Seleccionar a un "*hombre*" es un suceso complementario de seleccionar a una *mujer*.

$$P(hombre) = \mathrm{P}(\bar{M}) = 1 - P(M) = 1 - 5/8 = 3/8$$



b. Seleccionar a un "*no profesor*" es un suceso complementario de seleccionar a un *profesor.*

$$P(no\ profesor) = P(\bar{P}) = 1 - P(P) = 1 - 4/8 = 4/8 = 1/2$$



c. Seleccionar a un "*no director*" es un suceso complementario de seleccionar a un *director.*

$$P(no\ director) = P(\bar{\mathrm{P}}) = 1 - P(P) = 1 - 1/8 = 7/8$$

Ejercicio 2.3

1. En un lote de 20 televisores hay 3 defectuosos.
   a. Si D representa el suceso "*se secciona un televisor defectuoso*", ¿qué representa $\bar{\mathrm{D}}$?
   b. ¿Cuál es la probabilidad de seleccionar al azar un televisor *no defectuoso*?

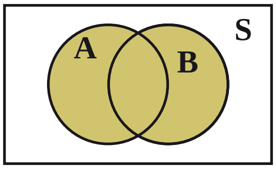
2. En un departamento de almacenes, existen 40 empleados: un supervisor, 6 almacenistas y 33 auxiliares. Determina la probabilidad de seleccionar al azar a un empleado que:
   a. No sea el supervisor.
   b. No sea almacenista
   c. No sea auxiliar.

3. Al extraer una carta de una baraja americana calcular:
   a. $P(no\ as)$
   b. $P(no\ diamante)$

Lección 2.4 Cálculo de probabilidades de sucesos compuestos. Uso de la regla de la adición de probabilidades.

Objetivos: Calcular probabilidades de sucesos compuestos usando la regla de la adición.
Entender, describir y determinar sucesos mutuamente exluyentes.

En esta lección, desarrollaremos una fórmula para calcular probabilidades del suceso *A* **o** *B* = $A \cup B$. Recuerda que este suceso es favorecido por la siguiente región sombreada:



Recuerda también que, el suceso *A* **o** *B* = $A \cup B$, *ocurre* si:

- Sucede A
- Sucede B
- Suceden ambos.

Entonces, A ***o*** B = $A \cup B$ se aplica cuando se pida la probabilidad de que ocurra:

- Al menos uno,
- Alguno de los dos.
- Cualesquiera.

Actividad 2.4 a

Qué hacer

Aplicando lo que ya conoces sobre sucesos compuestos, resuelve:

De los estudiantes de nuevo ingreso a la universidad el año pasado, el 12% reprobó inglés, 16% reprobó matemáticas y el 6% reprobó inglés y matemáticas. Se elige un alumno al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que haya reprobado inglés o matemáticas?

Las siguientes preguntas pueden servirte de ayuda.

- ¿En qué consiste el experimento?______________________________
- ¿De qué sucesos se trata?__________________________________
- ¿Qué datos presenta el problema?_____________________________
- ¿Cuál es la incógnita?____________________________________

Tal y como lo estudiaste en la lección (2.2), este tipo de problemas, pueden resolverse con la ayuda de diagramas de Venn, aplicando el siguiente procedimiento:

1. Describe el experimento identificando los eventos involucrados y asígnales una letra mayúscula.
2. Identifica los datos y la incógnita.
3. Construye un diagrama de Venn (recuerda que si conocemos el valor correspondiente a la intersección ésta se localiza primero y posteriormente se completan las distintas regiones).
4. Identifica las regiones que favorecen al evento de interés y aplica la fórmula de la probabilidad clásica.

A continuación aplicaremos este procedimiento para resolver el problema planteado en la activisdad (2.4 a)

Primero: Describe el experimento, identificando los eventos involucrados. Este experimento consiste en elegir un alumno; hay dos eventos involucrados:

Reprobó inglés, reprobó matemáticas

Sea: M el evento: "reprobó matemáticas" e

I el evento: "reprobó inglés"

Segundo: Identifica los datos y la incógnita

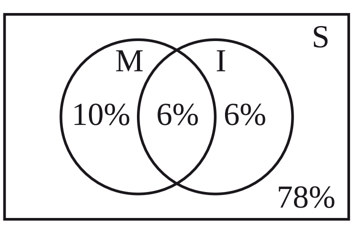
$P(M) = 16\%$

$P(I) = 12\%$

$P(M \cap I) = 6\%$

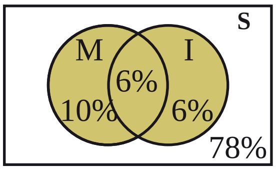
La incógnita es: $P(M \text{ o } I) = P(M \cup I)$

Tercero: Dibuja el diagrama de Venn



Cuarto: Evento de interés: $M \text{ o } I = M \cup I$

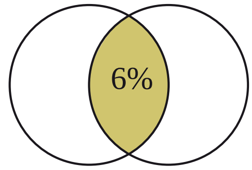
$P(M \text{ o } I) = P(M \cup I) = 10\% + 6\% + 6\% = 22\%$



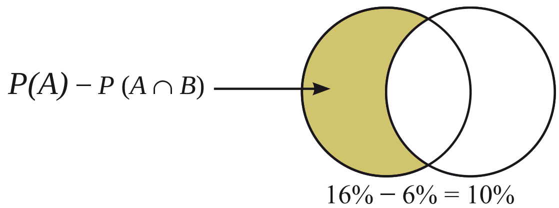
Regla de la adición de probabilidades

La manera de dibujar el diagrama de Venn en el último ejemplo, nos permitirá deducir una regla para la adición de probabilidades:

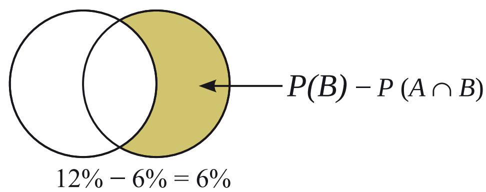
1.- Se localiza $P\,(A \cap B)$



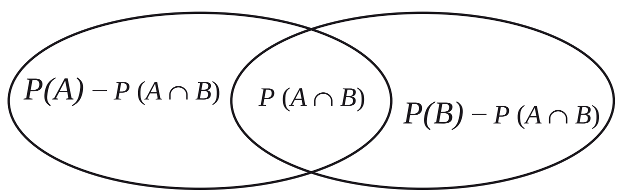
2.- Se localiza la parte izquierda de A evaluando: $P(A) - P\,(A \cap B)$



3.- Se localiza la parte derecha de B evaluando: $P(B) - P\,(A \cap B)$



Resumiendo, estas regiones pueden marcarse del siguiente modo:



De aquí: $P(A \cup B) = P(A) - \cancel{P\,(A \cap B)} + \cancel{P\,(A \cap B)} + P(B) - P\,(A \cap B)$

$$\boxed{P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P\,(A \cap B)}$$

Esta es la regla de la adición de probabilidades.

La fórmula de la adición de probabilidades, se aplica en los siguientes casos:

- Probabilidad de que suceda A o B.
- Probabilidad de que suceda al menos uno.
- Probabilidad de que suceda cualesquiera de ellos.

Debemos entender que estas tres expresiones se refieren a la misma situación matemática:

A *o* B equivale a $A \cup B$

La aplicación de la regla de adición, nos permite simplificar el procedimiento de cálculo.

Ejemplo La probabilidad de que el equipo A gane su primer juego de básquetbol es 1/2, y la probabilidad de que gane su segundo juego es 1/3. ¿Cuál es la probabilidad de que gane por lo menos uno de sus primeros dos juegos, si la probabilidad de que gane ambos es 1/6?

Solución

Eventos involucrados:

A gana el primer juego. Sea P este evento.
A gana el segundo juego. Sea S este evento.

Se pide: probabilidad de que gane por lo menos uno de sus primeros dos juegos.

$$P\,(P \text{ o } S) = P\,(P \cup S) = \,?$$

Datos:

$$P\,(P) = \frac{1}{2}$$

$$P\,(S) = \frac{1}{3}$$

$$P\,(P \text{ y } S) = \frac{1}{6}$$

Aplicando la fórmula de la adición:

$$P\,(P \cup S) = P\,(P) + P(S) - P\,(P \cap S)$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6}$$

$$= \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

Actividad 2.4 b

Resuelve:

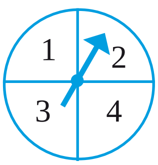
1. En una clase de 50 alumnos de primer año, 30 estudiaron Word, 15 Excel y 5 estudiaron ambos programas. ¿Cuántos alumnos de primer año estudiaron algún programa de computación?

2. Los nuevos juegos de TV vídeo que pueden ser adaptados al aparato televisor tienen sonido e imagen. Se ha estimado que la probabilidad de que el sonido sea defectuoso es de 0.03, que la probabilidad de que uno u otro salgan defectuosos (sonido o imagen) es de 0.04, pero la probabilidad de que ambos salgan defectuosos es de sólo 0.01. ¿Cuál es la probabilidad de que la imagen salga defectuosa?

Sucesos o eventos mutuamente excluyentes.

La regla de la adición sufre un cambio cuando tratamos con eventos mutuamente exluyentes. A continuación desarrollaremos este concepto.

Al afirmar que la probabilidad de un suceso compuesto es igual a la suma de las probabilidades de los resultados que lo componen, estamos usando el hecho de que, tales resultados, se excluyen mutuamente en el sentido de que *si ocurre uno, no ocurre ningún otro.*



Por ejemplo, al girar la flecha de la ruleta anexa, la probabilidad de *obtener un número par*, puede verse como la ocurrencia del suceso compuesto:

"Se detiene en 2 ó *se detiene en 4"*

Si llamamos P al suceso se obtiene un número par, D se detiene en 2 y C se detiene en 4, entonces:

P(se obtiene un par) = $P(P) = P(D$ **ó** $C) = P(D \cup C)$

Aplicando la regla de la adición:

$$P(P) = P(D) + P(C) - P(D \cap C)$$

P(se obtiene un par) = $P(P) = P(D$ **ó** $C) = P(D \cup C)$

Con lo que ya sabemos obtenemos: $P(D) = 1/4$, $P(C) = 1/4$. Pero, ¿cuánto vale $P(D \cap C)$? En otras palabras, ¿cuál es la probabilidad de que ocurran D *y* C? *o ¿Cuál es la probabilidad de obtener un dos y un cuatro simultáneamente?* Razonamos de la siguiente manera:

Si la flecha se detiene en 2, no puede detenerse al mismo tiempo en 4.

Entonces: $P(D \cap C) = 0$

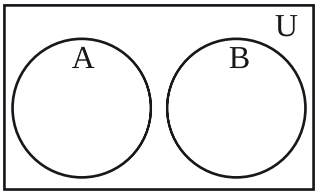
Sustituyendo en la fórmula de la adición:

$$\begin{aligned} P(P) &= P(D) + P(C) - P(D \cap C) \\ &= 1/4 + 1/4 + 0 \\ &= 2/4 \\ &= 1/2. \end{aligned}$$

Los sucesos D y C se llaman mutuamentem exluyentes.

Sucesos o eventos mutuamente excluyentes, son aquellos definidos de tal manera que la ocurrencia de un suceso imposibilita la ocurrencia del otro suceso. Es decir, si sucede uno de ellos, el otro no puede ocurrir.

¿Cómo interpretar ésto en un diagrama de Venn?



Si $A \cap B = \phi$ entonces A y B son mutuamente excluyentes.

Si A y B son eventos mutuamente excluyentes, la fórmula de la adición se simplificará, porque:

$$P\,(A \cap B) = \frac{n(A \cap B)}{n(S)} = \frac{0}{n(S)} = 0$$

Por lo tanto:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

Fórmula de la adición para suceso mutuamente exscluyentes.

En problemas prácticos, diremos que $A \cap B = \phi$ si concluimos que, si sucede A, no sucederá B. Nunca suceden A y B al mismo tiempo.

Ejemplo

Se lanza un dado, ¿cuál es la probabilidad de que salgan 3 ó 5 puntos?

Solución

El evento de interés, es una composición de dos eventos: *salen 3 puntos o salen 5 puntos.*

Sean: A: el evento "salen 3 puntos"
B: el evento "salen 5 puntos"

Se pide: $P(A \text{ o } B)$

$$P(A) = P\,(\text{sale un } 3) = \frac{1}{6}$$

$$P(B) = P\,(\text{sale un } 5) = \frac{1}{6}$$

$$P(A \text{ o } B) = P\,(A) + P(B) - P\,(A \cap B)$$

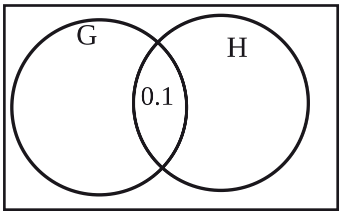
¿$P\,(A \cap B) = 0$? Si salen 3 puntos, no pueden salir al mismo tiempo 5 puntos. A y B son mutuamente excluyentes.

Por lo tanto: $P(A \text{ o } B) = P(3 \text{ ó } 5) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

Ejercicio 2.4

1. *Si P(G)* = 0.5, *P(H)* = 0.4 y *P(G* y *H*) = 0.1:

   a. Completa el diagrama de Venn:



   b. Determina: $P(G \cap H)$.
   c. Determina: $P(G \cup H)$.
   d. ¿Son mutuamente excluyentes los sucesos G y H? Explique su respuesta.

2. Describe con tus propias palabras qué significa que dos sucesos sean mutuamente excluyentes.

3. De 120 estudiantes, 60 estudian idioma francés, 50 estudian ruso y 20 estudian ruso y francés. Si escoge un estudiante aleatoriamente, hallar la probabilidad de que:
   a. Estudie francés y ruso
   b. Estudie francés o ruso

4. Entre los 200 empleados de un departamento hay 150 graduados, 60 del total consagran por lo menos parte de su tiempo a trabajos de estadística y 40 de los 150 graduados dedican por lo menos parte de su tiempo a trabajos de estadística. Si se toma al azar uno de estos empleados, ¿cuál es la probabilidad de que sea graduado o trabaje en estadística?

5. En cierta ciudad, el 40% de la población tiene el cabello castaño; el 20% tiene los ojos negros y el 5% tiene los ojos negros y el cabello castaño. Se escoge una persona al azar, halle la probabilidad de que: tenga el cabello castaño o los ojos negros

6. Al tirar un dado, calcule la probabilidad de que:
   a. Que salga el 1 ó el 3
   b. Que salga par o menor que 4.
   c. Que salga el 1 ó el 3

Lección 2.5 Cálculo de probabilidades de sucesos compuestos. La regla de la probabilidad condicional y regla de multiplicación.

Objetivos: Calcular probabilidades condicionadas.
Calcular probabilidades de sucesos compuestos usando la regla de la multiplicación.
Calcular probabilidades de sucesos compuestos usando la regla de la multiplicación para sucesos independientes.

En la lección (2.2), se introdujo el concepto de probabilidad condicional. También se utilizó el espacio muestral modificado para calcular algunas probabilidades condicionales. Ahora, estudiaremos una fórmula para calcular probabilidades condicionales. Esta regla, aparentemente no tiene ventaja sobre el método que utiliza espacios muestrales modificados, sin embargo, nos permite avanzar hacia otras cuestiones de interés como la regla de multiplicación, la cual estudiarás más adelante. Primero, debes recordar la notación de la probabilidad condicional. Para ello, realiza la siguiente actividad:

Actividad 2.5 a

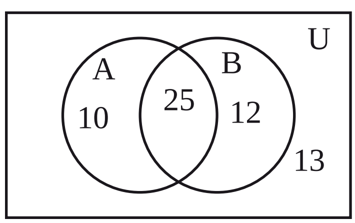
Qué hacer

a) Lee atentamente:

En un grupo de tercer año de preparatoria hay 60 estudiantes: 35 asisten regularmente, 37 están aprobados, 25 asisten regularmente y están aprobados.

b) Ahora, analiza el diagrama de Venn que corresponde a esta información:

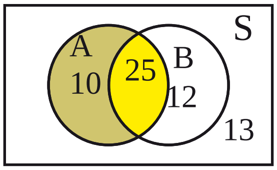
Sean: A: el suceso "*asiste regularmente*".
B: el suceso "*está aprobado*".



c) Lee las siguientes notaciones de probabilidades condicionadas y determina sus valores. Utiliza el concepto de espacio modificado.

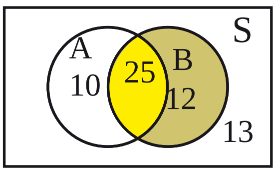
Actividad 2.5 a (Cont.)

1. *P(B/A)* Probabilidad de que esté aprobado, dado que asista regularmente.______

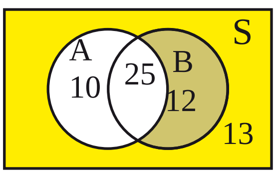


A: el suceso "*asiste regularmente*".
B: el suceso "*está aprobado*".

2. *P*(*A/B*) Probabilidad de que asista regularmente, dado que está aprobado______

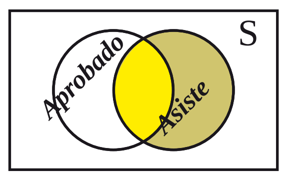


3. *P*(*B* / Ā) Probabilidad de que esté aprobado, dado que no asiste regularmente___



d) Los enunciados que se refieren a probabilidades condicionales, se pueden presentar de distintas maneras. Analiza los enunciados equivalentes a la siguiente probabilidad condicional:

P(Aprobado/asiste regularmente) =71%



*S*e puede leer de las siguientes maneras:

- Probabilidad de que esté aprobado, dado que asiste regularmente es de 71%.
- De los que asisten regularmente, el 71% está aprobado.
- Si asiste regularmente, hay 71% de probabilidad de que esté aprobado.
- La probabilidad de que uno cualquiera de los que asisten regularmente, esté aprobado es de 71%.
- El 71% de los que asisten regularmente, está aprobado.
- La probabilidad de que esté aprobado, uno cualquiera de los que asisten regularmente es 71%.
- De aquellos que asisten regularmente, el 71% está aprobado.

e) Analiza detenidamente el siguiente esquema y relaciónalo con cada uno de los enunciados anteriores.

P (*Aprobado* / *asiste regularmente*)

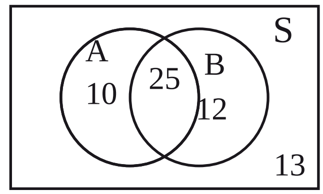
Consecuencia   Condición o universo reducido

Fórmula de la probabilidad conicional (o condicionada)

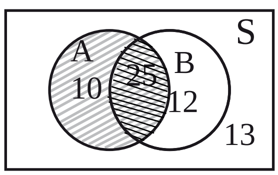
Utilizaremos el ejemplo de la actividad (2.5 a) para obtener la fórmula de la probabilidad condicional.

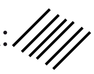
En un grupo de tercer año de preparatoria hay 60 estudiantes: 35 asisten regularmente, 37 están aprobados, 25 asisten regularmente y están aprobados. ¿Cuál es la probabilidad de que esté aprobado, dado que asiste regularmente?

Sean: A: el suceso "*asiste regularmente*".
B: el suceso "*está aprobado*".



Recordemos que, decir: "*esté aprobado dado que asiste regularmente, reduce el espacio muestral original de 60 estudiantes a 35, que son los que asisten regularmente*".De estos 35, 25 están aprobados.



La región rayada:  es el pacio muestral reducido o modificado ($S_{modificado}$)

De esta región, la zona:  favorece al suceso "*está aprobado*".

Entonces, la probabilidad de que esté aprobado, dado que asista regularmente, es:

$$P\,(B/A) = \frac{n(A \cap B)}{n(S_{modificado})} = \frac{25}{35} = \frac{5}{7}$$

La fórmula de la probabilidad condicional, se obtiene a partir de la expersión:
$P\,(B/A) = \dfrac{n(A \cap B)}{n(S_{modificado})}$ al realizar los siguientes pasos:

En primer lugar, observamos que: $n(S_{modificado}) = n(A)$

Por tanto,

$$P\,(B/A) = \frac{n\;B \cap A)}{n(A)}$$

Dividiendo esta última expresión entre $n(S)$:

$$P\,(B/A) = \frac{n\;B \cap A)}{n(A)} = \frac{\dfrac{P(B \cap A)}{n(S)}}{\dfrac{n(A)}{n(S)}} = \frac{P(B \cap A)}{P(A)}$$

Ésta es la fórmula de la probabilidad condicional:

$$P\,(B\,/\,A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)}$$

De manera similar, si queremos encontrar *P(A/B)*, escribimos:

$$P\,(A\,/\,B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Estudia con mucha atención los siguientes ejemplos:

Ejemplos

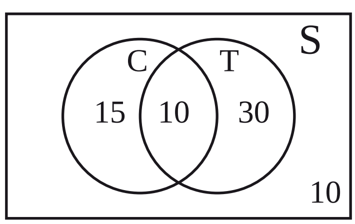
a) En una oficina hay 65 empleados, de los cuales 25 son casados y 40 están titulados; además, 10 son casados y están titulados. Si se selecciona un empleado al azar, ¿cuál es la probabilidad de que sea titulado uno cualquiera de los casados?

Solución

Para resolver el problema, debes identificar el universo o población, y sucesos involucrados.

Población: 65 empleados

Sucesos involucrados: Casados C: 25, por lo tanto, $n(C) = 25$
Titulados T: 40, por lo tanto, $n(T) = 40$
10 son casados y están titulados: C y T : 10
$n\,(C \cap T) = 10$



$$P\,(C) = \frac{25}{65} = \frac{5}{13}$$

$$P\,(T) = \frac{40}{65} = \frac{8}{13}$$

$$P\,(T \cap C) = \frac{10}{65} = \frac{2}{13}$$

Se pide:

P(titulado, uno cualquiera de los casados):

$$P\,(T\,/\,C) = \frac{P(T \cap C)}{P(C)} = \frac{2/13}{5/13} = \frac{2}{5}$$

Ejemplos (Cont.)

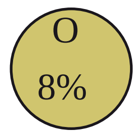
b) En una escuela, el 20% de los alumnos tiene vista defectuosa, el 8% tiene oído defectuoso y el 4% tiene vista y oído defectuoso. ¿Cuál es la probabilidad de que un niño tenga oído defectuoso si sabemos que tiene vista defectuosa?

Solución

...el 20% de los alumnos tiene vista defectuosa:

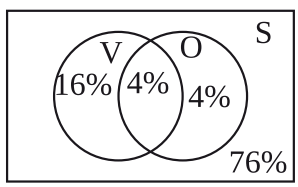
V: *vista defectuosa*

El 8% tiene oído defectuoso:



O: oído *defectuoso*

y el 4% tiene vista y oído defectuoso:



V y O: *vista y oído defectuoso*

Probabilidad de que un alumno tenga oído defectuoso, si sabemos que tiene vista defectuosa: *P(O / V)*

Aplicando la fórmula de la probabilidad condicional:

$$P\,(O\,/\,V) = \frac{P(O \cap V)}{P(V)} = \frac{4\%}{20\%} = \frac{1}{5}$$

Actividad 2.5 b

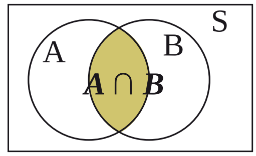
Utilizando los datos del ejemplo (b) anterior, determina:

1) La probabilidad de que un alumno tenga vista defectuosa, si sabemos que tiene oído defectuoso.
2) La probabilidad de que un alumno tenga oído defectuoso, si sabemos que no tiene vista defectuosa.
3) La probabilidad de que un alumno tenga vista defectuosa, si sabemos que no tiene oído defectuoso.

Regla de multiplicación de probabilidades

La ocurrencia conjunta de dos o más sucesos, se presenta con la ocurrencia simultánea de dichos sucesos.

A y $B = A \cap B$ significa que ocurren ambos sucesos simultáneamente.



Observa que, mientras *A* representa a un suceso simple, $A \cap B$ es un suceso conjunto. Un suceso conjunto, compuesto por *A* y *B*, significa que tanto el suceso *A* como el *B* tienen que ocurrir en forma simultánea. La probabililidad *P(A)* se llama **probabilidad simple** y la probabilidad *P(A∩B)* se llama **probabilidad conjunta.**

Estableceremos ahora, una regla para calcular $P(A \cap B)$. Para ello, simplemente despejaremos $P(A \cap B)$ de la fórmula de la probabilidad condicional:

$$P(B/A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)}$$

$$P(A)P(B/A) = P(B \cap A)$$

Si consideramos que $B \cap A = A \cap B$, puede escribirse también:

$$P(A)P(B/A) = P(A \cap B)$$

Finalmente:

$$\boxed{P(A \cap B) = P(A)\, P(B/A)}$$

Ahora bien, si lo que conocemos es *P(A/B)*, debemos usar la forma:

$$\boxed{P(B \cap A) = P(B)\, P(A/B)}$$

Actividad 2.5 c

En cada caso, llena el espacio en blanco para completar la fórmula::

a) $P(O \cap A) = P(O)$____

b) $P(B \cap A) = P(A)$ ____

c) $P(P \cap Q) = P(P)$_____

d) $P(P \cap Q) = P(Q)$_____

Ejemplos

1. Una oficina tiene dos teléfonos A y B. La probabilidad de que el teléfono A esté ocupado es de 0.6 y la probabilidad de que el teléfono B lo esté es 0.50. Supon además que cuando el teléfono A está ocupado, la probabilidad de que el B también lo esté es 0.80. ¿Cuál es la probabilidad de que ambos teléfonos estén ocupados?

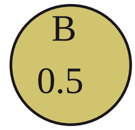
Solución

.....*La probabilidad de que el teléfono A este ocupado es* 0.6 $\longrightarrow$ $P(A) = 0.6$

A: el teléfono *A* está ocupado.

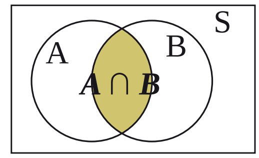
Ejemplos
(Cont.)

.....*La probabilidad de que el teléfono B este ocupado es* 0.5 → $P(B) = 0.5$



B: el teléfono *B* está ocupado.

.....*Cuando el teléfono A está ocupado, la probabilidad de que B también lo esté es* 0.80. → $P(B/A) = 0.80$



Se pide: P (Ambos estén ocupados) = $P(A \cap B)$

$$P(A \cap B) = (0.6)(0.8) = 0.48$$

Por la regla de multiplicación: $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B/A)$

Sustituyendo: $P(A \cap B) = (0.6)\,(0.8) = 0.48$

2. Si llueve antes de una semana de haber sembrado, hay 0.95 de probabilidades de que una cierta clase de semilla de lechuga germine. Si hay una probabilidad de 0.70 de que llueva la semana próxima, ¿cuál es la probabilidad de que llueva y haya germinación?

Solución

Sucesos señalados: *Ll: "Llueve"*
G: "Germina"

Si llueve ...hay 0.95 de probabilidades de ...que germine. → $P(G/Ll) = 0.95$

.....*Probabilidad de que llueva es 0.70.* → $P(Ll) = 0.70$

Se pide: "*probabilidad de que llueva y haya germinación*"

$$P(Ll \text{ y } G) = P(Ll \cap G) = P(Ll)P(G/Ll)$$

Entonces: $P(Ll \cap G) = (0.7)(0.95) = 0.667.$

3. El 30% de la población de un cierto país del tercer mundo tiene una deficiencia de vitamina D. De aquellas personas que tienen deficiencia de vitamina D, el 10% tiene síntomas de la enfermedad llamada raquitismo. ¿Cuál es la probabilidad de que una persona escogida al azar de la población tenga una deficiencia de vitamina D y tenga raquitismo?

Solución

Identifiquemos los eventos mencionados:
"Tiene deficiencia de vitamina D": *D*
"Tiene síntomas de raquitismo": *R*

.....*El 30%...tiene deficiencias de vitamina D.* → $P(D) = 0.3$

Ejemplos
(Cont.)

.....De aquellas personas que tienen deficiencia de vitamina D, el 10% tiene ... raquitismo. $\longrightarrow$ *P(raquitismo / deficiencias de vitamina D).*

$$P(R / D) = 10\%.$$

Se pide: "Probabilidad de que una persona escogida al azar de la población, tenga una deficiencia de vitamina D y tenga raquitismo"

En símbolos: $P(D \cap R) = P(D) \cdot P(R / D)$

Por lo tanto: $P(D \cap R) = P(D) \cdot P(R / D) = (0.3)(0.1) = 0.03 = 3\%$

Sucesos independientes

Analicemos la siguiente situación:

"Durante una prueba de duración de dos lotes de focos producidos por fábricas diferentes, se ha comprobado que la probabilidad de que un foco de la 1ra. fábrica dure 1000 horas encendido, es de 0.84. Asimismo, la probabilidad respectiva de un foco de la 2da. fábrica, es 0.78. Se quiere saber, ¿cuál es la probabilidad de que el foco de la 2da. fábrica dure encendido 1000 horas, si el foco de la 1ra. fábrica tuvo esa duración?".

Solución

Sean los siguientes sucesos:

A: "*El foco de la 1ra. fábrica dura 1000 horas*".
B: "*El foco de la 2da. fábrica dura 1000 horas*".

Entonces, evidentemente tenemos que:

$$P(A) = 0.84$$
$$P(B) = 0.78$$

Se nos pide determinar: $P(B/A)$. Es decir, necesitamos la probabilidad de que el foco tomado de la segunda fábrica dure 1000 horas, cuando esta misma duración la haya presentado un foco de la primera fábrica.
Ahora bien, es evidente que la probabilidad del evento B, no depende de la realización del evento A. Esto último lo concluimos por el hecho de que podemos proceder simultáneamente a las dos pruebas y de que los focos proceden de fábricas diferentes, fabricados por máquinas distintas.
Prácticamente, esto significa que la probabilidad de que un foco de la 2da. fábrica dure 1000 horas, no depende de la duración del foco tomado de la 1ra. fábrica.
Concluimos que la probabilidad del resultado B no se modifica por el hecho de que añadamos a las condiciones generales, la condición de realización del evento A, esto significa que:

$$\boxed{P(B) = P(B / A)}$$

En tal caso, decimos simplemente que **el evento B es independiente del A**.

Resumiendo: Dos eventos son independientes si la ocurrencia o no ocurrencia de uno, no afecta la ocurrencia o no ocurrencia del otro.

La independencia de dos eventos A y B se expresa matemáticamente como:

$$\boxed{P(A / B) = P(A)}$$

Si B no depende de A, A no dependerá tampoco de B.

Si $P(B / A) = P(B)$ tendremos también que $P(A / B) = P(A)$.

Es decir, la independencia de los eventos, es una propiedad recíproca.

> Para eventos independientes, la regla de multiplicación
> $P(A \cap B) = P(A)\, P(B/A)$ se simplifica:
> $$P(A \cap B) = P(A)\, P(B)$$

La regla de multiplicación para eventos independientes, admite sin dificultad la generalización en el caso de que se busque la probabilidad, no de dos, sino de tres, cuatro o más sucesos independientes entre sí.

Sean por ejemplo, tres sucesos A, B y C respectivamente independientes (es decir, que la probabilidad de cada uno de ellos sea independiente de la realización o no realización de los otros dos).

Siendo los sucesos A, B y C respectivamente independientes, de la regla:

$$P(A \cap B) = P(A)\, P(B)$$

se deduce que: $P(A \text{ y } B \text{ y } C) = P(A \text{ y } B)\, P(B)$

entonces: $P(A \text{ y } B \text{ y } C) = P(A)\, P(B)\, P(C)$

o bien: $\boxed{P(A \cap B \cap C) = P(A)\, P(B)\, P(C)}$

Ejemplo

Un estudiante que cursa matemáticas, español e inglés, estima que sus probabilidades de obtener 10 en estos cursos son 1/10, 3/10 y 7/10 respectivamente. Si supone que las calificaciones pueden ser consideradas como eventos independientes, ¿cuál es la probabilidad de obtener:

(a) 10 en todas
(b) ningún 10?

Solución

(a) M: "10 en matemáticas" $\longrightarrow$ $P(M) = 1/10$
E: "10 en español" $\longrightarrow$ $P(E) = 3/10$
I: "10 en inglés" $\longrightarrow$ $P(I) = 7/10$

Se pide:

$$P(M \cap E \cap I) = P(M)\, P(E)\, P(I) = \left(\frac{1}{10}\right)\left(\frac{3}{10}\right)\left(\frac{7}{10}\right) = \frac{21}{1000} = 0.021$$

(b) Si M es el evento "10 en matemáticas".
M' será el evento "no obtuvo 10 en matemáticas".

Análogamente: E' es el evento "no obtuvo 10 en español".
I' es el evento "no obtuvo 10 en inglés".

> No olvides que: $P(M \cap E \cap I)$ representa a $P(M$ y E e $I)$ e indica la probabilidad de que ocurran los tres sucesos simultáneamente.

Ejemplo (Cont.)

El evento ningún 10 es $M' \cap E' \cap I'$

Para aplicar la regla de multiplicación aceptaremos lo siguiente: Si A y B son independientes, entonces las parejas:

A y B'
A' y B
A' y B'

también son independientes (¡piénsalo!)

Igualmente para tres eventos A, B y C independientes, se cumple que A', B' y C' son independientes.

Por lo tanto: $P(M' \cap E' \cap I') = P(M')\,P(E')\,P(I')$

$$= \left(1-\frac{1}{10}\right)\left(1-\frac{3}{10}\right)\left(1-\frac{7}{10}\right)$$

$$= \left(\frac{9}{10}\right)\left(\frac{7}{10}\right)\left(\frac{3}{10}\right)$$

$$= 0.189$$

Actividad 2.5 d

Analiza detenidamente las siguientes observaciones acerca de las relaciones que existen entre sucesos mutuamente exluyentes y sucesos independientes:

1. La independencia y los sucesos mutuamente excluyentes son dos conceptos muy diferentes:
   a. El que dos sucesos sean mutuamente exluyentes significa que los dos sucesos no pueden ocurrir al mismo tiempo.
   b. El que dos sucesos sean independientes significa que la ocurrencia o no de un suceso, no afecta la probabilidad del otro.

2. Dos sucesos no pueden ser a la vez mutuamente excluyentes e independientes. En consecuencia:
   a. Si dos sucesos son independientes, entonces no son mutuamente excluyentes. Ésto puede deducirse del siguiente hecho: Si A y B son independientes, entonces $P(A \cap B) = P(A)P(B)$, y, debido a que $P(A)$ y $P(B)$ son diferentes de cero, $P(A \cap B)$ es diferente de cero.
   b. Si dos sucesos son mutuamente excluyentes, entonces no son independientes.

Ejercicio 2.5

1. En una escuela todos los alumnos están tomando clases de matemáticas e inglés. La probabilidad de que un alumno escogido al azar repruebe matemáticas es 0.15, la probabilidad de que repruebe inglés es 0.05 y la probabilidad de que repruebe ambas es 0.04.
   a) Si sabemos que un alumno está reprobado en inglés, ¿cuál es la probabilidad de que repruebe matemáticas?
   b) Si sabemos que un alumno está reprobado en matemáticas, ¿cuál es la probabilidad de que repruebe inglés?

2. Se lanza un dado al aire, ¿cuál es la probabilidad de obtener un 3 sabiendo que ha salido un número impar?

3 . El despertador de José no funciona muy bien, pues el 20% de las veces no suena. Cuando suena, José llega tarde a clase con una probabilidad de 0.2, pero si no suena, la probabilidad de que llegue tarde a clase es 0.9. ¿Cuál es la probabilidad de que haya sonado el despertador, si sabemos que José ha llegado tarde a clase?

4. Supongamos que de todas las personas que compran cierta computadora, 60% incluye un programa que le permite hacer gráficas estadísticas, 40% incluye un programa que le permite editar fórmulas matemáticas y 30% incluye ambos tipos de programas. Si se selecciona al azar un comprador, ¿cuál es la probabilidad de que haya comprado un programa para graficar dado que compró uno para editar fórmulas?

5. Cierto proceso de fabricación produce 4% de artículos defectuosos. Por experiencia se sabe que el 25% de los artículos defectuosos producidos se le pasan al inspector. Los artículos estándar nunca son rechazados por el inspector. ¿Cuál es la probabilidad de que si usted compra uno de esos artículos sea uno de los defectuosos?

6. Explica con tus propias palabras qué significa que dos sucesos sean independientes.

7. ¿Por qué las propiedades “mutuamente excluyentes” e “independientes” son muy distintas?

8. Si $P(A) = 0.5$ y $P(B) = 0.3$ y A y B son independientes, ¿cuál es la probabilidad de cada uno de los siguientes sucesos?
   a. $P(A \cap B)$ b. $P(B / A)$ c. $P(A / B)$.

9. Si $P(A) = 0.4$, $P(B) = 0.3$ y $P(A \cap B) = 0.15$.
   a. $P(A / B) =$__________ b. $P(B / A) =$_________ c. ¿Son independientes A y B?

10. De una baraja normal se extrae una carta. Sean *A* el evento “*la carta es una figura*” (un jack, una reina o un rey), *B* la ocurrencia de una “*carta roja*” y C representa “*la carta es un corazón*”. Determina si los siguientes pares de sucesos son independientes o dependientes:
    a. *A* y *B* b. *A* y *C*. c. *B* y *C*.

AUTOEVALUACIÓN (UNIDAD II)

Considera los siguientes conjuntos para responder los reactivos del 1 al 3

$U = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j\}$ $C = \{c, d, e, f\}$ $E = \{g, h, i, j\}$
$A = \{a, b, c, d\}$ $D = \{h, i, j\}$
$B = \{b, c, d, e\}$

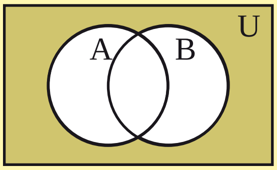
1. El conjunto $\{h, i, j\}$ es:
   a. $(A \cup B)'$
   b. $(B \cup C)'$
   c. $D \cap E$
   d. $D \cup E$

2. El conjunto $\{a, b\}$ es:
   a. $A \cap B'$
   b. $C \cap A'$
   c. $A \cap C'$
   e. $B \cap C'$

3. El conjunto $A' \cap C'$ es igual a:
   a. $\{g, h, i, j\}$
   b. $\{f, g, h, i, j\}$
   c. $\{g, h, i\}$
   d. $\{a, b, e, f\}$

4. Si M y N son mutuamente excluyentes, entonces:
   a. $M \cup N = M$
   b. $M \cup N = M \cap N$
   c. $M \cap N = \phi$
   d. $M \cup N = U$

5. ¿Qué operación representa el área sombreada?
   a. $A \cap B$
   b. $A \cup B$
   c. $A' \cap B$
   d. $A' \cap B'$



6. En una clase de 50 alumnos de primer año, 30 estudiaron Word, 15 Excel y 5 estudiaron ambos programas. Si se selecciona un alumno al azar, determina la probabilidad de elegir uno que:
   a. Estudió Word.
   b. No estudió Excel
   c. Estudió algún programa de computación.
   d. Estudió Word pero no Excel.
   e. No estudió ningún programa.
   f. Estudió Excel si se sabe que estudió Word.

7. Contesta correctamente:
   a. Sea el evento A: “llueve hoy”, con probabilidad conocida $P(A)$. La fórmula para calcular la probabilidad de que “no llueva hoy” es:___________
   b. Sea el espacio muestral $S = \{1, 2, 3\}$. ¿Cuánto vale $P(1) + P(2) + P(3)$?______
   c. Sean los eventos A, B. La fórmula para calcular la probabilidad de que ocurran cualesquiera de ellos es:______________________________
   d. La fórmula para calcular la probabilidad de que ocurra A dado que ocurrió B es:________________

AUTOEVALUACIÓN (UNIDAD II) (Cont.)

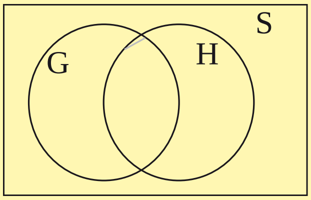
8. Si $P(A) = 0.6$, $P(B/A) = 0.7$ y $P(B) = 0.6$, calcula:
   a) $P(B')$ b) $P(A \text{ o } B)$ c) $P(A/B)$ d) $P(A \text{ y } B)$

9. Se arroja un solo dado, la probabilidad de que salga un número mayor que 5 es:
   a) 2/3 b) 1/3 c) 1/6 d) 1/2

10. Se saca un solo naipe de la baraja americana. Calcula la probabilidad de que el naipe sea de color rojo?
    a) 1/52 b) 4/52 c) 1/2 d) 1

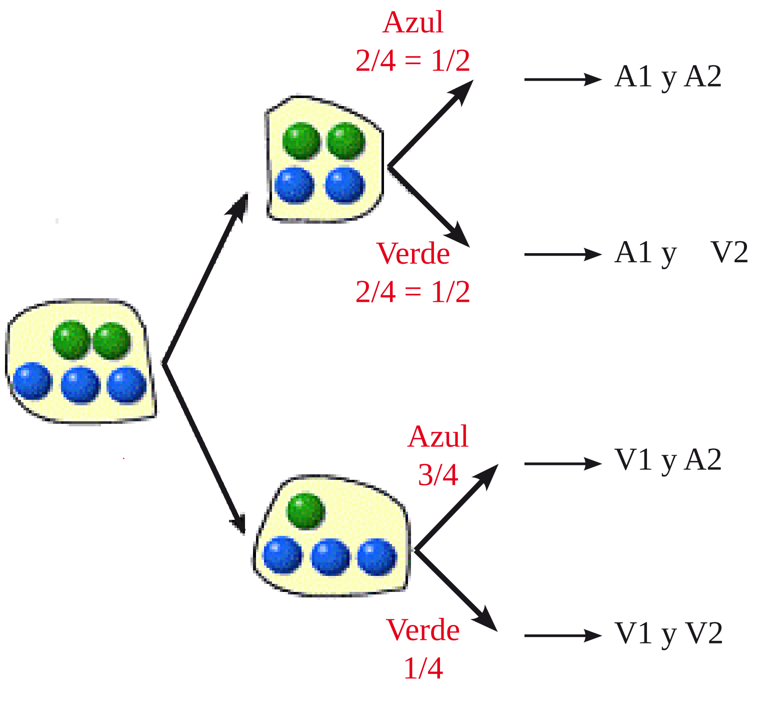
11. Lanza un dado "honesto". Sea A: "el dado muestra un número menor que 4" y B: "el dado muestra un número impar". Calcula las probabilidades:
    a) P(A/B) b) P(B/A).

12. Si P(G) = 0.5, P(H) = 0.4 y $P(G \cap H) = 0.1$,
    a. Distribuye correctamente estas cantidades en un diagrama de Venn.
    b. Encuentra P(G / H).
    c. Encuentra P(H / G).
    d. Encuentra $P(\overline{H})$
    e. Encuentra P(G o H).
    f. Encuentra $P(G \text{ o } \overline{H})$
    g. ¿Son mutuamente exluyentes los sucesos G y H? Explica tu respuesta.
    h. ¿Son independientes los sucesos G y H? Explica tu respuesta.



13. A partir de algunos estudios estadísticos, se ha estimado que en cierta intervención quirúrgica, la probabilidad de que existan complicaciones con la anestesia es 0.02; la probabilidad de complicaciones durante la misma intervención es 0.03; y la probabilidad de complicaciones en el posoperatorio es 0.02. ¿Cuál es la probabilidad de que, en una intervención, no exista ninguna de estas complicaciones?

Probabilidad de Experimentos compuestos



3

UNIDAD

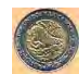
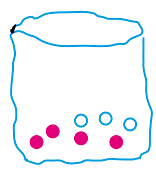
Lección 3.1

Cálculo de probabilidades de experimentos compuestos. Conteo mediante el diagrama de árbol y árbol de probabilidades (regla de multiplicación). Parte I: Experimentos repetidos a partir de un objeto generador.

Objetivos: Calcular probabilidades en experimentos compuestos con ayuda del diagrama de árbol y árbol de probabilidades. Experimentos repetidos a partir de un objeto generador.

En las lecciones precedentes, todos las situaciones correspondieron a ***experimentos simples***, es decir, experimentos que se realizan en una sóla etapa.

Por ejemplo:

- Lanzamiento de una moneda:  Un posible resultado: 
- Lanzamiento de un dado: Un posible resultado: 
- Extracción de un objeto:  Un posible resultado:

Sin embargo, por lo general, los problemas de probabilidad involucran dos o más etapas. Cada etapa puede considerarse como un experimento, pero cada resultado estará formado por una pareja, una triada, etcétera.

Por ejemplo, si se lanzan *dos* monedas, *un resultado* posible es: (a, s)

(a, s) o simplemente as ⟶ *Nos indica que cayó águila en el primer lanzamiento, y sello en el segundo.*

Si se lanzan tres dados *un resultado* posible es: $(1,3, 3)$

$(1, 3, 3)$ o simplemente 133 ⟶ *Nos indica que cayó uno en el primer lanzamiento, tres en el segundo y otro tres en el tercero.*

Atención: Lanzar una moneda dos veces, proporciona los mismos resultados que lanzar simultáneamente dos monedas. Sólo es necesario poder distinguir cada una de las monedas. De igual manera, podemos lanzar simultáneamente dos o más dados y distinguirlos mediante un color.

Trabajar con los resultados de un experimento compuesto, requiere de un entrenamiento especial, el cual empezarás con la siguiente actividad.

Actividad 3.1 a

Qué hacer

Analiza cada una de las siguientes situaciones. Contesta lo indicado.

Ariana y Carlos juegan a lanzar dos monedas a la vez y van anotando los resultados. Ariana dice: “*si salen dos águilas, yo gano*”, mientras que Carlos dice: “*yo gano si sale una águila y un sello*”. Observa los resultados obtenidos en 50 lanzamientos.

Dos águilas	*aa*	𝍸 𝍸 ///
Dos sellos	*ss*	𝍸 ////
Una águila y un sello	*as*	𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 ///

- ¿Cuántas veces ha ganado Ariana?__________
- ¿Cuántas veces ha ganado Carlos?__________
- ¿Cuántas veces no ha ganado ninguno?______

Ariana ha pedido la revancha y han vuelto a lanzar las monedas otras 50 veces. Estos son los resultados.

Dos águilas	*aa*	𝍸 𝍸 //
Dos sellos	*ss*	𝍸 𝍸 ////
Una águila y un sello	*as*	𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 ////

- ¿Cuántas veces ha ganado ahora cada uno?__________
- ¿Y si juntas los resultados de las dos partidas?__________
- ¿Qué es más fácil en el experimento anterior: obtener dos águilas u obtener una águila y un sello?______
- Únete a un compañero o compañera y repite el experimento de Ariana y Carlos. Comparen sus resultados con los de las tablas anteriores. ¿Crees que es una casualidad que haya ganado las dos partidas Carlos? ¿Por qué?________________
____

A continuación aplicaremos nuestro conocimiento probabilístico para explicar lo sucedido en la actividad anterior. Antes, debes proporcionar una respuesta a la siguiente pregunta:

¿Cuál es el conjunto de todos los resultados posibles al lanzar dos monedas al aire?____________________________

El diagrama de árbol

El diagrama de árbol, es una técnica de enumeración sistemática de cada uno de los resultados de un experimento compuesto. Por tanto, con la ayuda de esta herramienta, podemos determinar tanto el total de resultados posibles *n(S)* de un experimento, como el número de resultados favorables *n(A)* a cualquier suceso *A* de interés. De este modo podremos aplicar la fórmula de Laplace:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$$

El procedimiento a seguir, lo explicaremos a través de ejemplos.

Distinguiremos entre dos tipos de experimentos: experimentos que consisten en accionar "*un objeto generador*", y experimentos de *muestreo o selección de una población.*

Parte I. Experimentos a partir de un objeto generador.

Ejemplo 1

Al lanzar simultáneamente dos monedas (o una moneda dos veces en forma consecutiva), ¿es más fácil obtener una águila y un sello, o dos águilas?

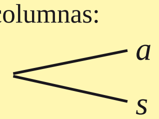
Solución

Primer paso: Descripción del experimento.

- El experimento consiste en el lanzamiento de dos monedas simultáneamente (o una moneda dos veces en forma consecutiva). Se trata de un *experimento compuesto* de *dos* experimentos simples, o de *dos* etapas.
- Hay un "*objeto generador*": *la moneda*, con dos opciones: *a* o *s*.
- Primer experimento o primer etapa: Lanzar la primera moneda.
- Opciones: $\{a, s\}$
- Segundo experimento o segunda etapa: Lanzar la segunda moneda. Opciones: $\{a, s\}$
- Algunos resultados: *as, aa, ss... ¿Son todos?*
- *Los resultados son de la forma:* $N_1 N_2$

N_1 puede tomar dos valores: (a o s) N_2 puede tomar dos valores: (a o s)

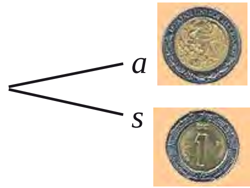
Las opciones del objeto generador, se escriben en columnas:



Segundo paso. Establece el espacio muestral.
¡Haz un diagrama de árbol!

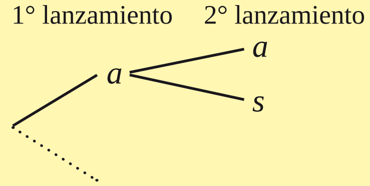
Analiza la forma de razonar para construir este diagrama de árbol:

En el primer lanzamiento, puede caer *a* o s.

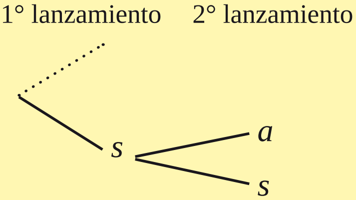


Ejemplo 1
(Cont.)

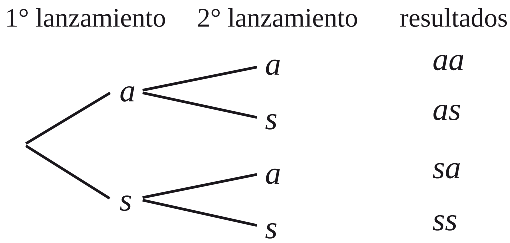
Si en el 1° cayó a, en el 2° puede caer a o s



Si en el 1° cayó s, en el 2° también puede caer a o s



El diagrama de árbol para el experimento de lanzar dos monedas es:



Cada resultado es una *pareja* o *dupla que indica la ocurrencia simultánea o conjunta de dos sucesos.*

↓

aa equivale a $a \cap a$, *y* significa: *"cae a en el 1ro. y cae a en el 2do.*

Observa que:
- 1er. lanz. tiene "2 opciones"
- 2do. lanz. tiene "2 opciones"
- $n(S) = 2\times2 = 4$

Entonces, el espacio muestral es:

$$S = \{aa, as, sa, ss\}$$

¿Resultados equiprobables?

Si la moneda es "honesta", los resultados a y s en cada lanzamiento, son igualmente probables. Por lo tanto, los resultados son equiprobables.

Por lo tanto: $n(S) = 4$

Tercer paso. **Resultados favorables y cálculo de probabilidades.**

Sucesos de interés:

A: "*una águila y un sello*".

B: "*dos águilas*"

$$A = \{as, sa\} \longrightarrow n(A) = 2$$

$$B = \{aa\} \longrightarrow n(A) = 1$$

Cuarto. **Aplica la regla de Laplace**:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{1}{4}$$

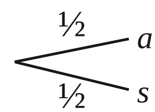
Así pues, a la larga, es más fácil obtener una águila y un sello, que dos águilas.

El árbol de probabilidades

Otra herramienta que nos ayuda a asignar probabilidades, es el árbol de probabilidades. Entenderemos por *árbol de probabilidades*, al diagrama de árbol que presenta las probabilidades correspondientes en cada una de sus ramas.

A continuación construiremos el árbol de probabilidades para el caso del lanzamiento de dos monedas.

En el primer lanzamiento, la probabilidad de cada resultado posible es ½.

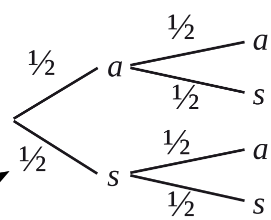


El resultado de la segunda moneda no depende de lo que salió en la primera, es decir ***los lanzamientos son independientes.*** Así observamos que:

- Los resultados del segundo lanzamiento serían los mismos, si no se hubiera llevado a cabo el primero.
- En consecuencia, los resultados del segundo experimento tienen la misma probabilidad, sin importar el resultado del primero. Es decir, la probabilidad de obtener águila en el segundo lanzamiento es un ½ y esto no depende del resultado del primero.

Entonces, el árbol de probabilidades para el lanzamiento de dos monedas es:

1° lanzamiento　2° lanzamiento　Probabilidad de cada resultados



(½)(½) = ¼

(½)(½) = ¼

(½)(½) = ¼

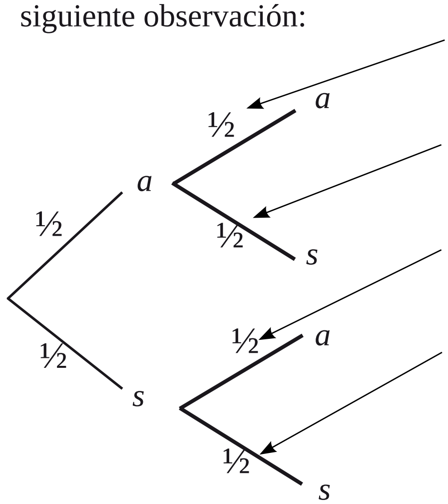
(½)(½) = ¼

Otro razonamiento:

Puesto que la mitad de las veces obtenemos águila en el 1er lanzamiento y de esta mitad, la mitad de las veces obtenemos águila en el 2do., la probabilidad de obtener dos águilas es la mitad de un medio, esto es un cuarto.

Observa que en cada bifurcación, *la suma de las probabilidades, ha de ser 1*. También observa que todas las ramas tienen la misma probabilidad, es decir, éste es un árbol de probabilidades *equiprobable*.

Al construir un árbol de probabilidades debes tener muy en cuenta la siguiente observación:



Aquí anotamos la probabilidad de obtener águila en el 2do. lanzamiento, dado que cayó águila en el 1ro: (*P(a en el 2do. / cayó a en el 1ro.*).

Aquí anotamos la probabilidad de obtener sello en el 2do. lanzamiento, dado que cayó águila en el 1ro: (*P(s en el 2do. / cayó a en el 1ro.*).

Aquí anotamos la probabilidad de obtener águila en el 2do. lanzamiento, dado que cayó sello en el 1ro: (*P(a en el 2do. / cayó s en el 1ro.*).

Aquí anotamos la probabilidad de obtener sello en el 2do. lanzamiento, dado que cayó sello en el 1ro: (*P(s en el 2do. / cayó s en el 1ro.*).

Sin embargo, debido a la independencia entre los dos lanzamientos, las probabilidades de las segundas ramas, se mantienen iguales a las primeras.

¿Cómo asignar probabilidades a sucesos, con la ayuda de un árbol de probabilidades? Aplicamos la regla del producto con base en la siguiente explicación:

- Cada resultado, es un suceso compuesto que consiste en la ocurrencia simultánea de los sucesos implicados. Por ejemplo, el resultado *aa*, es un suceso compuesto que nos indica:

Cayó a en el 1° **y** *a* en el 2°

Entonces: $P(aa) = P(a_{primero} \cap a_{segundo}) = P(a_{primero})\ P(a_{segundo} / a_{primero})$

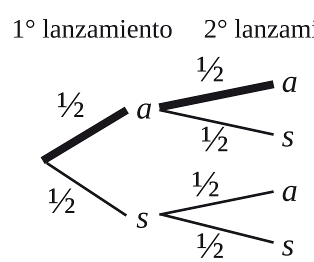
Sin embargo, *<u>puesto que hay independencia</u>* se cumple que:

$$P(aa) = \mathrm{P}(a_{primero} \cap a_{segundo}) = \mathrm{P}(a_{primero})\ P(a_{segundo})$$

Por costumbre escribimos: $\boxed{P(aa) = \mathrm{P}(a)\ P(a)}$

Para determinar la probabilidad de algún suceso, primero localizamos la trayectoria (o las trayectorias) que favorece al suceso y obtenemos su probabilidad, y, finalmente, cuado sea el caso, sumamos todas las probabilidades de las trayectorias favorables.

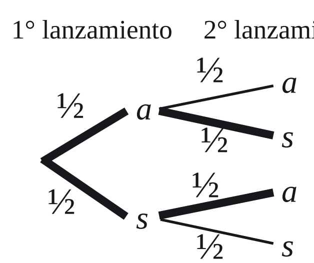
A continuación, se indican con segmentos gruesos la trayectoria que favorece al suceso *dos águilas.*



$P(aa) = (½)(½) = ¼$

$\mathrm{P}(dos\ águilas) = \mathrm{P}(aa) = ¼$

El suceso *una águila* y *un sello*, es favorecido por dos trayectorias:



$P(as) = (½)(½) = ¼$

$P(sa) = (½)(½) = ¼$

$P(un\ águila\ y\ un\ sello) = P(as) + P(as)$
$= ¼ + ¼ = ½$

Actividad 3.1 b

1. Contesta:
   a. En el experimento de lanzar dos monedas, ¿qué significa la notación *as*?
   b. En el experimento de lanzar dos monedas, ¿qué significa que el segundo lanzamiento sea independiente del primero?

2. Resuelve:
   a. En un juego de "*disparejo*" se lanzan tres monedas al aire (o tres veces consecutivas una moneda); la persona *A* gana si caen cara distintas y *B* gana si caen caras iguales. ¿Quien tiene más posibilidades de ganar? Argumenta tu respuesta calculando probabilidades de dos maneras: mediante un diagrama de árbol y la regla de Laplace, y utilizando un árbol de probabilidades.
   b. Una familia desea tener cuatro hijos. Suponiendo que en cada nacimiento existe la misma probabilidad de tener niño o niña, ¿cuál es la probabilidad de tener 2 niños y dos niñas? Utilizando tu intuición, conjetura una respuesta y después verifícala calculando probabilidades

Ejemplo 2 Se lanza una moneda "honesta" cuatro veces en forma consecutiva. ¿Cuál es la probabilidad de obtener:

a) cuatro águilas
b) dos águilas y dos sellos
c) un águila
d) tres sellos consecutivos
e) tres águilas o tres sellos?

Solución

Primero. Descripción del experimento.

- Lanzamiento de una moneda cuatro veces en forma consecutiva.
- Es un experimento de cuatro etapas.
- Algunos resultados:

a a s s
s s a s
a a a s

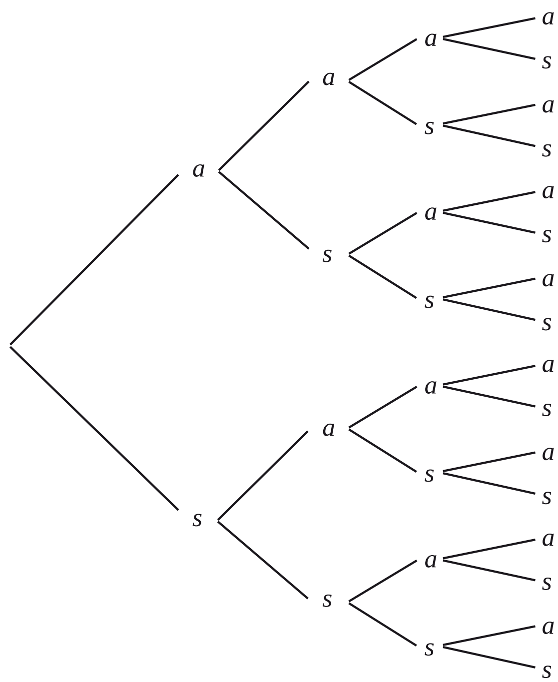
Son resultados de la forma: N_1 N_2 N_3 N_4

N_1 puede ser *a* o *s*.
N_2 puede ser *a* o *s*.
N_3 puede ser *a* o *s*.
N_4 puede ser *a* o *s*.

¿Cuántos serán en total?_______

Segundo. Establece el espacio muestral. ¡Haz un diagrama!

Ejemplo 2
(Cont.)



Observa que:
- 1er. lanz. tiene "2 opciones"
- 2do. lanz. tiene "2 opciones"
- 3er. lanz. tiene "2 opciones"
- 4to. lanz. tiene "2 opciones"
- $n(S) = 2\times2\times2\times2 = 16$

S = {*aaaa, aaas, aasa, aass, asaa, asas, assa, asss, saaa, saas, sasa, sass, ssaa, ssas, sssa, ssss*}

¿Resultados equiprobables? Sí, puesto que se dice que la moneda es honesta.

Entonces. $n(S) = 16$

Tercero. Resultados favorables y cálculo de probabilidades.

a) Suceso: "**caen cuatro águilas**". Sea A_1 este suceso.

$A_1 = \{ aaaa \} \longrightarrow n(A_1) = 1$

Por lo tanto: $P(A_1) = \dfrac{n(A_1)}{n(S)} = \dfrac{1}{16}$

b) Suceso: "**Dos águilas y dos sellos**". Sea A_2 este suceso:

$A_2 = \{aass, asas, assa, saas, sasa, ssaa\} \longrightarrow n(A_2) = 6$

Por lo tanto: $P(A_2) = \dfrac{n(A_2)}{n(S)} = \dfrac{6}{16} = \dfrac{3}{8}$

c) Evento: "**un águila**".

$A_3 = \{asss, sass, ssas, sssa\} \longrightarrow n(A_3) = 4$

$$P(A_3) = \frac{n(A_3)}{n(S)} = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$$

Ejemplo 2
(Cont.)

d) Evento: “**tres sellos consecutivos**”.

$$A_4 = \{asss,\ sssa\} \longrightarrow n(A_4) = 2$$

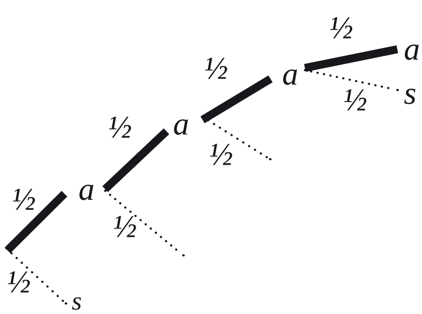
$$P(A_4) = \frac{n(A_4)}{n(S)} = \frac{2}{16} = \frac{1}{8}$$

e) Evento: “**tres águilas o tres sellos**”

$$A_5 = \{\underbrace{aaas,\ aasa,\ asaa,\ saaa,}_{\text{3 águilas}}\ \underbrace{asss,\ sass,\ ssas,\ sssa}_{\text{3 sellos}}\} \longrightarrow n(A_5) = 8$$

$$P(A_5) = \frac{n(A_5)}{n(S)} = \frac{8}{16} = \frac{1}{2}$$

Observación. Cuando los resultados de cada etapa son equiprobables, el conteo de resultados es suficiente para calcular probabilidades según la fórmula de Laplace. Por tanto, en estos casos, no es necesario un árbol de probabilidades. Este árbol, simplemente nos ratificaría el conteo hecho. Por ejemplo, apliquemos la regla del producto para el suceso “*caen cuatro águilas*”:



Puesto que cada lanzamiento es independiente del anterior, se cumple que:

$$P(aaaa) = P(a)\times P(a)\times P(a)\times P(a) =$$
$$= (½)\ (½)\ (½)\ (½) = 1/16$$

Actividad 3.1 C

Utiliza un árbol de probabilidades y la regla del producto, para verificar las probabilidades de los sucesos A_2, A_3, A_4 y A_5 descritos en el ejemplo 2.

Ejemplo 3

Se tiran dos dados y se registra el número de puntos que muestra cada uno. Determina la probabilidad de los siguientes sucesos:

a) A: “El primer dado muestra 2 puntos, y el segundo 3”
b) B: “Los dados muestran el mismo número”.
c) C: “Aparece un número par en cada dado”.
d) D: “La suma de los dos números es mayor que 7”.

Solución

Primero. Descripción del experimento.

- Lanzamiento de dos dados. Se trata de un experimento compuesto de dos etapas. Hay un “*objeto generador: el dado*”, con seis opciones: 1, 2, 3,4, 5, 6.
- Primer experimento o primer etapa: Lanzar el primer dado. Opciones: $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
- Segundo experimento o segunda etapa: Lanzar el segundo dado. Opciones: $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Cada resultado es una *pareja o dupla que indica la ocurrencia simultánea o conjunta de dos sucesos*.

11 representa a $1 \cap 1$, *y* significa: “*cae 1 en el 1ro. y cae 1 en el 2do.*

16 representa a $1 \cap 6$, *y* significa: “*cae 1 en el 1ro. y cae 6 en el 2do.*

Algunos resultados:
11
16
66 →
65
33
46
· · · *¿Cuántos son*?

Los resultados son de la forma: $N_1\ N_2$

N_1 puede tomar 6 valores: 1, 2, 3, 4, 5 ó 6
N_2 puede tomar 6 valores: 1, 2, 3, 4, 5 ó 6

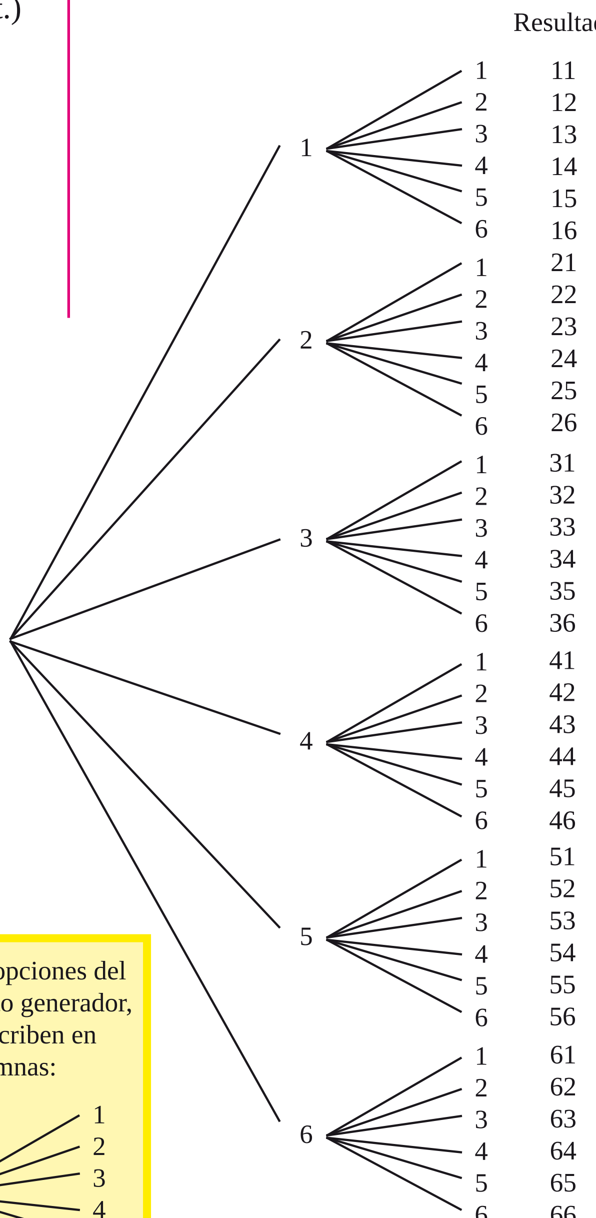
Segundo. Establece el espacio muestral. ¡Haz un diagrama!
Antes de hacer el diagrama de árbol, considera la siguiente alternativa para enlistar todos los posibles resultados:

2do. lanzamiento →

1er. lanzamiento →

	⚀	⚁	⚂	⚃	⚄	⚅
⚀	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
⚁	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
⚂	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
⚃	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
⚄	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
⚅	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

Ejemplo 3
(Cont.)



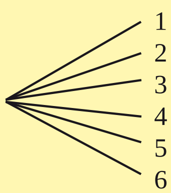
$$S = \left\{ \begin{matrix} (1,1) & (1,2) & (1,3) & (1,4) & (1,5) & (1,6) \\ (2,1) & (2,2) & (2,3) & (2,4) & (2,5) & (2,6) \\ (3,1) & (3,2) & (3,3) & (3,4) & (3,5) & (3,6) \\ (4,1) & (4,2) & (4,3) & (4,4) & (4,5) & (4,6) \\ (5,1) & (5,2) & (5,3) & (5,4) & (5,5) & (5,6) \\ (6,1) & (6,2) & (6,3) & (6,4) & (6,5) & (6,6) \end{matrix} \right\}$$

¿Resultados equiprobables?

Si el dado es "honesto", en cada lanzamiento tendremos resultados equiprobables.

$$n(S) = 6 \times 6 = 36$$

Las opciones del objeto generador, se escriben en columnas:

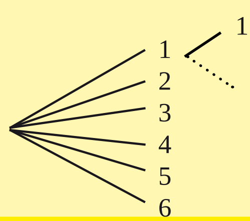


Observa que:
- 1er. lanz. tiene "6 opciones"
- 2do. lanz. tiene "6 opciones"
- $n(S) = 6 \times 6 = 36$

Reflexiona sobre los elementos considerados al construir el diagrama:

Número de etapas del experimento:
1a. *2da.*

Opciones de objeto generador



Ejemplo 3
(Cont.)

Tercero. Resultados favorables y cálculo de probabilidades.

a) Suceso A: "El primer dado muestra 2 puntos, y el segundo 3"

$A = \{(2,3)\} \xrightarrow[\text{O bien}]{} A = \{23\} \longrightarrow n(A) = 1$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{1}{36}$$

b) Suceso B: "Los dados muestran el mismo número".

$B = \{(1, 1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5), (6,6)\} \xrightarrow[\text{O bien}]{} B = \{11, 22, 33, 44, 55, 66\}$

$n(B) = 6$

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

c) Evento C: "**número par en cada dado**"

$C = \{(2,2), (2,4), (2,6), (4,2), (4,4), (4,6), (6,2), (6,4), (6,6)\}$

O bien

$C = \{22, 24, 26, 42, 44, 46, 62, 64, 66\}$

$n(C) = 9$

$$P(C) = \frac{n(C)}{n(S)} = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$$

$$P(B) = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$$

d) Evento D: "**suma mayor que 7**"

$D = \{26, 35, 36, 44, 45, 46, 53, 54, 55, 56, 62, 63, 64, 65, 66\}$

$n(D) = 15$

$$P(D) = \frac{n(D)}{n(S)} = \frac{15}{36}$$

Observa la región del arreglo rectangular de S que corresponde a una suma mayor que 7.

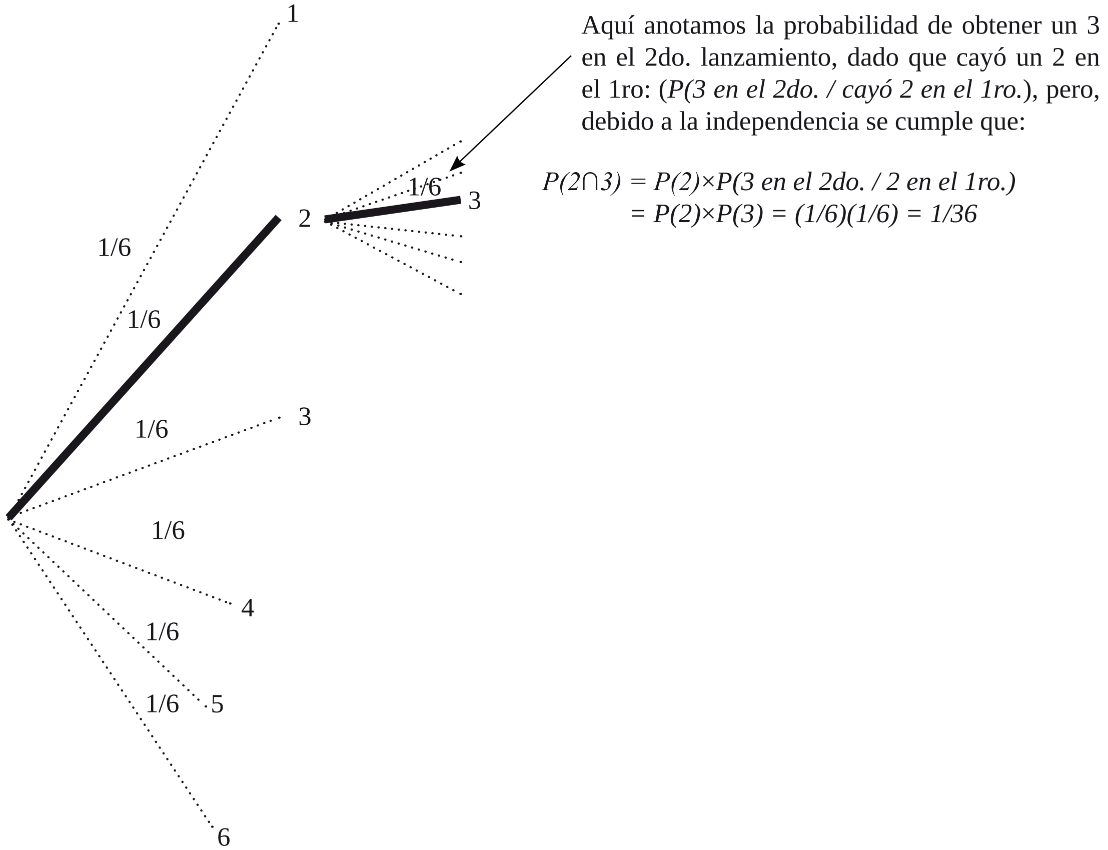
$$S = \begin{Bmatrix} (1,1) & (1,2) & (1,3) & (1,4) & (1,5) & (1,6) \\ (2,1) & (2,2) & (2,3) & (2,4) & (2,5) & (2,6) \\ (3,1) & (3,2) & (3,3) & (3,4) & (3,5) & (3,6) \\ (4,1) & (4,2) & (4,3) & (4,4) & (4,5) & (4,6) \\ (5,1) & (5,2) & (5,3) & (5,4) & (5,5) & (5,6) \\ (6,1) & (6,2) & (6,3) & (6,4) & (6,5) & (6,6) \end{Bmatrix}$$

Actividad 3.1 d

Determina las siguientes probabilidades. Utiliza el arreglo rectangular para localizar la región correspondiente. a los resultados favorables en cada caso.

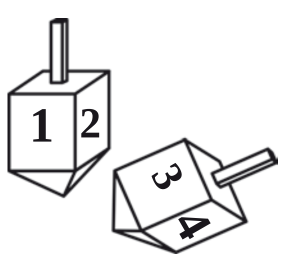
a. P(*suma igual a* 7)
b. P(*suma menor o igual que* 6).
c. *P(suma mayor que 7 y menor que* 12)

Observación. Una vez más trabajamos con un espacio muestral equiprobable, por lo que no es necesario utilizar un árbol de probabilidades. Sin embargo, en muchos problemas deberás utilizar esta herramienta, por lo que, a manera de ejemplo, la aplicaremos para calcular la probabilidad de que al lanzar dos dados, aparezca un dos en el primero y un tres en el segundo.

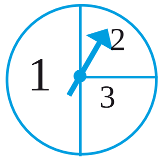


Actividad 3.1 e

1. Convierte el diagrama de árbol del ejemplo 3, en un árbol de probabilidades. Utiliza el árbol de probabilidades y la regla del producto para calcular las probabilidades de los sucesos *B*, *C* y *D* de dicho ejemplo.
2. Una perinola tiene cuatro lados, marcados con 1, 2, 3 y 4. Cuando se hace girar, se detendrá con uno de los lados hacia arriba. Simula girar la perinola dos veces y registra los resultados en cada ocasión.
   a. Traza un diagrama de árbol e incluye todos los resultados posibles de este experimento.
   b. Calcula las probabilidades de los siguientes sucesos:
      A: “Se obtiene el número 43.”
      B: “Las dos perinolas muestran el mismo número”.
      C: “Aparece un número par en cada perinola”.
      D: “La suma de los dos números es mayor que 6”.
      E: “aparece un 1 y un 2”.



Ejemplo 4 Un juego de una feria consiste en hacer girar dos veces la ruleta que se muestra a continuación.



Determina la probabilidad de los siguientes sucesos:

- *A*: “Se obtiene el número 12”.
- *B*: “Se obtiene el mismo número cada vez”.

Solución

Primero. Descripción del experimento.

- Giro de una ruleta dos veces. Se trata de un experimento compuesto de dos etapas. Hay un “*objeto generador: la ruleta*”, con tres opciones: 1, 2 y 3.
- Primer experimento o primera etapa:
  Girar la ruleta. Opciones: $\{1, 2, 3,\}$.
- Segundo experimento o segunda etapa: Volver a girar la ruleta.
  Opciones: $\{1, 2, 3\}$.

Algunos resultados: 11
14
34
43
33
. . . *¿Cuántos son*?

Los resultados son de la forma: $N_1 \, N_2$

N_1 puede tomar 3 valores: 1, 2, 3.
N_2 puede tomar 3 valores: 1, 2, 3.

Segundo. Establece el espacio muestral. ¡Haz un diagrama!

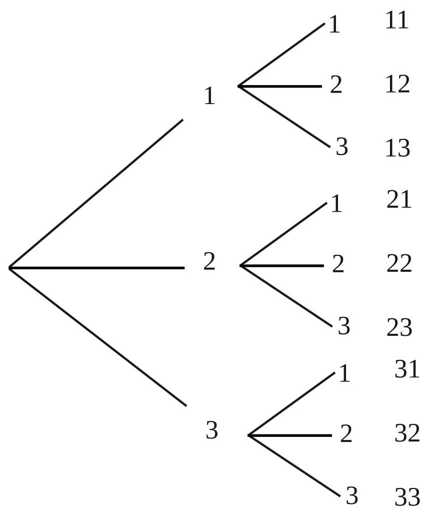
Antes de hacer el diagrama de árbol, considera la alternativa del arreglo rectangular para enlistar todos los posibles resultados:

2do. giro →

1er. giro →

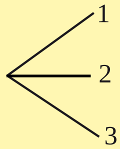
	1	2	3
1	(1,1)	(1,2)	(1,3)
2	(2,1)	(2,2)	(2,3)
3	(3,1)	(3,2)	(3,3)

Ejemplo 4
(Cont.)



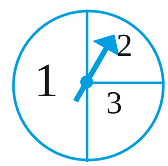
$$S = \left\{ \begin{matrix} (1,1) & (1,2) & (1,3) \\ (2,1) & (2,2) & (2,3) \\ (3,1) & (3,2) & (3,3) \end{matrix} \right\}$$

Las opciones del *objeto generador,* se escriben en columnas:



y en la parte superior el número de etapas del experimento.

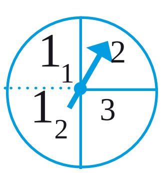
¿Resultados equiprobables? ***¡NO!***
La zona marcada con el 1, tiene mayor área, es decir, tiene más posibilidades que las otras dos.



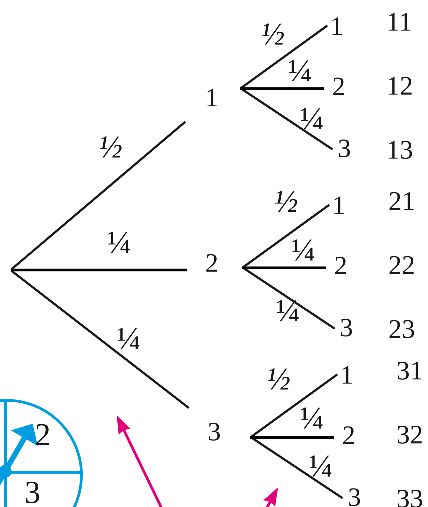
No podemos aplicar la regla de Laplace. Por tanto, debemos convertir el diagrama de árbol en un ***árbol de probabilidades.***

¡Atención! En la solución global no podemos aplicar la regla de Laplace, pero ésta, si se utiliza para asignar probabilidades a cada rama del árbol. Recuerda que primero debemos dividir el todo (el área completa) en cuatro partes iguales. de tan manera que:

- $P(1) = ½$
- $P(2) = ¼$
- $P(3) = ¼$



Debido a la independencia se cumple que:



11	$P(1∩1) = P(1)×P(1) = (1/2)(1/2) = 1/4$
12	$P(1∩2) = P(1)×P(2) = (1/2)(1/4) = 1/8$
13	$P(1∩3) = P(1)×P(3) = (1/2)(1/4) = 1/8$
21	$P(2∩1) = P(2)×P(1) = (1/4)(1/2) = 1/8$
22	$P(2∩2) = P(2)×P(2) = (1/4)(1/4) = 1/16$
23	$P(2∩3) = P(2)×P(3) = (1/4)(1/4) = 1/16$
31	$P(3∩1) = P(3)×P(1) = (1/4)(1/2) = 1/8$
32	$P(3∩2) = P(3)×P(2) = (1/4)(1/4) = 1/16$
33	$P(3∩3) = P(3)×P(3) = (1/4)(1/4) = 1/16$

Observa que en cada bifurcación la suma de probabilidades es 1.

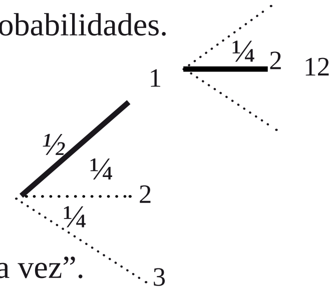
Ejemplo 4
(Cont.)

Tercero. Resultados favorables y cálculo de probabilidades.

a) Suceso A: "Se obtiene el número 12".

$$A = \{(1,2)\} \xrightarrow[\text{O bien}]{} A = \{12\}$$

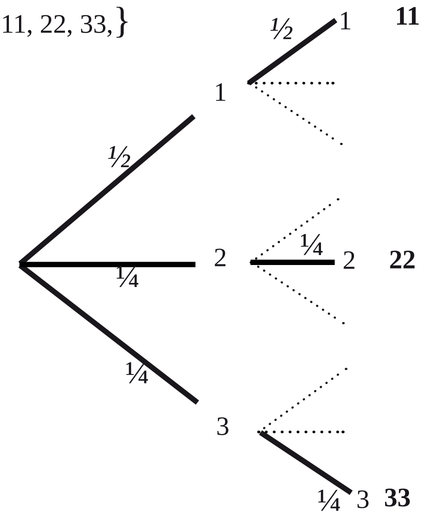
$$P(A) = P(1)\times P(2) = (\tfrac{1}{2})(\tfrac{1}{4}) = \tfrac{1}{8}$$



b) Suceso B: "Se obtiene el mismo número cada vez".

$$B = \{(1,1), (2,2), (3,3)\} \xrightarrow[\text{O bien}]{} B = \{11, 22, 33,\}$$

$$P(B) = P(11) + P(22) + P(33)$$
$$= (\tfrac{1}{2})(\tfrac{1}{2}) + (\tfrac{1}{4})(\tfrac{1}{4}) + (\tfrac{1}{4})(\tfrac{1}{4})$$
$$= \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{16} + \tfrac{1}{16}$$
$$= \frac{4+1+1}{16} = \frac{6}{16} = \frac{3}{8}$$

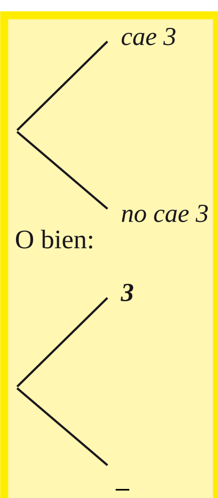


Actividad 3.1 f

Considera el experimento del ejemplo 4, para determinar las siguientes probabilidades.

a. P(*aparece un número par cada vez*)

b. P(*se obtiene una suma par*).



Experimentos dicotómicos

Definiremos *experimentos dicotómicos*, como aquellos cuyo suceso de interés *sólo tiene dos opciones*. Por ejemplo, el lanzamiento de una moneda y observar lo que muestra su cara hacia arriba, es dicotómico puesto que sólo tiene dos opciones: *águila* o *sello.*

Si utilizamos el concepto de *sucesos contrarios* o *complementarios*, podremos resolver una gran gama de problemas de probabilidad, a través de la técnica de los experimentos dicotómicos. Por ejemplo, el lanzamiento de un dado y observar los puntos que muestra su cara superior, no es dicotómico puesto que tiene seis opciones. Pero, si en este experimento estamos interesados en *observar si en la cara superior aparece un 3*, las posibles opciones pueden ser {***cae 3, no cae 3***}. Éste, sí es, un experimento dicotómico". A continuación estudiaremos algunos ejemplos.

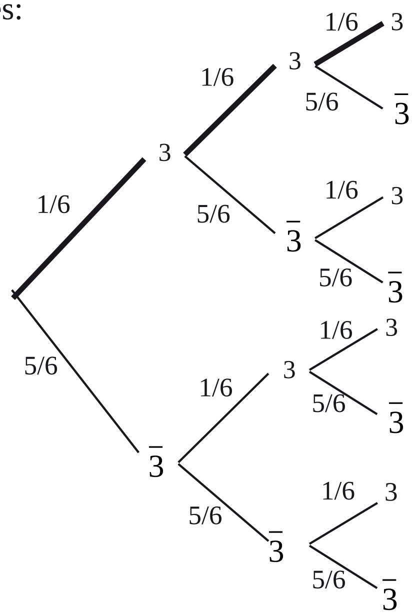
Ejemplo 5

Se lanza un dado tres veces seguidas; determina la probabilidad de los siguientes sucesos:

a) A: “Caen tres puntos en cada lanzamiento”.
b) B : “Cae un número par en cada lanzamiento”.

Solución

a) Son tres lanzamientos consecutivos.
Puesto que nos interesa el suceso “*cae 3*”, podemos establecer que los resultados posibles en cada etapa son: $\{3, \overline{3}\}$ y el árbol de probabilidades es:



333 → Resultado que favorece al suceso “*caen tres puntos* en cada lanzamiento”.

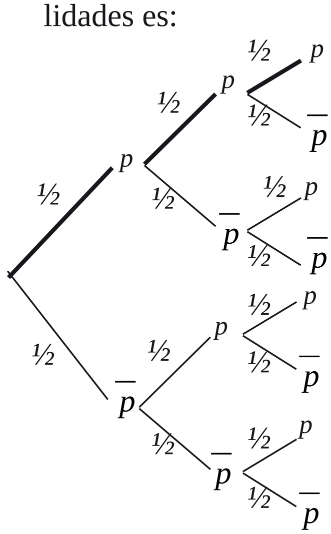
333 equivale a $3 \cap 3 \cap 3$, *y significa: “cae 3 en el 1ro., cae 3 en el 2do. y cae 3 en el 3ro.*

Recuerda que, al lanzar un dado, se cumple que:

- $P(3) = 1/6$
- $P(\overline{3}) = 5/6$

Entonces: $P(333) = P(3)P(3)P(3) = (1/6)(1/6)(1/6)(1/6) = 1/216.$

b) Son tres lanzamientos consecutivos.
Puesto que nos interesa el suceso “*cae par*”, podemos establecer que los resultados posibles en cada etapa son: $\{p, \overline{p}\}$ y el árbol de probabilidades es:



ppp → Resultado que favorece al suceso “*cae par* en cada lanzamiento”.

→ ***ppp*** equivale a $p \cap p \cap p$, *y significa: “cae p en el 1ro., cae p en el 2do. y cae p en el 3ro.*

Entonces: $P(ppp) = P(p)P(p)P(p) =$
$= (\tfrac{1}{2})(\tfrac{1}{2})(\tfrac{1}{2}) = \tfrac{1}{8}.$

Ejemplo 6

En el diagrama que se da a continuación aparece la hoja de respuestas a una prueba breve. Como puedes ver, la prueba consta de tres preguntas de opción múltiple.

	A	B	C	D
1.	( )	( )	( )	( )
2.	( )	( )	( )	( )
3.	( )	( )	( )	( )

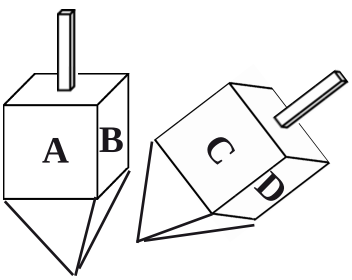
a) ¿Cuál es la probabilidad de responder correctamente por adivinación a las tres preguntas? (cada pregunta sólo tiene una respuesta correcta).

b) ¿Cuál es la probabilidad de adivinar la respuesta correcta a exactamente dos preguntas?

Solución

Descripción del experimento. Si bien este experimento no es propiamente producido por un *objeto generador*, cae fácilmente dentro de ellos. Para ello, nos podemos imaginar una perinola con cuatro caras, en cada una de las cuales aparece una de las letras *A*, *B*, *C* y *D*. Para cada pregunta, una de estas caras estará marcada con la respuesta correcta.

Puesto que se deben contestar tres preguntas, el experimento equivale a tres giros consecutivos. Además, puesto que nos interesa el suceso "*correcta*", podemos establecer que los resultados posibles en cada etapa son:
{C, $\overline{C}$ } y el árbol de probabilidades es:



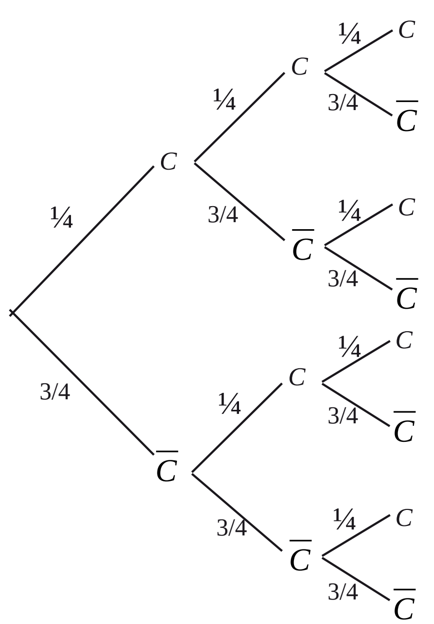
C: indica respuesta correcta.

$\overline{C}$: indica respuesta incorrecta.

Puesto que cada pregunta tiene cuatro opciones, de la cual sólo una es correcta, la probabilidad de contestarla correctamente por adivinación, es ¼, y de contestarla incorrectamentes es 3/4.

A	B	C	D
( )	( )	( )	( )

1er. pregunta 2da. pregunta 3er. pregunta



Una vez más estamos ante un experimento que presenta independencia.

a) Responder correctamente a las tres preguntas es favorecido por *CCC*.

Entonces: $P(tres\ correctas) = P(CCC) = P(C)P(C)P(C) =$
$= (¼)(¼)(¼) = 1/64.$

b) Responder correctamente a dos preguntas exactamente es favorecido por: $CC\overline{C}$, $C\overline{C}C$ y $\overline{C}CC$.

Entonces:

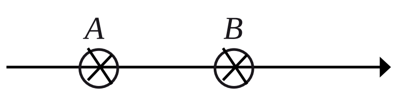
$$P(dos\ correctas) = P(CC\overline{C}) + P(C\overline{C}C) + P(\overline{C}CC) =$$
$$= P(C)P(C)P(\overline{C}) + P(C))P(\overline{C})P(C) + P(\overline{C})P(C)P(C)$$
$$= (1/4)(1/4)(3/4) + (1/4)(3/4)(1/4) + (3/4)(1/4)(1/4)$$
$$= \frac{3}{64} + \frac{3}{64} + \frac{3}{64} = \frac{9}{64}$$

Actividad 3.1 g

1. Considera el experimento del ejemplo 5, para determinar las siguientes probabilidades.
   a. *P*(*caen tres unos*)
   b. *P*(*caen dos seises*).

2. Considera el experimento del ejemplo 6, para determinar las siguientes probabilidades.
   a. *P*(*al menos dos correctas*)
   b. *P*(*ninguna correcta*).

Ejemplo 7 La siguiente figura muestra un circuito en serie formado por dos lámparas. Para que haya paso de corriente en el circuito deben funcionar correctamente tanto *A* como *B* por lo que si falla una, o las dos, el circuito es defectuoso.



Supongamos que 10% de las lámparas utilizadas en este circuito son defectuosas. ¿Cuál es la probabilidad de que el circuito funcione correctamente?

Solución

a) Se trata de verificar dos lámparas, por lo que es un experimento de dos etapas. Puesto que nos interesa el funcionamiento de cada una de ellas, podemos definir los siguientes sucesos:

A: “*la lámpara A es buena*”.
$\overline{A}$: “*la lámpara A es defectuosa*”.
B: “*la lámpara B es buena*”.
$\overline{B}$: “*la lámpara B es defectuosa*.

Ejemplo 7 (Cont.)

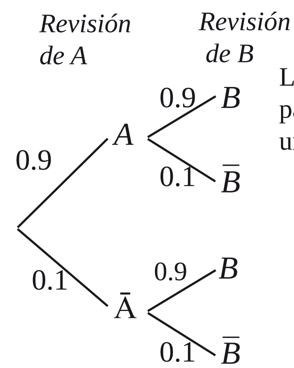
El enunciado dice que *el 10% de las lámparas son defectuosas.* Es decir:
$P(\bar{A}) = 10\% = 0.1$
$P(\bar{B}) = 10\% = 0.1$

En la primera etapa los posibles resultados son: $\{A, \bar{A}\}$
En la segunda etapa los posibles resultados son: $\{B, \bar{B}\}$

Puesto que ya sabemos que $P(\bar{A}) = 0.1$ y $P(\bar{B}) = 0.1$, tenemos que:

$$\begin{aligned} P(A) &= 1 - P(\bar{A}) \\ &= 1 - 0.1 = 0.9 \\ P(B) &= 1 - P(\bar{B}) \\ &= 1 - 0.1 = 0.9 \end{aligned}$$

Y el árbol de probabilidades es:



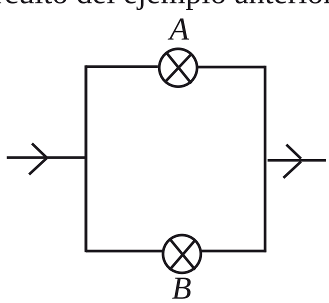
La revisión de las lámparas es independiente una de otra.

Para que el circuito funcione correctamente, deben funcionar las dos lámparas.
Entonces, el resultado favorable al suceso "*el circuito funciona bien*" es: *AB.*

Por lo tanto, $P(\text{el circuito funcione bien}) = P(AB)$
$= (0.9)(0.9) = 0.81.$

Actividad 3.1 g

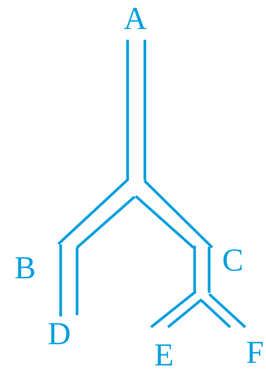
Ahora, considera el circuito del ejemplo anterior, en paralelo.



Para que el circuito funcione correctamente, basta que funcione *A* o que funcione *B*, esto es, que al menos una lámpara sea buena.

A. ¿Cuál es la probabilidad de que este circuito funcione?
B. ¿Es este circuito más o menos fiable que el anterior? Argumenta.

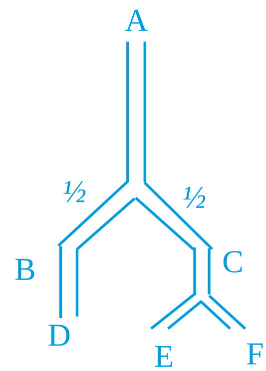
Ejemplo 8 La figura anexa, muestra un canal con bifurcaciones. Si se deja caer una bola por la abertura A, ésta puede deslizarse hasta caer en B o bien seguir por la derecha hasta ir a C. Determina la probabilidad de que la bola salga por D, E y por F.



Solución

De manera natural, la figura es un diagrama de árbol, y, para asignar probabilidades, razonamos de la siguiente manera:

- Al soltar la bola en A, tiene igual probabilidad de ir por B y por C.
  $P(B) = ½$ y $P(C) = ½$

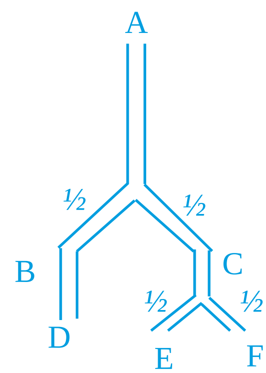


- Todas las bolas que pasan por B caen en D. Por lo tanto,
  $P(D) = P(B) = ½$

- Las bolas que pasan por C tienen igual probabilidad de ir hacia E que hacia F.

  Aplicando la regla de multiplicación obtenemos:
  $P(E) = ½ \times ½ = ¼$
  $P(F) = ½ \times ½ = ¼$

  Calcula. $P(D) + P(E) + P(F) =$ ___________



Otro razonamiento: La probabilidad de ir a E es, la mitad de la probabilidad de llegar a C. Entonces:

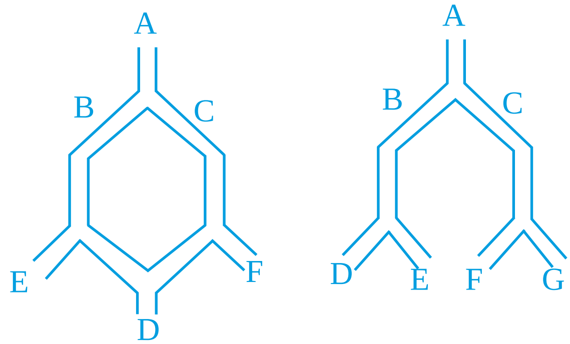
$$P(E) = ½ \times ½ = ¼.$$

Asimismo, La probabilidad de ir a F es, la mitad de la probabilidad de llegar a C:

$$P(F) = ½ \times ½ = ¼.$$

Actividad 3.1 h

Imagina que las siguientes figuras representan a dos máquinas de juego. Se gana un premio si una bola que se suelta en A cae en D.

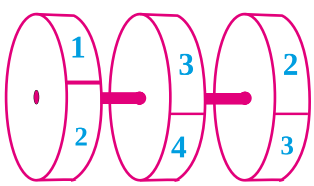


a. ¿En qué máquina jugarías?_______________

b. Para argumentar tu respuesta a la pregunta anterior, calcula la probabilidad de que la bola caiga en *D* en cada caso.

Ejercicio 3.1

1. Un juego para niños consiste en formar números pequeños haciendo girar tres ruedas, cada una con los dígitos del 1 al 4.

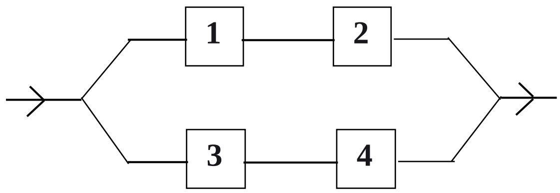


   a) Utiliza un diagrama de árbol para mostrar el total de números que se pueden formar.
   b) Determina la probabilidad de obtener al menos un 4.
   c) Determina la probabilidad de obtener dos 3.

2. Los miembros de un club de computadoras utilizan dos letras seguidas de tres números para formar códigos de identificación. Ellos usan las letras C e I y los números 2, 3 y 4. Permiten la repetición de letras, pero no de números. Por ejemplo CI-234, CCC-324. ¿Cuántos miembros puede haber antes de que tengan que cambiar su método de construir códigos?

3. Una prueba de “verdadero-falso” consta de cinco preguntas. Un estudiante marca al azar su respuesta. Calcula la probabilidad de obtener:
   a) tres aciertos y dos errores.
   b) al menos cuatro aciertos.

4. Un sistema consta de cuatro componentes, como se ilustra en la figura.



Todo el sistema funcionará si el subsistema 1-2 funciona o si el subsistema 3-4 funciona (porque los dos subsistemas están conectados en paralelo). Como los dos componentes de cada subsistema están conectados en serie, un subsistema funcionará sólo si ambos componentes de cada subsistema funcionan. Si los componentes funcionan o fallan de modo independiente uno de otro y si cada uno funciona con probabilidad 0.85, ¿cuál es la probabilidad de que todo el sistema funcione (coeficiente de confiabilidad del sistema)?

5. Si un jugador de básketbol sabe por experiencia que anotará, aproximadamente 75% de los tiros libres que lance a la canasta, calcula la probabilidad de que en una serie de cuatro tiros enceste al menos dos.

6. Se lanzan dos dados, ¿cuál es la probabilidad de que las caras superiores:
   a) sumen seis?
   b) su producto sea sies?
   c) el valor absoluto de la diferencia sea uno?

6. Suponga que se lanza un dado ordinario cinco veces. determina la probabilidad de que exactamente en tres de esos cinco lanzamientos salga el seis.

7. Si la probabilidad de que un bebé que va a nacer sea varón es de 1/2, calcula la probabilidad de que los cinco hijos de un matrimonio sean dos varones y tres mujeres.

Lección 3.2

Cálculo de probabilidades de experimentos compuestos. Conteo mediante el diagrama de árbol y árbol de probabilidades (regla de multiplicación). Parte II: Experimentos de muestreo.

Objetivos: Calcular probabilidades en experimentos compuestos con ayuda del diagrama de árbol y árbol de probabilidades. Experimentos de muestreo.

Estamos ahora interesados en problemas de muestreo. Recordemos que los problemas de muestreo consisten en seleccionar varios componentes de una población y analizar alguna cualidad en tales componentes. Dentro de estos problemas, de interés específico resultan los experimentos relacionados con extracciones aleatorias de bolas de una urna, personas de una población, etcétera.
En estos experimentos a diferencia de los anteriores, no existe un objeto generador de resultados, por lo que debemos precisar la población de interés y el tamaño de la muestra (por ejemplo una muestra de tamaño dos está formada por dos elementos y en general una muestra de tamaño *n* es aquella para la que se han seleccionado *n* elementos de la población)

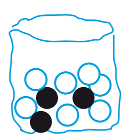
Actividad 3.2 a

Qué hacer

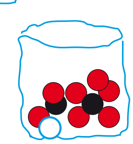
Analiza la situación planteada a continuación, y con base en tu intuición toma una decisión, y una vez estudiada esta lección, argumenta tu respuesta mediante valores de probabilidades.

Un juego consiste en dos bolsas, cada una con 10 bolas entre blancas (B), negras (N) y rojas.

Bolsa 1: 7 blancas y 3 negras



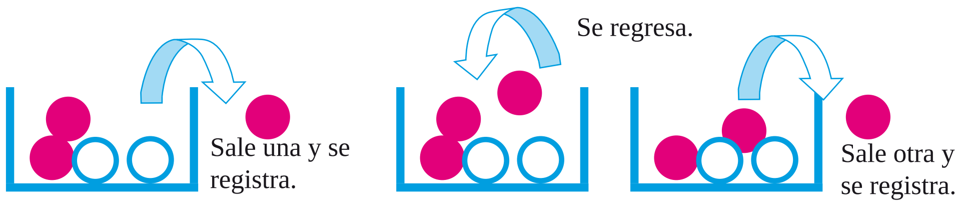
Bolsa 2: 1 blanca, 2 negras y 7 rojas.



Tiramos un dado. Si sale 1 ó 2, extraemos una bola de la bolsa 1. Si sale 3, 4, 5 ó 6, extraemos una bola de la bolsa 2. Si sale bola roja ganamos el juego. ¿Qué es más fácil, ganar o perder?

Dos tipos de muestreo:

Muestreo con reemplazamiento. En este muestreo cada elemento seleccionado se regresa a la población antes de elegir al siguiente elemento.



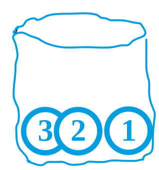
Muestreo sin reemplazamiento. En este caso, los elementos seleccionados no se regresan a la población.

En los siguientes ejemplos estudiarás problemas de probabilidad de experimentos de muestreo.

Parte II. Experimentos de muestreo

Ejemplo 1 Una bolsa contiene tres bolas numeradas del 1 al 3. Se extraen con los ojos cerrados, sucesivamente y sin reemplazamiento dos bolas, y se observa el número que muestran. ¿Cuál es la probabilidad de obtener:

a) Los números 1, 2 en ese orden.
b) Los números 1, 2 en cualquier orden.
c) Una suma de puntos mayor que 3.



Solución

Primero. Descripción del experimento.

- Extracción sin reemplazo y de manera sucesiva de dos bolas de una bolsa. Se trata de un experimento compuesto de dos etapas. Hay una población que llamaremos ***población de interés*** la cual está formada por los elementos: $\{1, 2, 3\}$.
- Primer experimento o primer etapa: Se extrae una bola y ***se registra su número.*** Opciones: $\{1, 2, 3\}$.
- Segundo experimento o segunda etapa: Sin regresar la bola seleccionada, se extrae otra bola y se registra su número. Opciones: $\{1,2\ 3\}$ ***con excepción de la que ya se extrajo en la primera selección.***

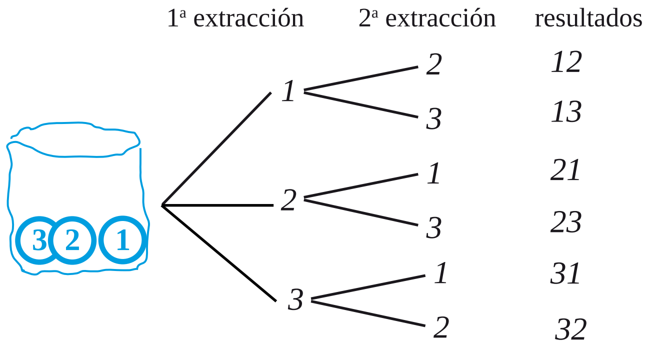
Ejemplo 1
(Cont.)

Algunos resultados: 12
13
32
. . . ¿*Cuántos son*?

Los resultados son de la forma: $N_1\ N_2$

N_1 puede tomar 3 valores: 1, 2, 3.
N_2 puede tomar 2 valores: 1, 2, 3 con excepción del seleccionado en la 1ª extracción.

Segundo. Establece el espacio muestral. ¡Haz un diagrama!



Cada resultado es una *pareja* o *dupla*.

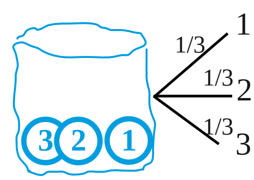
12 equivale a $1 \cap 2$, *y* significa: "*se selecciona 1 en la 1a. y se selecciona 2 en la 2da dado que en la 1a. se seleccionó 1.*"

Entonces, el espacio muestral es: $S = \{12, 13, 21, 23, 31, 32\}$

Tercero. Resultados favorables y cálculo de probabilidades.

¿El espacio muestral $S = \{12, 13, 21, 23, 31, 32\}$ es equiprobable? Analiza la composición de la bolsa. Cada número tiene la misma probabilidad de ser seleccionado.

Por tanto, el espacio muetral es equiprobable.
Entonces, podemos usar la regla de Laplace.
Con $n(S) = 6$.



a) Suceso A: Obtener "*Los números 1, 2 en ese orden*".

$A = \{12\} \longrightarrow n(A) = 1$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{1}{6}$$

b) Suceso B: Obtener "*Los números 1, 2 en cualquier orden*".

$A = \{12, 21\} \longrightarrow n(A) = 2$

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

Ejemplo 1

(Cont.)

c) Suceso C: Obtener "*Una suma de puntos mayor que 3*".

$$C = \{13, 23, 31, 32\} \longrightarrow n(A) = 4$$

$$P(C) = \frac{n(C)}{n(S)} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

Actividad 3.2 b

1. Resuelve el ejemplo 1, considerando que existe reemplazamiento.

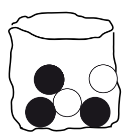
Ejemplo 2

De una bolsa que contiene 3 canicas negras y 2 blancas, se extraen con los ojos cerrados, sucesivamente y con reemplazamiento tres canicas, y se observa el color. Determina la probabilidad de obtener:

a) Las tres del mismo color.

b) Las tres negras.

c) Exactamente dos negras.



Solución

Primero. Descripción del experimento.

- Extracción con reemplazo y de manera sucesiva de tres canicas de una bolsa. Se trata de un experimento compuesto de tres etapas. Hay una ***población interés*** la cual está formada por los elementos: {●●●○○}
- Primer experimento o primer etapa: Se extrae una canica y ***se registra su color***. Opciones: $\{negra, blanca\}$.
- Segundo experimento o segunda etapa: Se regresa la canica seleccionada, se extrae otra canica y se registra su color. Opciones: $\{negra, blanca\}$.
- Tercer experimento o tercera etapa: Se regresa la canica seleccionada, se extrae otra canica y se registra su color. Opciones: $\{negra, blanca\}$.

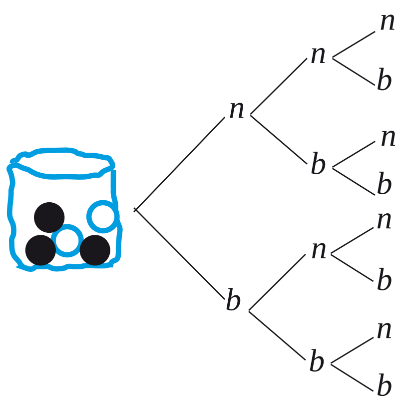
Algunos resultados: *nbb*
bnn
nnn
. . . ¿*Cuántos son*?

Ejemplo 2
(Cont.)

Los resultados son de la forma: $N_1\ N_2 N_3$

N_1 puede tomar 2 valores: *n*, *b*.
N_2 puede tomar 2 valores: *n*, *b*
N_3 puede tomar 2 valores: *n*, *b*

Segundo. Establece el espacio muestral. ¡Haz un diagrama!

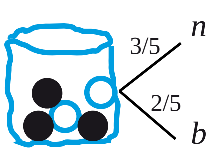


Cada resultado es una *triada.*

Entonces, el espacio muestral es:

$$S = \{nnn, nnb, nbn, nbb, bnn, bnb, bbn, bbb\}$$

Tercero. Resultados favorables y cálculo de probabilidades.



¿El espacio muestral es equiprobable? Analiza la composición de la bolsa. ***Cada color*** tiene distinta probabilidad de ser seleccionado.

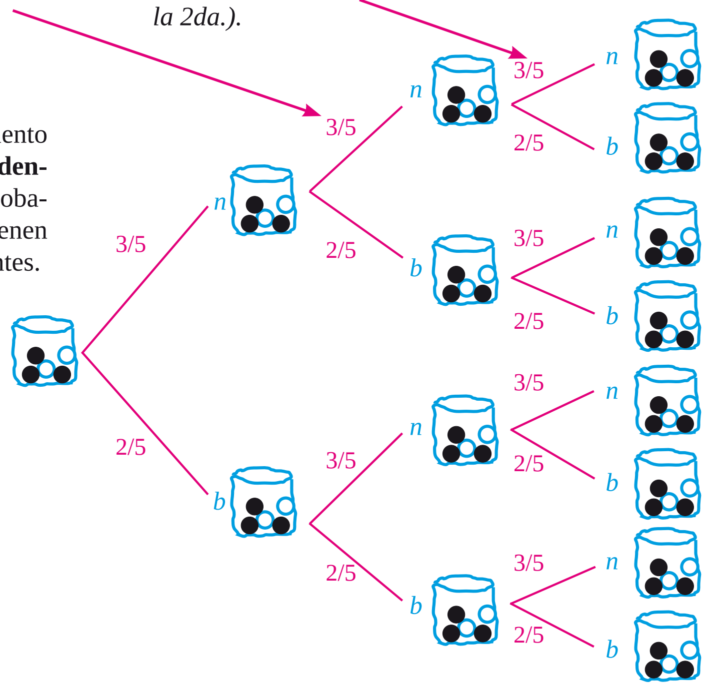
Por tanto, no podemos usar la regla de Laplace. Entonces, usaremos el árbol de probabilidades y la regla de multiplicación.

Aquí anotamos la probabilidad de obtener ***n*** en la 2da. extracción, dado que obtuvimos ***n*** la 1ra.: (*P(n en la 2da. / obtuvimos n en la 1a.)*.

P(n en la 3ra. / obtuvimos n en la 1a. y n en la 2da.).

Sin embargo, puesto que existe reemplazamiento antes de cada extracción, se presenta **independencia** entre dichas extarcciones. Por tanto, las probabilidades de las dos primeras ramas se mantienen iguales en las posiciones respectivas subsiguientes.

Así, *P(nnn) = P(n en la 3ra. / obtuvimos n en la 1a. y n en la 2da.) = P(n)P(n)P(n).*



Ejemplo 2 (Cont.)

a) Suceso A: Obtener "*Las tres del mismo color*":

$$A = \{nnn,\ bbb\}$$

$$\begin{aligned} P(\text{tres del mismo color}) &= P(nnn) + P(bbb) \\ &= P(n)P(n)P(n) + P(b)P(b)P(b) \\ &= (3/5)\times(3/5)\times(3/5) + (2/5)(2/5)(2/5) \\ &= 35/125 \end{aligned}$$

b) Suceso B: Obtener "*Las tres negras*":

$$B = \{nnn\}$$

$$\begin{aligned} P(\text{tres negras}) &= P(nnn) \\ &= P(n)P(n)P(n) \\ &= (3/5)\times(3/5)\times(3/5) = 27/125 \end{aligned}$$

c) Suceso C: Obtener "*Exactamente dos negras*":

$$C = \{nnb,\ nbn,\ bnn\}$$

$$\begin{aligned} P(\text{exactamente dos negras}) &= P(nnb) + P(nbn) + P(bnn) \\ &= P(n)P(n)P(b) + P(n)P(b)P(n) + P(b)P(n)P(n) \\ &= (3/5)(3/5)(2/5) + (3/5)(2/5)(3/5) + (2/5)(3/5)(3/5) \\ &= 3\times(3/5)(3/5)(2/5) \\ &= 54/125. \end{aligned}$$

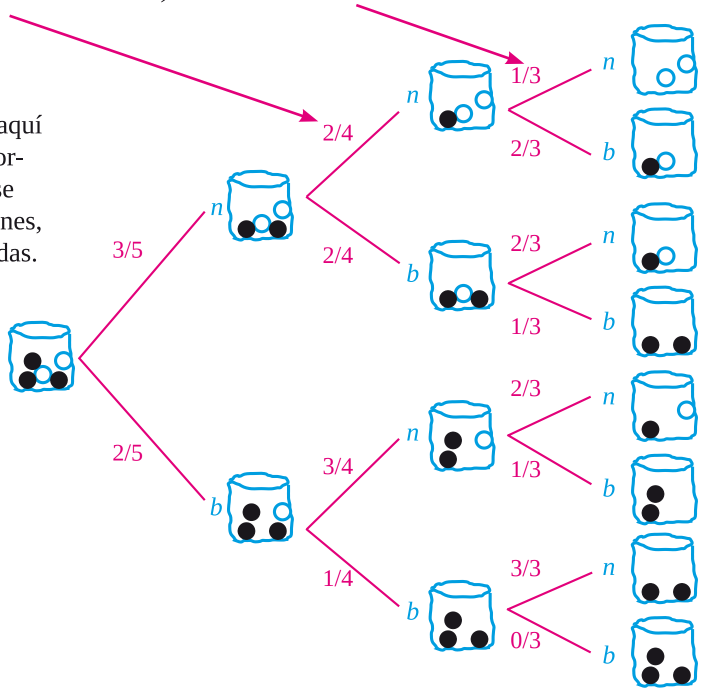
Ejemplo 3 Resolver el ejemplo 2, pero ahora considerando que no existe reemplazamiento.

P(n en la 3ra. / obtuvimos n en la 1a. y n en la 2da.).

Aquí anotamos la probabilidad de obtener ***n*** en la 2da. extracción, dado que obtuvimos ***n*** la 1ra.: (*P(n en la 2da. / obtuvimos n en la 1a.)*.

A diferencia de cuando hay reemplazamiento, aquí la composición de la bolsa va cambiando conforme se hacen las extracciones. Por lo tanto, no se presenta **independencia** entre dichas extracciones, y debemos plantear probabilidades condicionadas.

Por ejemplo,
P(nnn) = P(n en la 3ra. / obtuvimos n en la 1a. y n en la 2da.) = (3/5)(2/4)(1/3).



Ejemplo 3 (Cont.)

a) Suceso A: Obtener "*Las tres del mismo color*":

$$A = \{nnn, bbb\}$$

$$P(\text{tres del mismo color}) = P(nnn) + P(bbb)$$
$$= (3/5)\times(2/4)\times(1/3) + (2/5)(1/4)(0/3)$$
$$= \frac{1}{10} + 0 = \frac{1}{10}$$

b) Suceso B: Obtener "*Las tres negras*":

$$B = \{nnn\}$$

$$P(\text{tres negras}) = P(nnn)$$
$$= (3/5)\times(2/4)\times(1/3) = 1/10$$

c) Suceso C: Obtener "*Exactamente dos negras*":

$$C = \{nnb, nbn, bnn\}$$

$$P(\text{exactamente dos negras}) = P(nnb) + P(nbn) + P(bnn)$$
$$= (3/5)(2/4)(2/3) + (3/5)(2/4)(2/3) + (2/5)(3/4)(2/3)$$
$$= 3(1/5) = 3/5.$$

Actividad 3.2 c

Con los datos del ejemplo 3, calcula la probabilidad de obtener:

a) Una blanca.
b) Dos blancas.
c) Al menos una blanca.

Ejemplo 4 Una caja contiene 24 focos de los cuales 4 son defectuosos. Una muestra de tamaño tres es extraída sin reemplazamiento. ¿Cuál es la probabilidad de que la muestra:

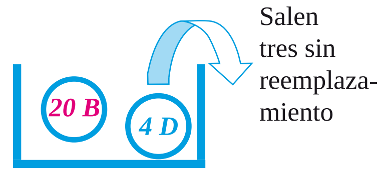
a. Contenga dos defectuosos.
b. Contenga al menos dos en buen estado.
c. Al menos uno en buen estado.

Solución

Primero. Descripción del experimento.

- Extracción sin reemplazo y de manera sucesiva de tres focos de una caja. Se trata de un experimento compuesto de tres etapas. Hay una ***población interés*** la cual está formada por los elementos:

$$\{\text{ 20 focos buenos, 4 defectuosos }\}$$



20 *B* indica 20 buenos o en buen estado
4 *D* indica 20 defectuosos.

Ejemplo 4
(Cont.)

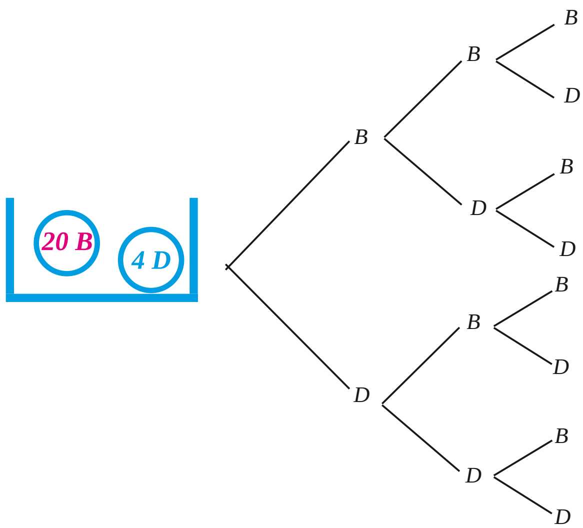
- Primer experimento o primer etapa: Se extrae un foco y se registra su calidad. Opciones: {bueno, defectuoso}.
- Segundo experimento o segunda etapa: Sin regresar el foco seleccionado, se extrae otro foco y se registra su calidad. Opciones: {bueno, defectuoso}.
- Tercer experimento o tercera etapa: Sin regresar los focos seleccionados, se extrae un tercer foco y se registra su calidad. Opciones: {bueno, defectuoso}.

Algunos resultados: *dbb*
bdd
bbb
· · · ¿*Cuántos son*?

Los resultados son de la forma: $N_1\ N_2 N_3$

N_1 puede tomar 2 valores: *b*, *d*.
N_2 puede tomar 2 valores: *b*, *d*.
N_3 puede tomar 2 valores: *b*, *d*.

Segundo. Establece el espacio muestral. ¡Haz un diagrama!



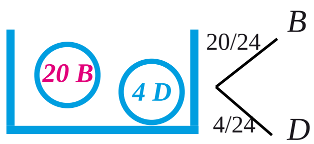
Cada resultado es una *triada*.

Entonces, el espacio muestral es:

$$S = \{BBB, BBD, BDB, BDD, DBB, DBD, DDB, DDD,\}$$

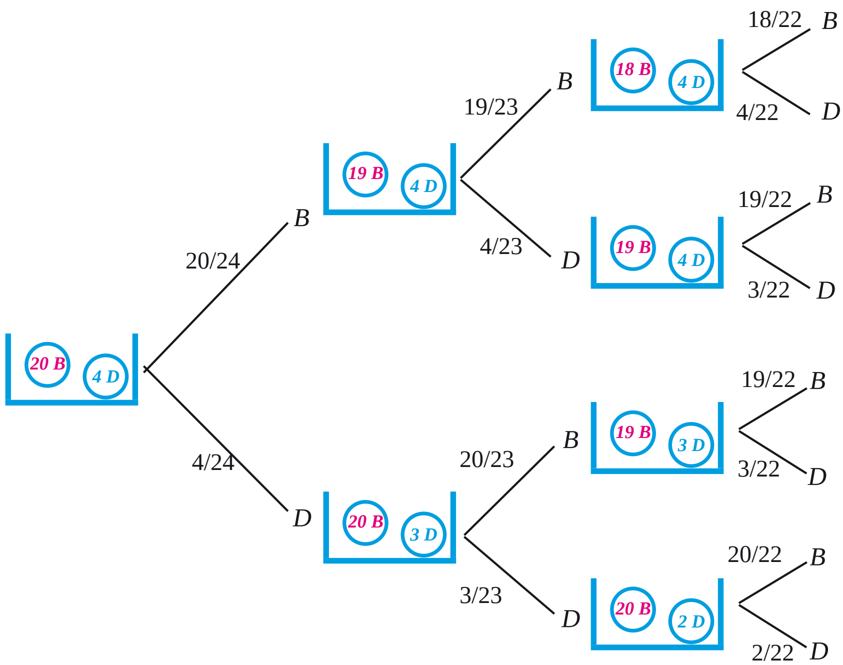
Tercero. Resultados favorables y cálculo de probabilidades.

¿El espacio muestral es equiprobable? La composición de la caja nos muestra que cada estado de calidad de los focos, tiene distinta probabilidad de ser seleccionado.



Ejemplo 4 (Cont.)

Por tanto, debemos usar el árbol de probabilidades y la regla de multiplicación.



a) Suceso A: Obtener "*dos defectuosos*":

A = {*BDD, DBD, DDB*}

P(dos defectuosos) = P(BDD) + P(DBD) + P(DDB)
= (20/24)(4/23)P(3/22) + (4/24)(20/23)P(3/22) + (4/24)(3/23)(20/22)
= 0.06

b) Suceso B: Obtener "*al menos dos en buen estado*".

B = {*BBB, BBD, BDB, DBB*}

P(al menos dos buenos) = P(BBB) + P(BBD) + P(BDB) + P(DBB)
= (20/24)(19/23)P(18/22)+(20/24)(19/23)P(4/22)+(20/24)(4/23)(19/22)
+ P(4/24)P(20/23)P(19/22)= 285/506 + 95/759 + 95/759 +95/759
= 0.94.

c) Suceso C: Obtener "*al menos uno en buen estado*".

Recordemos que en la lección (2.3) se estableció que "cuando se pregunta por la probabilidad de *por lo menos uno o al menos uno*, es más práctico calcular P($\overline{C}$) que *P(C)*. A continuación podrás convencerte del por qué sucede ésto.

$$S = \{\underbrace{BBB, BBD, BDB, BDD, DBB, DBD, DDB}_{\text{Al menos uno } B},\ \underset{\text{Ninguno } B}{DDD},\}$$

Al menos uno *B*, es ***complemento*** de ninguno *B*.

Ejemplo 4 (Cont.)

Entonces, en vez de calcular la probabilidad de 7 resultados (*BBB, BBD, BDB, BDD, DBB, DBD, DDB),* calculamos el de uno*: DDD* y aplicamos la regla del complemento:

$$\begin{aligned} P(C) = P(\textit{Al menos uno bueno}) &= 1 - P(\overline{C}) \\ &= 1 - P(DDD) \\ &= 1 - (4/24)(3/23)(2/22) \\ &= 1 - 0.005 \\ &= 0.995. \end{aligned}$$

Actividad 3.2 d

1. Con los datos del ejemplo 4, calcula la probabilidad de obtener una muestra que:
   A: "*contenga no más de un foco defectuoso*'.
   B: "*contenga al menos uno defectuoso*".
2. Un lote de bombas de gasolina para automóvil, tiene un 95 % de bombas que dan buen estado. Si se seleccionan cuatro bombas al azar: a) ¿cuál es la probabilidad de obtener una defectuosa?; b)¿Cuál es la probabilidad de obtener al menos una defectuosa?

Ejercicio 3.2

1. Del conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ se seleccionan dos números con reemplazamiento. Calcula la probabilidad de los siguientes sucesos:
   a) Ambos números son pares.
   b) El primer número es par y el segundo impar.
   c) El segundo número es impar.
   d) El primer número es par o el segundo impar.

2. Resolver el problema 1 sin reemplazamiento.

3. De una urna con cinco bolas rojas y tres blancas, se sacan dos bolas al azar con reemplazamiento. Calcula la probabilidad de los siguientes sucesos:
   a) A: ambas son blancas.
   b) B: ambas son del mismo color.
   c) C: la segunda bola es blanca.

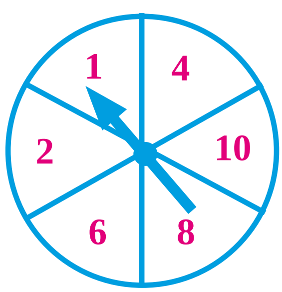
4. Resolver el problema 3 sin reemplazamiento.

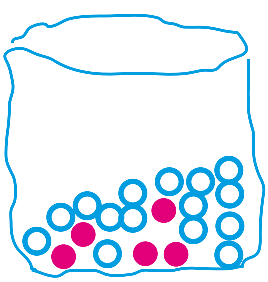
5. De una urna, con cinco bolas blancas y cuatro negras, se sacan cuatro sin reposición. Calcula la probabilidad de obtener:
   a) por lo menos una bola blanca. b) bolas de ambos colores.

Ejercicio 3.2 (Cont.)

6. Hay tres urnas: en la I se han puesto tres bolas blancas y dos negras; en la II hay cuatro bolas blancas y una negra y en la III dos blancas y dos negras. de cada una se escoge una bola. calcula la probabilidad de obtener:
   a) tres bolas blancas.
   b) por lo menos una bola blanca.
   c) una bola blanca.

7. En un juego de una caseta de feria se utiliza en primer lugar una ruleta. Si la ruleta se detiene en un número par, entonces el jugador puede sacar una canica de una bolsa. La ruleta y las canicas de la bolsa se representan en los dibujos siguientes.
   Cuando se saca una canica negra se gana un premio. Ariana juega una vez. ¿Qué tan probable es que Ariana gane un premio? Argumenta tu respuesta.
   A. Es imposible.
   B. No es muy probable.
   C. Tiene aproximadamente el 50% de probabilidad.
   D. Es muy probable.
   E. Es seguro.





Lección 3.3 Teorema de Bayes.

Objetivos: Calcular probabilidades de experimentos compuestos mediante el árbol de probabilidades.
Calcular probabilidades condicionales con ayuda del árbol de probabilidades.
Comprender y utilizar el teorema de Bayes.

En la unidad 2, estudiamos los sucesos compuestos. Entre estos suceso incluimos los relativos a la probabilidad condicional. Debido a que en ese momento nos restringimos a experimentos simples, es necesario ampliar dicho estudio a experimentos compuestos. Para ello, utilizaremos tanto el diagrama de Venn como el árbol de probabilidades. Para determinados problemas, debemos convertir la fórmula básica de la probabilidad condicional en la llamada fórmula de Bayes.

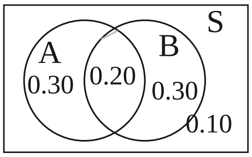
Actividad 3.3 a

Qué hacer

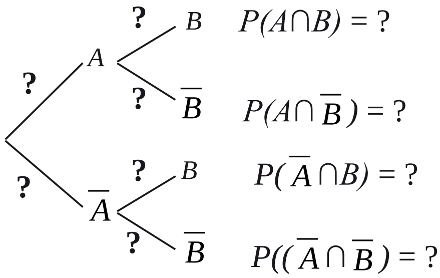
Repasa la lección (2.2) y a continuación contesta lo que se indica:

a. A partir de las probabilidades indicadas en el diagrama de Venn adjunto, determina:

a. $P(A)$ = ______
b. $P(B)$ = ______
c. $P(\overline{A})$ = ______
d. $P(\overline{B})$ = ____
e. $P(A \cap B)$ = ____
b. $P(A/B)$ = ______
f. $P(A/B)$ = ______
g. $P(B/A)$ = ______
h. $P(A/\overline{B})$ = ____
i. $P(B/\overline{A})$ =___



b. Con la información obtenida en (a), escribe en cada lugar ocupado por el signo (?) el valor que corresponde.



Probabilidad total

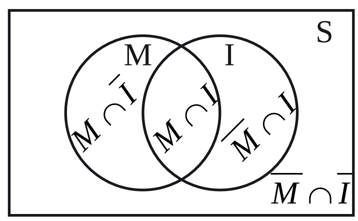
Recordemos la regiones en que se divide un diagrama de Venn. Para ello, volveremos ha analizar la situación planteada en la lección (2.4):

> *De los estudiantes de nuevo ingreso a la universidad el año pasado, el 12% reprobó inglés, 16% reprobó matemáticas y el 6% reprobó inglés y matemáticas.*

En este enunciado, hay dos sucesos involucrados: *reprobó inglés, reprobó matemáticas*

Sea: M el suceso: "*reprobó matemáticas*" e
I el suceso: "*reprobó inglés*"

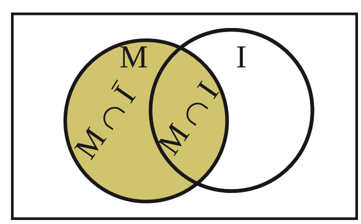
Con estos sucesos el rectángulo queda dividido en las siguientes regiones:



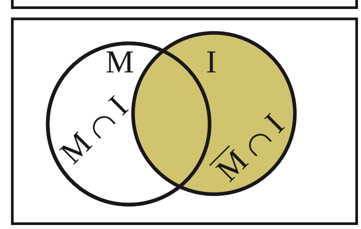
A partir de este diagrama dividido, podemos apreciar las siguientes equivalencias:

La notación $P(M)$ representa una **probabilidad simple**, y la notación $P(M \cap I)$ representa a una **probabilidad conjunta** y la única posibilidad de que ocurra es que tanto el suceso M como el I tienen que ocurrir en forma simultánea.

$$P(M) = P(M \cap \bar{I}) + P(M \cap I)$$

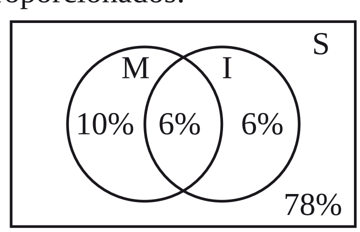


$$P(I) = P(M \cap I) + P(\bar{M} \cap I)$$



Ahora, consideremos los datos proporcionados:

$P(M) = 16\%$
$P(I) = 12\%$
$P(M \cap I) = 6\%$



Recordemos como calcular P(I /M)

$$P(I/M)=\frac{P(I\cap M)}{P(M)}=\frac{0.06}{0.16}=0.38$$

También calculemos P(I / $\overline{M}$):

$$P(I/\overline{M})=\frac{P(I\cap\overline{M})}{P(\overline{M})}$$

Del diagrama de Venn obtenemos, $P(I\cap\overline{M})=0.06$

De *P(M)* = 0.16, tenemos que: P($\overline{M}$) = 1 − 0.16 = 0.84

Entonces:

$$P(I/\overline{M})=\frac{P\left(I\cap\overline{M}\right)}{P\left(\overline{M}\right)}=\frac{0.06}{0.84}=0.07$$

A continuación, estableceremos la relación que se presenta entre estos valores correspondientes a un diagrama de Venn y las probabilidades que se incluyen en un árbol de probabilidades.

El diagrama de Venn y el árbol de probabilidades

Ahora, estableceremos una relación entre las regiones de un diagrama de Venn y un árbol de probabilidades. Para ello, consideraremos que los sucesos compuestos, pueden verse como resultado de un experimento compuesto.

En la situación que estamos analizando podemos hablar de cuatro sucesos:

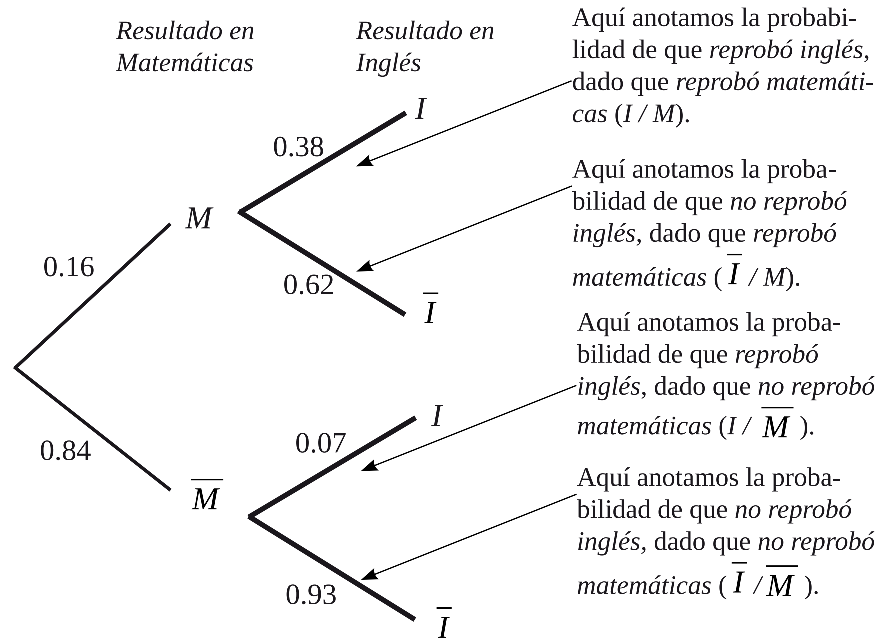
M: “*reprobó matemáticas*”.
$\overline{M}$: “*no reprobó matemáticas*”.
I: “*reprobó inglés*”.
$\overline{I}$: “*no reprobó inglés*”.

Con estos sucesos, podemos suponer que estamos ante un experimento compuesto de dos etapas.

Primera etapa: Investigar si reprobó matemáticas. Posibilidades: *M*, $\overline{M}$.

Segunda etapa: Investigar si reprobó inglés. Posibilidades: *I*, $\overline{I}$.

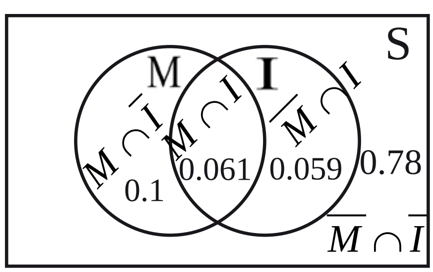
Por tanto, podemos construir un árbol de probabilidades:

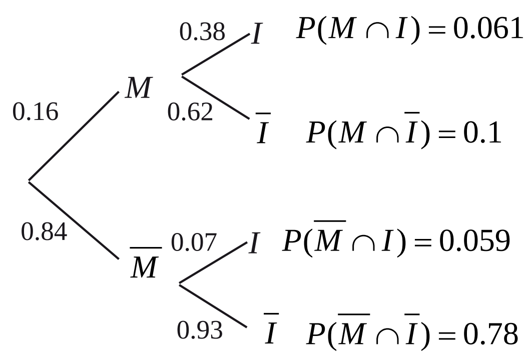


A partir de este árbol podemos calcular.

$$P(M \cap I) = P(M)P(I / M) = (0.16)(0.38) = 0.061$$
$$P(M \cap \overline{I}) = P(M)P(\overline{I} / M) = (0.16)(0.62) = 0.1$$
$$P(\overline{M} \cap I) = P(\overline{M})P(I / \overline{M}) = (0.84)(0.07) = 0.059$$
$$P(\overline{M} \cap \overline{I}) = P(\overline{M})P(\overline{I} / \overline{M}) = (0.84)(0.93) = 0.78$$

Analizemos cada uno de los sucesos compuestos que aparecen tanto en el diagrama de Venn como en el árbol de probabilidades:





Observa en ambas figuras los sucesos conjuntos que componen la probabilidad del suceso *M*:

$$P(M) = P(M \cap \overline{I}) + P(M \cap I) \qquad (1)$$

Es decir, el suceso *M* está formado por todos los sucesos conjuntos en los que aparece *M*.

De manera similar observamos que la probabilidad del suceso I está compuesto por las siguientes probabilidades conjuntas:

$$P(I) = P(M \cap I) + P(\overline{M} \cap I) \qquad (2)$$

Las expresiones (1) y (2) son llamadas ***fórmulas de la probabilidad total.*** En el caso estudiado, las probabilidades simples de M e I, sólo incluyeron dos probabilidades conjuntas, pero en general pueden existir más de dos, tal y como se muestra en el ejemplo 2 planteado a continuación.

Ejemplo 1

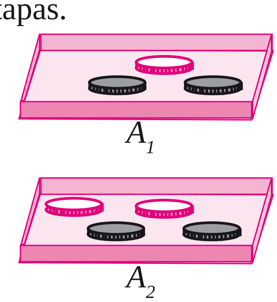
Una caja contiene 2 fichas negras y 1 blanca y una segunda caja contiene 2 fichas negras y 2 blancas. Se elige una de las cajas al azar y se toma una ficha de la misma. ¿Qué probabilidad hay de que la ficha extraída sea negra?

Solución

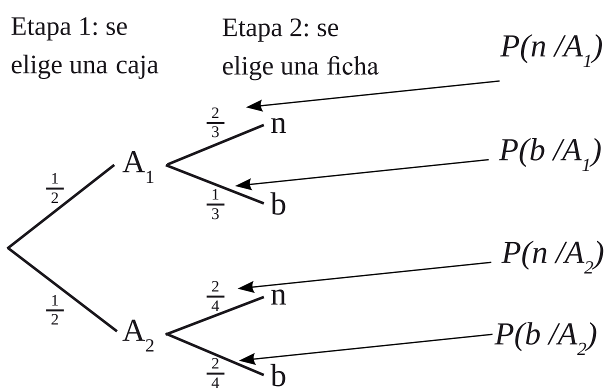
Descripción del experimento: experimento de dos etapas.

En la 1ra. se selecciona una de las cajas: sean A_1 y A_2 estas cajas.

En la 2da. se extrae una ficha; opciones: negra (n) o blanca (b)



En una selección al azar cada caja tiene la misma probabilidad de ser seleccionada, por lo que se infiere que la probabilidad de tomar la primera caja es de 1/2 y que la probabilidad de tomar la segunda caja es también 1/2.



Elegir n puede darse por dos caminos, a saber tomando la primera caja y entonces una ficha negra o tomando la segunda caja y una ficha negra.

Sale una negra: $\{A_1 n, A_2 n\}$

Expresando la probabilidad del suceso negra como una suma de probabilidades conjuntas:

$$P(n) = P(A_1 n) + P(A_2 n)$$

Aplicando la regla de multiplicación

$$P(n) = P(A_1)\, P(n / A_1) + P(A_2)\, P(n / A_1)$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{2}{3}\right) + \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{2}{4}\right) = \left(\frac{7}{12}\right)$$

Ejemplo 2

Un niño tiene tres bolsas con monedas de un peso y de a cinco. La distribución de las bolsas es la siguiente:

Bolsa A: 3 monedas de un peso y 5 de a cinco
Bolsa B: 8 monedas de un peso y 3 de a cinco
Bolsa C: 5 monedas de un peso y 4 de a cinco.

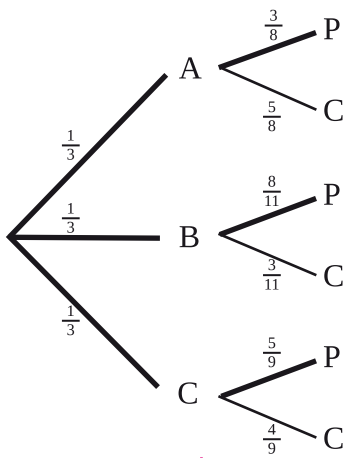
Se elige una de las bolsas al azar y sacamos una moneda aleatoriamente de la misma. ¿Qué probabilidad tiene de ser de a peso?

Solución

Experimento de dos etapas:

En la 1ra. se selecciona una bolsa: opciones: A, B o C.

En la 2da. tomar una moneda; opciones: de a peso (P) o de a cinco (C)



Tres caminos para llegar a un peso:

$P(P) = P(A \cap P) + P(B \cap P) + P(C \cap P)$
$= P(A)\, P(P/A) + P(B)\, P(P/B) + P(C)\, P(P/C)$

(Expresión de la probabilidad total)

Sustituyendo:

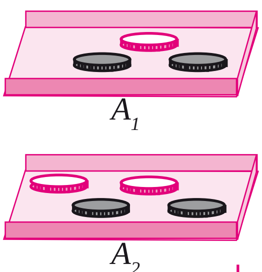
$$P(P) = \left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{3}{8}\right) + \left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{8}{11}\right) + \left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{5}{9}\right)$$
$$= 0.125 + 0.091 + 0.185$$
$$= 0.401$$

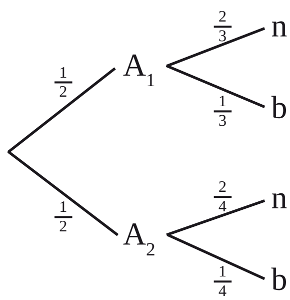
Ejemplo 3

Consideremos ahora, la siguiente variante:

En el *ejemplo 1*, si la ficha es negra, ¿qué probabilidad hay de que proviniese de la primera caja?

Se pide: $P(A_1 / n) = \dfrac{P(A_1 \cap n)}{P(n)}$





El numerador es simplemente el producto (1/2)(2/3) (primera rama del árbol) que equivale a:

$P(A_1 \cap n)$. Pero esta probabilidad es igual a: $P(A_1)\, P(n / A_1)$

Ahora, el denominador viene dado por la expresión de la probabilidad total:

Ejemplo 3
(Cont:)

$$P(n) = P(A_1)\,P(A/P) + P(A_2)\,P(n/A_1)$$

Entonces:

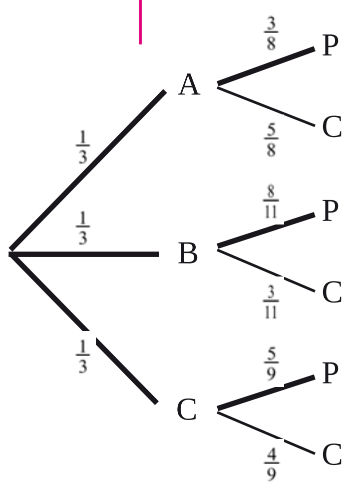
$$P(A_1/n) = \frac{P(A_1 \cap n)}{P(n)} = \frac{P(A_1)\,P(n/A_1)}{P(A_1)\,P(n/A_1) + P(A_2)\,P(n/A_1)}$$

$$= \frac{\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{2}{3}\right)}{\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{2}{3}\right)+\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{2}{4}\right)} = \frac{1/3}{7/12} = \frac{4}{7}$$

Ejemplo 4

En el *ejemplo 2*, si hemos sacado un peso, ¿cuál es la probabilidad de que proceda de la bolsa A?

Se pide: $P(A/P) = \dfrac{P(A \cap P)}{P(P)}$



El numerador es: $P(A \cap P) = P(A)\,P(P/A)$

$$= \left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{5}{8}\right)$$

$$= 0.208$$

El denominador viene dado por la expresión de la probabilidad total:

$$P(P) = P(A)\,P(P/A) + P(B)\,P(P/B) + P(C)P(P/C)$$

$$P(P) = \left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{3}{8}\right)+\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{8}{11}\right)+\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{5}{9}\right)$$

$$= 0.401$$

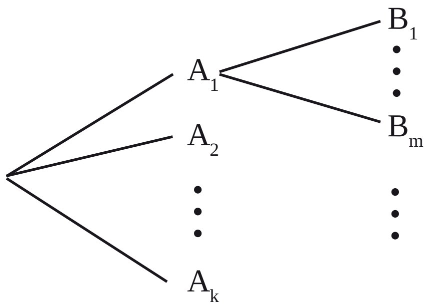
Por lo tanto: $P(A/P) = \dfrac{P(A_1)\,P(P/A)}{P(A)\,P(P/A) + P(B)\,P(P/B) + P(C)\,P(P/C)}$

$$= \frac{0.208}{0.401} = 0.519$$

La probabilidad de que el peso sea de la bolsa A es de 0.519

OBSERVACIONES. Los problemas precedentes, consistieron en lo siguiente:

- Son experimentos de dos etapas.
- La 1ra. etapa se puede describir afirmando que exactamente uno de k posibles resultados deberá ocurrir (en los ejemplos, elegir alguna de las bolsas o cajas).
- En la 2da. etapa, deberá ocurrir exactamente uno de *m* resultados posibles.
- Los valores de las probabilidades para cada uno de los resultados A_k son conocidos al igual que las probabilidades condicionadas del tipo $P(B_j/A_i)$



El problema consiste en calcular la probabilidad de que el evento de la primera etapa A_i haya ocurrido cuando se sabe que ha ocurrido el evento B_j.

Este tipo de experimentos se llaman bayesianos y las probabilidades pueden calcularse mediante la fórmula de Bayes.

Para llegar a esta fórmula, empezaremos por identificar que el problema planteado es una probabilidad condicional $P(A_i / B_j)$.

Para mayor sencillez, en la notación se llevará a cabo el desarrollo para $P(A_1/B_1)$.

Los cálculos para cualquier otra pareja de eventos serán los mismos.

En términos de la fórmula de la probabilidad condicional tenemos:

$$P(A_1 / B_1) = \frac{P(A_1 \cap B_1)}{P(B_1)} \qquad (1)$$

Aplicando la regla de la multiplicación al numerador obtenemos:

$$P(A_1 \cap B_1) = P(A_1)\, P(B_1 / A_1) \qquad (2)$$

El valor de $P(B_1)$ puede calcularse por la expresión de la probabilidad completa la cual expresa la probabilidad de un evento como una suma de probabilidades conjuntas. En otras palabras, esta expresión nos dice que, el evento de la 2da. etapa B_1 ocurrirá si el evento de la 1ra. etapa A_1 ha ocurrido y entonces B_1 ocurre, o si el evento de la 1ra. etapa A_2 ocurre y luego ocurre el evento de la 2da. etapa B_1, ..., o si el evento de la 1ra. etapa A_k ocurre y es seguido por el evento B_1 de la 2da. etapa.

Luego entonces:

$$P\,(B_1)\; P(A_1 \text{ y } B_1) + P(A_2 \text{ y } B_1) + \ldots + P(A_k \text{ y } B_1)$$

Por la regla de multiplicar:

$$P\,(B_1)\; P(A_1)\, P(B_1/A_1) + P\,(A_2)\, P(B_1/A_2) + \ldots + P\,(A_k)\, P(B_1 / A_k) \qquad (3)$$

Sustituyendo (3) y (2) en (1), obtenemos la fórmula de Bayes:

$$\boxed{P\,(A_1 / B_1) = \frac{P\,(A_1)\, P(B_1 / A_1)}{P\,(A_1)\, P(B_1 / A_1) + P(A_2)\, P(B_1 / A) + \ldots + P\,(A_k)\, P(B_1 / A_2)}}$$

Ejemplo 1

Un aparato para probar bulbos de radio siempre detecta un bulbo defectuoso, pero en el 2% de las veces en que indica que un bulbo está malo, se tiene que en verdad, el bulbo está en buen estado. Si el 97% de los bulbos fabricados son buenos, ¿ qué probabilidad hay de que un bulbo nuevo elegido al azar y señalado como defectuoso por el aparato sea en realidad un bulbo en buenas condiciones?

Solución

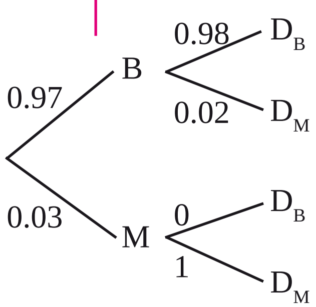
Descripción del experimento: experimento de dos etapas:

- En la 1ra. etapa calidad real del bulbo, opciones: bueno (B) o malo (M).
- En la 2da. etapa prueba de detección, opciones: detectado bueno (D_B) o detectado (D_M)

Se pide: $P(B/D_M)$

Datos: $P(B) = 0.97$ y $P(M) = 0.03$

$P(D_M /B) = 0.02$ y $P(D_M /M) = 1$



$$P(B / D_M) = \frac{P(B \cap D_M)}{P(D_M)}$$

$$= \frac{P(B)\ P(D_M / B)}{P(B)\ P(D_M / B)\ P(M)\ P(D_M / M)}$$

$$= \frac{(0.97)\ (0.02)}{(0.97)\ (0.02) + (0.03)(1)} = 0.39$$

Por lo tanto, alrededor del 39% de las veces que un bulbo nuevo es detectado en mal estado por el aparato, de hecho es un bulbo en buen estado.

Ejemplo 2

Dos fábricas producen lámparas eléctricas; la 1ra. proporciona el 70% y la 2da. el 30% de la producción global. Por otra parte, sobre 100 lámparas suministradas por la 1ra. fábrica, un promedio de 83 se ajustan a las normas prescritas mientras que en el caso de la 2da. fábrica dicha media solo alcanza el 63%. Un comprador adquiere una lámpara que resultó buena. ¿Cuál es la probabilidad de que provenga de la 1ra. fábrica?

Descripción del experimento, dos etapas:

Solución

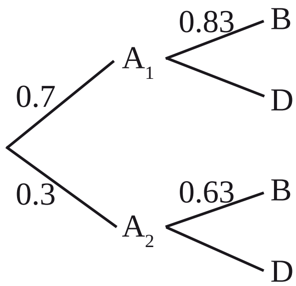
En la 1ra. se elige una fábrica: A_1 o A_2.

En la 2da. nos interesa el estado de la lámpara: buena (B) o mala (M)

Ejemplo 2 (Cont.)

Revisión de los datos:

"La 1ra. proporciona el 70% de las lámparas: $P(A_1) = 0.70$"
"La 2da. proporciona el 30% de las lámparas: $P(A_2) = 0.30$"
"Sobre 100 lámparas suministradas por la 1ra. 83 son buenas: $P(B/A_1) = 0.83$"
"De las lámparas de la 2da. 63% son buenas: $P(B/A_2) = 0.63$"



$$P(A_1 / B) = \frac{P(A_1 \cap B)}{P(B)}$$

$$= \frac{P(A_1)\, P(B / A_1)}{P(A_1)\, P(B / A_1) + P(A_2)\, P(B / A_2)}$$

$$= \frac{(0.7)\,(0.83)}{(0.7)\,(0.83) + (0.3)(0.63)} = 0.75$$

Ejercicio 3.3

1. La probabilidad de que el artículo fabricado en un taller satisfaga las normas exigidas es igual a 0.96. Se propone la adopción de un procedimiento simplificado de control que identifica como "buenos" con una probabilidad de 0.98, los artículos que realmente se sujetan a las normas y con una probabilidad solo de 0.05 los que no las satisfacen. ¿Cuál será la probabilidad de que un artículo que haya pasado la prueba con éxito por este control simplificado se ajuste efectivamente a las normas?
2. Supóngase que una prueba para detectar cierta enfermedad bastante rara se ha perfeccionado al grado que puede descubrir la enfermedad en el 97% de los individuos atacados. También ocurre que cuando se hace la prueba a individuos sanos el 5% de ellos son diagnosticados de manera incorrecta como padeciendo la enfermedad. Finalmente, cuando se hace la prueba a individuos que tienen otras enfemedades más leves el 10% de ellos sufrirá un diagnóstico incorrecto. Se sabe que los porcentajes de individuos de los tres tipos considerados aquí en la población en grande son el 1%, el 96% y el 3%, respectivamente. Calcular la probabilidad de que un individuo elegido al azar en la población y sometido a la prueba de hecho tenga la enfermedad si la prueba así lo indica.
3. Un joyero compra los relojes a dos casas proveedoras. La primera le sirve el 60% de los relojes, de los que el 0.4% son defectuosos, la segunda le proporciona el resto, siendo defectuosos el 1.5%. Un día, el joyero al vender un reloj observa que éste no funciona. Hallar la probabilidad de que el reloj provenga de la primera casa proveedora.
4. Una emisora de televisión emite dos series A y B. La serie A la ve el 20% de la población, mientras que la B solo la ve el 15%, pero mientras el 70% de los que empiezan a ver la serie A la siguen hasta el final, en cambio el 80% de los que empiezan la B la acaban. Una persona nos dice que terminó de ver la serie que había empezado. ¿Cuál es la probabilidad de que fuera la serie A?
5. Con los mismos datos del problema 1, ¿cuál será la probabilidad de que un artículo que haya pasado dos veces con éxito por el control simplificado se ajuste efectivamente a las normas?

Lección 3.4 Cálculo de probabilidades de experimentos compuestos. Conteo mediante técnicas de la combinatoria.

Objetivos: Entender y ser capaz de utilizar los conceptos combinatorios.
Calcular probabilidades usando las fórmulas de la combinatoria.

En las lecciones previas de esta unidad, aprendiste a calcular probabilidades de sucesos mediante la regla de Laplace y la regla de multiplicación. Para contar los resultados favorables a dichos sucesos, te auxiliaste del diagrama de árbol y del árbol de probabilidades. Con estas herramientas, puedes resolver una gran gama de problemas, sin embargo tienen la limitación de que se vuelven imprácticos cuando el número de etapas del experimento es grande. Por ejemplo, al lanzar dos dados tenemos 36 resultados posibles, los cuales podemos enlistarlos con relativa facilidad, pero, si lanzamos el dado 4 veces por ejemplo, los resultados obtenidos son 1296. Por ello, debemos ahora, aprender a contar resultados sin necesidad de enlistarlos. Ésto, se logra aplicando las técnicas de la rama de la matemática llamada ***combinatoria.***

Actividad 3.4 a

Qué hacer

Utilizando un diagrama de árbol, resuelve lo indicado:

- Se lanza una moneda seis veces de manera consecutiva.
  a. ¿Cuántos resultados posibles hay?
  b. ¿Cuál es la probabilidad de obtener exactamente dos águilas?

- ¿Qué tan fácil es aprobar por adivinación un examen de 5 preguntas de opción múltiple, si cada pregunta tiene cinco opciones de las cuales sólo una es correcta? Considera que se aprueba al contestar correctamente al menos tres preguntas.

	A	B	C	D	E
1.	( )	( )	( )	( )	( )
2.	( )	( )	( )	( )	( )
3.	( )	( )	( )	( )	( )
4.	( )	( )	( )	( )	( )
5.	( )	( )	( )	( )	( )

Principio fundamental de conteo

El diagrama de árbol nos muestra todos los posibles resultados de un experimento compuesto. Sin embargo, si el experimento consta de varias etapas o de muchos elementos generadores, nos resultará prácticamente imposible dibujar un diagrama completo. Pero, como ya se pudo apreciar con el cálculo de probabilidades, estamos interesados más en el número de resultados que en cuales son.

El principio fundamental de conteo (PFC) proporciona el número de resultados posibles.

Para desarrollar este principio, recordaremos con algunos ejemplos, la construcción de diagramas de árbol.

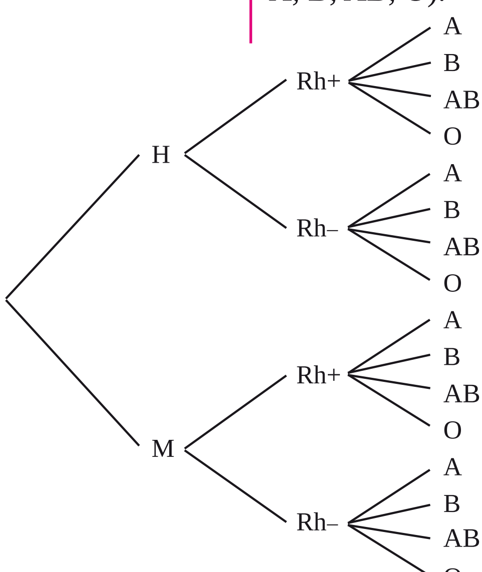
Ejemplo 1

El suero de la sangre, permite clasificar a las personas en cuatro grupos sanguíneos A, B, AB y O. También puede existir en la sangre de los seres humanos el factor Rh (de Macacus Rhesus); si éste se presenta en el individuo, se dice que tiene factor Rh positivo: Rh+; y si no aparece, se dice que tiene factor Rh negativo: Rh-.Cuando la mujer tiene factor Rh+, y el hombre Rh– y alguno de sus hijos nace con factor Rh+ puede presentar serios problemas en el nacimiento.

Utilizando un diagrama de árbol, clasifica a los individuos de acuerdo al sexo, al factor Rh y al grupo sanguíneo. ¿Cuántas clasificaciones pueden hacerse?

Solución

El paso inicial para resolver este problema consiste en dividir primero al conjunto de los seres humanos en dos clases: el de los hombres(H) y el de las mujeres (M). Una vez hecho esto, cada clase se subdivide en otras dos, en base al factor Rh, obteniéndose así cuatro subclases. Finalmente, se divide cada una de las subclases en otros cuatro, tomando en cuenta el grupo sanguíneo(A, B, AB, O).



2 opciones | 2 opciones para cada una de las anteriores. | 4 opciones para cada una de las anteriores.

El árbol contiene toda la información para clasificar a los individuos de acuerdo al sexo, al factor Rh y al grupo sanguíneo. Cada trayectoria o camino del árbol representa un tipo sanguíneo.

Al dividir por sexo, hay *dos* opciones: *H* o *M.*

Cada una de estas opciones se divide con base al factor Rh, en otras *dos* opciones: Rh+ o Rh-

Finalmente cada una de las subclases ya obtenidas, se divide tomando en cuenta el grupo sanguíneo en otras *cuatro* opciopnes: A, B, AB u O.

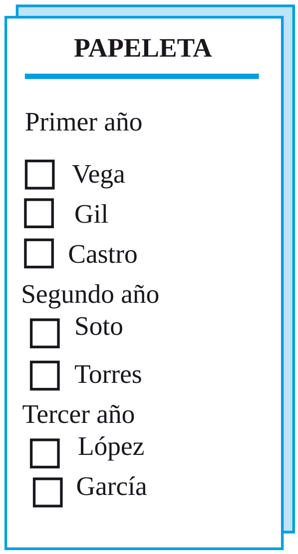
Observa que en total hay 16 clasificaciones diferentes de tipos sanguíneos y sexo.

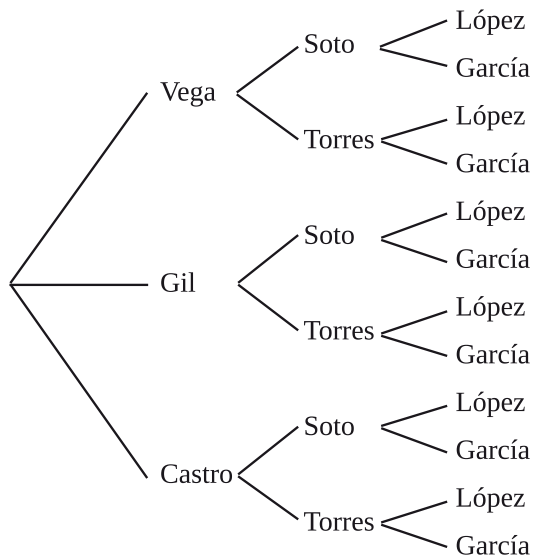
Observa también que el total igual a 16 puede obtenerse de la siguiente manera:

$$2\times2\times4 = 16.$$

Ejemplo 2

En la preparatoria van a elegir consejeros técnicos alumnos, uno por cada grado. La papeleta electoral siguiente muestra un resultado posible de la elección y el diagrama de árbol de la derecha muestra todos los resultados posibles.





Esta elección tiene 12 resultados posibles.
La primera lista del diagrama (1er. Año) es generada por tres elementos: Vega, Gil o Castro.
La segunda lista (2do. Año) es generada por dos elementos: Soto o Torres.
La tercera lista es generada por dos elementos: López o García.
Podemos hacer el siguiente razonamiento: puesto que hay 3 opciones para primer año, 2 para segundo y 2 para tercero, el total de resultados posibles para la elección es: $3 \times 2 \times 2 = 12$.

Ejemplo 3

Cuatro amigos juegan dos partidos de boliche y, al final de cada uno, anotan al vencedor. ¿De cuántas maneras posibles se puede llenar la hoja adjunta?

	1er partido	2$^{do.}$ partido
Vencedores		

¡EXPERIMENTA, JUEGA CON EL PROBLEMA!

Llena algunas boletas ficticias.
En situaciones nuevas como ésta, debemos describir cuidadosamente el experimento. Para ello, hay que identificar dos cuestiones claves:

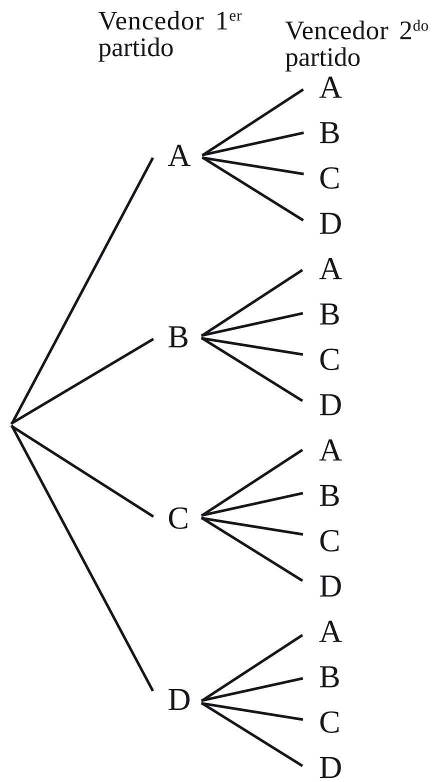
1º ¿De cuántas etapas consta el experimento, es decir, los resultados son pares, triadas,...? En este ejemplo, puesto que se jugarán dos partidos, los resultados serán parejas.

2º ¿Qué elementos generan cada una de las etapas? En este caso, será un conjunto de cuatro amigos.

Ejemplo 3
(Cont.)

USA UNA BUENA NOTACIÓN

Si llamamos A, B, C y D a cada uno de los cuatro amigos , entonces el primer partido lo podrá ganar A, B, C o D y el segundo partido también lo podrá ganar A, B, C o D.



Para tomar en cuenta todas las posibilidades, hay que poner a cada posible vencedor del 1er. partido con cada posible vencedor del 2do.

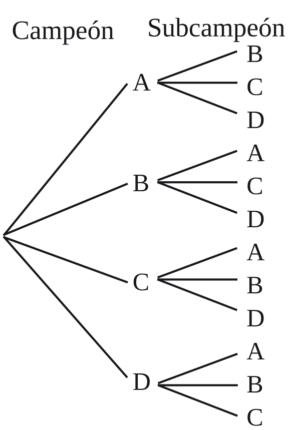
Hay $4 \times 4 = 16$ posibilidades

Ejemplo 4

Los mismos 4 amigos del problema anterior juegan un campeonato de ajedrez, en el que reparten dos copas: una para el primer lugar y la otra para el segundo. ¿De cuántas maneras posibles se pueden obtener los resultados?

Descripción del experimento:

1º. ¿De cuántas etapas consta el experimento? Puesto que se juegan dos premios, son dos etapas.
2º. ¿Qué elementos generan cada uno de los posibles resultados de las etapas? Un conjunto de cuatro amigos.
3º. Notación: Elementos que generan los resultados: A, B, C y D.



Razonamiento: Puesto que los participantes se llaman A, B, C y D, para el primer lugar tenemos 4 opciones: A, B, C y D. Pero, para el segundo lugar sólo tenemos tres opciones porque el campeón no puede ser a la vez subcampeón.

4 posibilidades para el campeón

Por cada una de las anteriores, hay 3 posibilidades

Cada una de las cuatro primeras ramas, solamente tiene tres brotes: hay $4 \times 3 = 12$ maneras de repartir las copas.

Ahora, estableceremos el principio fundamental de conteo (*PFC*). Para ello, observa que, en los diagramas de árbol construidos, estuvimos aplicando el *PFC* al multiplicar el número de posibilidades de cada etapa para obtener el total de resultados.

Principio fundamental de conteo. El número de resultados de un experimento compuesto, es igual al producto del número de resultados posibles en que se puede llevar a cabo cada etapa.

Es decir, si un experimento consiste de n etapas en donde la primera etapa puede ocurrir de N_1 maneras, y la segunda etapa puede ocurrir de N_2 maneras y así sucesivamente hasta la etapa n, entonces podemos concluir que el número total de resultados posibles que se pueden formar es:

$$\text{Número de resultados posibles: } n(S) = N_1 \cdot N_2 \cdot N_3 \cdot \ldots \cdot N_n$$

El principio fundamental de conteo es un sustituto del diagrama de árbol, pero para poder aplicarlo debemos precisar las dos cuestiones ya vistas:

- El número de etapas del experimento (necesitamos saber si los resultados serán parejas, triadas, etcétera).
- Los resultados posibles de cada etapa. Un diagrama de árbol bosquejado puede ser de gran ayuda.

Ejemplo 1

Diez amigos se juegan tres trofeos. ¿De cuántas maneras posibles pueden repartírseles?

Descripción del experimento

1º ¿De cuántas etapas consta el experimento? De tres, se juegan tres lugares (los resultados serán triadas de la forma: (N_1, N_2, N_3)).

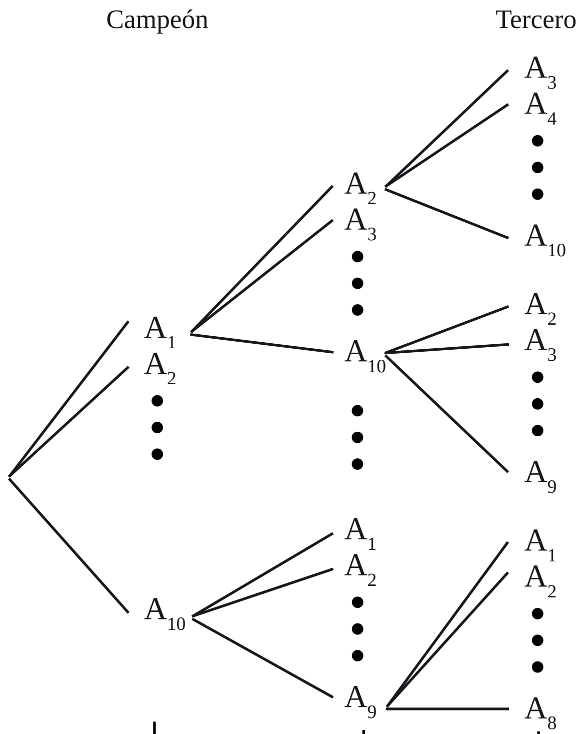
2º ¿Qué elementos generan las opciones de cada una de las etapas? Una población de diez amigos

Recomendación

Utiliza una buena notación. Población de 10 amigos: $\{A_1, A_2, A_3, \ldots, A_{10}\}$.

Algunos resultados: $A_1A_2A_{10}$ $A_8A_9A_1$ $A_1A_6A_3$ ...

Ejemplo 1
(Cont.)



10 posibilidades
$N_1 = 10$

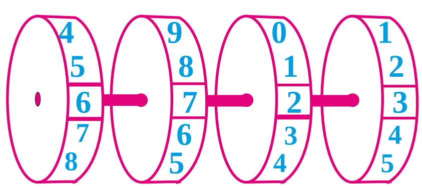
9 posibilidades por cada una de las anteriores
$N_2 = 9$

8 posibilidades por cada una de las anteriores
$N_3 = 8$

En total, por el PFC tenemos:
$10 \times 9 \times 8 = 720$ posibilidades

Ejemplo 2

Un sorteo consiste en formar los números premiados haciendo girar cuatro ruedas, cada una con diez dígitos



Determine el total de números que se pueden formar.

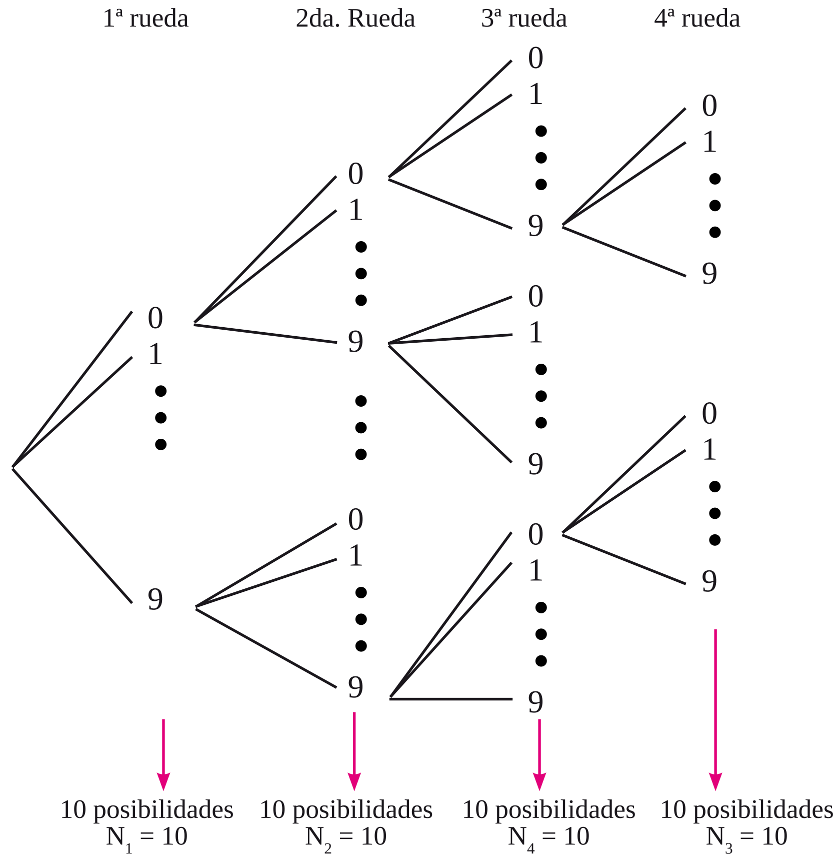
Descripción del experimento

1º ¿De cuántas etapas consiste el experimento? De cuatro.

2º ¿Quién genera los elementos de cada etapa? Los diez dígitos de cada rueda: {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}.

Ejemplo 2 (Cont.)

Algunos resultados: 0947   0793   4370   ...



Total de números por el *PFC* $= N_1 \cdot N_2 \cdot N_3 \cdot N_4$

$= 10 \times 10 \times 10 \times 10$

$= 10000$

Ejemplo 3

Lanzamos un dado tres veces sucesivamente, ¿cuántos son los resultados posibles?

Descripción del experimento

1º ¿De cuántas etapas consiste el experimento? De tres.

2º ¿Quién genera los elementos de cada etapa? Las caras del dado: $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Algunos resultados: 111   211   653   222   ... ¿Cuántos son?

Los resultados son de la forma $N_1 \times N_2 \times N_3$

N_1 puede tomar 6 valores   (1, 2, 3, 4, 5, 6)

N_2 puede tomar 6 valores   (1, 2, 3, 4, 5, 6)

N_3 puede tomar 6 valores   (1, 2, 3, 4, 5, 6)

Total de resultados posibles: $6 \times 6 \times 6 = 216$

Ejemplo 4

En el estado de Sinaloa, las placas de los automóviles constan de tres letras y cuatro dígitos. La primera letra siempre es V, la segunda F o G, y la tercera, cualesquiera de las siguientes letras: A, B, C, D, E, F, G, H, I ,J, K, L, M, N, O, P, Q, R, S, T, U, V, W, X, Y, Z. Determine el número de placas diferentes que se pueden formar

Descripción del experimento

1º ¿De cuántas etapas consta el experimento? De 7, se seleccionan tres letras y cuatro números. Los resultados son de la forma: $N_1N_2N_3N_4N_5N_6N_7$

2º ¿Qué elementos generan las posibilidades?

N_1 (1ª posición):	V (1 letra)
N_2 (2ª posición):	F o G (2 letras)
N_3 (3ª posición):	A, B, C.....X, Y o Z (26 letras)
N_4 (4ª posición):	0, 1, 2, 3....9 (10 dígitos)
N_5 (5ª posición):	0, 1, 2, 3...9 (10 dígitos)
N_6 (6ª posición):	0, 1, 2, 3,...9 (10 dígitos)
N_7 (7ª posición):	0,1, 2, 3,...9 (10 dígitos)

Algunos resultados: VFA1229 VFF0013 VGI1248 ...

¿Cuántos son?

Número de placas distintas: (1)(2)(26)(10)(10)(10)(10) = 520000

Actividad 3.4 b

1. El lenguaje de una computadora se traduce a secuencias de dígitos formados por ceros y unos. Un byte es una de estas secuencias y está formado por 8 dígitos. Por ejemplo:

0	0	1	0	1	1	0	1

¿Cuántos bytes diferentes se pueden formar?

2. ¿Cuántos números telefónicos de siete dígitos se pueden formar si el primer dígito es siete y se permite repetir dígitos?

3. Una muchacha tiene 6 blusas, 4 pantalones y 3 pares de tenis. ¿Entre cuántas indumentarias distintas puede escoger para dar un paseo en bicicleta?

4. Cinco niños echan una carrera. ¿De cuántas formas pueden ordenarse al llegar a la meta? No hay empates.

5. ¿De cuántas formas puede un entrenador de un equipo de fútbol escoger un portero, un primer suplente y un segundo suplente de siete candidatos?

6. Un dado "honesto" es lanzado cuatro veces. ¿Cuántos resultados hay en el espacio muestral de este experimento que registra para cada lanzamiento el número de puntos obtenido?

7. Un estudiante planea un viaje de Culiacán a Los Mochis y de allí a Chihuahua. De Culiacán a Los Mochis puede viajar por autobús, tren o avión; sin embargo, de Los Mochis a Chihuahua, puede viajar solamente por tren o avión.
   a) ¿De cuántas formas puede hacerse el viaje?
   b) Verifique su respuesta dibujando un diagrama de árbol apropiado y contando los resultados.

8. Se lanza un dado y se extrae una ficha de una caja que contiene tres fichas numeradas 1, 2 y 3. ¿De cuántas formas puede realizarse el experimento?

9. Hay seis caminos de A a B y cuatro caminos entre B y C.
   a) ¿De cuántas formas se puede conducir de A a C pasando por B?
   b) ¿De cuántas formas se puede conducir en un viaje redondo de A a B, de B a C, y luego regresar a A pasando por B?

10. Un examen de Historia contiene una pregunta falso/verdadero y dos preguntas de opción múltiple con respuestas posibles (a), (b), (c) y (d).
    a) ¿De cuántas formas posibles puede responderse la prueba?
    b) Dibuje un diagrama de árbol y cuente las opciones para comprobar (a).

11. Se va a lanzar una moneda seis veces. ¿Cuántos resultados habrá en el espacio muestral equiprobable?

12. Se lanza un dado 6 veces. ¿Cuántos resultados habrá en el espacio muestral equiprobable?

13. ¿De cuántas formas pueden alinearse 7 estudiantes tras la puerta de la dirección para plantear un problema?

14. En un concurso de belleza, hay 11 candidatas de entre las cuales se van a escoger las ganadoras a un primer lugar, un segundo y un tercer lugar. ¿De cuántas formas puede darse el fallo?

15. Las placas para un cierto estado exhiben 3 letras seguidas por 3 números (Ejemplos: MFT-986 o AAT-099). ¿Cuántas placas distintas pueden manufacturarse?

16. Los números de identificación para los empleados de una gran fábrica consisten de números de cuatro dígitos (tales como 0133 ó 4499 ó 0000).
    a) ¿Cuántos números de identificación posibles hay?
    b) ¿Cuántos números de identificación posibles hay en los que los 4 dígitos sean diferentes?

Antecedentes de permutaciones y combinaciones

Cuando se aplica el principio fundamental de conteo, los resultados obtenidos difieren uno de otro por alguna de las siguientes razones:

- Tienen elementos diferentes.
- Tienen los mismos elementos pero distinto orden.

Por ejemplo: En una urna hay dos canicas: una roja y una azul. Se extraen dos canicas una tras otra sin reemplazamiento.

El principio fundamental de conteo (y también el diagrama de árbol), nos da dos resultados:

1ra. ext.	2da. ext.	Resultados
r	a	ra
a	r	ar

Hay $2 \times 1 = 2$ resultados

La diferencia entre el resultado *ra* y el *ar*, es el orden en que fueron seleccionados.

ra ⟶ indica que salió primero roja y después azul
ar ⟶ indica que salió primero azul y después roja

Sin embargo, en muchas situaciones el orden no va a ser importante por lo que los resultados del principio fundamental de conteo, necesitarán de un ajuste.

Ejemplos

1. Se van a repartir dos boletos para un concierto entre tres muchachas. ¿Cuáles son las posibles asignaciones?

Solución:

Llamemos A, B y C a las tres muchachas.

Establezcamos el diagrama de árbol:

1ª asignación	2ª asignación	Resultados
A	B	AB
	C	AC
B	A	BA
	C	BC
C	A	CA
	B	CB

Ejemplos
(Cont.)

Según el principio fundamental de conteo (*PFC*), son (3)(2) = 6 resultados posibles.

Pero, ¿qué significa el resultado *AB*? Significa que la muchacha *A* gana y que la muchacha *B* gana. ¿Y el resultado *BA*? Significa que la muchacha *B* gana y que la muchacha *A* gana.

En el contexto de la pregunta, ¿hay alguna diferencia entre el resultado *AB* y *BA*? No, no hay diferencia, los dos resultados nos indican que las muchachas *A* y *B* irán al concierto.

Si el orden no importa, el diagrama de árbol (o el principio fundamental de conteo), no nos proporciona correctamente el total de resultados posibles. Debemos buscar un método alternativo para listar todos los posibles resultados.

Una forma de proceder es la siguiente:

■ Repartir 2 boletos entre 3 muchachas: A, B y C.

¡HAZLO MAS FÁCIL! Si sólo fuera un boleto, sólo iría una de las tres:

A *B* *C*

Como son dos, veamos quién puede acompañar a quién:

A	***B***	***C***
AB	*BC*	
AC		

Existen tres maneras de asignar dos boletos entre tres muchachas (no hay elementos repetidos, no importa el orden).

Observa que, para formar todas las posibilidades *hemos añadido a cada una, solamente las que le siguen en el orden alfabético.*

■ Supongamos ahora, que son 6 muchachas: *A, B, C, D, E* y *F.*

Si es un boleto, sólo puede ir una de ellas; las posibilidades son:

A *B* *C* *D* *E* *F*

Como son dos, le añadiremos a cada una, todas las que le siguen en el orden alfabético:

A	***B***	***C***	***D***	***E***	***F***
AB	*BC*	*CD*	*DE*	*EF*	
AC	*BD*	*CE*	*DF*		
AD	*BE*	*CF*			
AE	*BF*				
AF					

Son 15 asignaciones de 2 boletos entre 6 muchachas (no hay elementos repetidos, no importa el orden).

Ejemplos
(Cont.)

Supongamos ahora, que son tres boletos; seguiremos la misma técnica, es decir, añadiremos a cada par de elementos formados, los que le siguen en el orden alfabético a ambas.

A	***B***	***C***	***D***	***E***	***F***
ABC	*BCD*	*CDE*	*DEF*		
ABD	*BCE*	*CDF*			
ABE	*BCF*	*CEF*			
ABF	*BDE*				
ACD	*BDF*				
ACE	*BEF*				
ACF					
ADE					
ADF					

Hay 20 formas de repartir 3 boletos entre 6 muchachas.

2. Con cinco latas de pintura de distintos colores, ¿cuántas mezclas de dos colores se pueden hacer?

Solución

¡USA UNA BUENA NOTACIÓN!

Sean *A*, *R*, *V*, *N*, *B*, los cinco colores (azul, rojo, verde, negro, blanco).

Vamos a mezclar dos de ellos. **¿Importa el orden?**

La mezcla *AR* ¿es diferente de *RA*? No; no importa el orden. **Si planteamos el diagrama de árbol, tendremos resultados de más.** Usemos la técnica de agregar a cada elemento, los que le siguen en el orden establecido:

A	***R***	***V***	***N***	***B***
AR	*RV*	*VN*	*NB*	
AV	*RN*	*VB*		
AN	*RB*			
AB				

Son diez mezclas distintas.

3. En una urna hay 3 canicas: roja, negra y blanca. Extraemos dos canicas a la vez. ¿Cuáles son los resultados posibles?

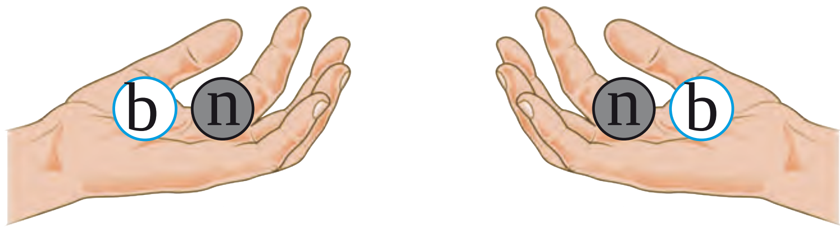
Solución

Sean **r**, **n** y **b** las tres canicas.

Las extracciones en problemas anteriores, se realizaban una tras otra. Ahora, es una extracción simultánea, así que no hay distinción por ejemplo, entre **nb** y **bn**.

Ejemplos
(Cont.)

Las extracciones en problemas anteriores, se realizaban una tras otra. Ahora, es una extracción simultánea, así que no hay distinción por ejemplo, entre **nb** y **bn**.



✍En una extracción simultánea, no se distingue el orden: blanca - negra es lo mismo que negra - blanca.

r	***n***	***b***
r n	*n b*	
r b		

Son tres resultados al extraer simultáneamente dos canicas de 3.

Actividad 3.4 C

1. Un hombre tiene en su bolsillo un billete de 20, uno de 50, uno de 100 y uno de 200 pesos. ¿Cuántas sumas diferentes de dinero podrá formar dicho individuo con el dinero que trae en el bolsillo si saca dos billetes?
2. Una urna contiene cinco bolas blancas y tres negras. Si se extraen dos bolas de esa urna, simultáneamente ¿cuáles son los posibles resultados?
3. En una alcancía hay un conjunto de monedas: una de 1 centavo, una de 5 y una de 10 centavos. ¿De cuántas maneras pueden elegirse dos de ellas para que la suma sea seis centavos?

¡AVANCEMOS!

Es evidente que, si aumentamos el número de elementos, listar todas las posibles agrupaciones se volverá impráctico. Pero, ya sabemos que no necesitamos la enumeración completa de cada uno de los resultados posibles, sólo necesitamos conocer el total de ellos.

Obtendremos este total, a partir de lo que ya sabemos hacer: diagrama de árbol y principio fundamental de conteo.

¡ESTRATEGIA!

Considerar primero que importa el orden y posteriormente deshacer ese orden.

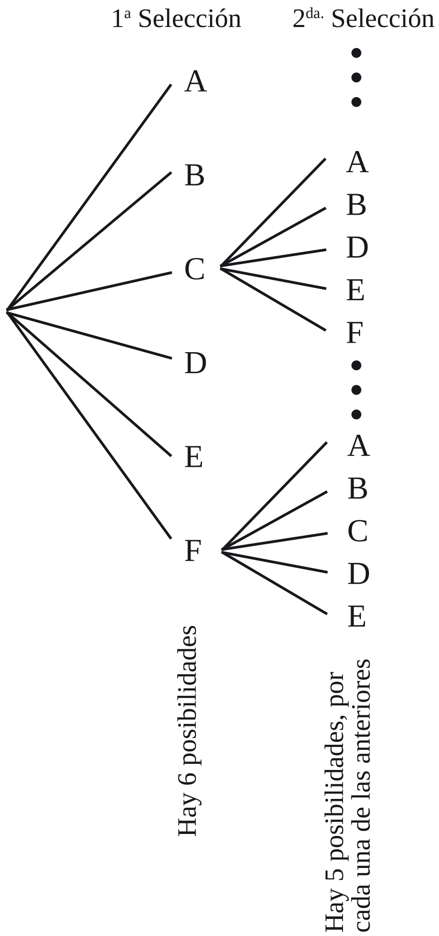
Ejemplos

1. Se van a repartir dos boletos entre seis muchachas. ¿De cuántas formas se pueden repartir los dos boletos?

Solución:

Aplicando el principio fundamental de conteo *(PFC)* tendríamos que es un experimento de dos etapas:

En la primera seleccionamos *A, B, C, D, E* o *F.*
En la segunda seleccionamos *A, B, C, D, E* o *F* exceptuando la que se seleccionó en la primera.



Según el *PFC* el número de asignaciones es: $6 \times 5 = 30$

Pero, entre estos 30 resultados, se considera el orden; es decir, los resultados *AB* y *BA*, *AC* y *CA* por ejemplo, se cuentan como diferentes.

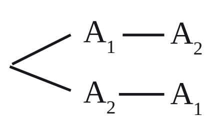
¡Cada resultado se cuenta dos veces!

AB	*BA*
AC	*CA*
AD	*DA*
⋮	⋮

Por lo tanto, **el orden se deshace dividiendo 30 entre 2**. Es decir:

$$\text{Número de maneras de asignar 2 boletos entre 6 muchachas} = \frac{\text{Resultados del PFC}}{2} = \frac{30}{2} = 15$$

En general, dos elementos A_1 y A_2, se pueden ordenar de dos formas:



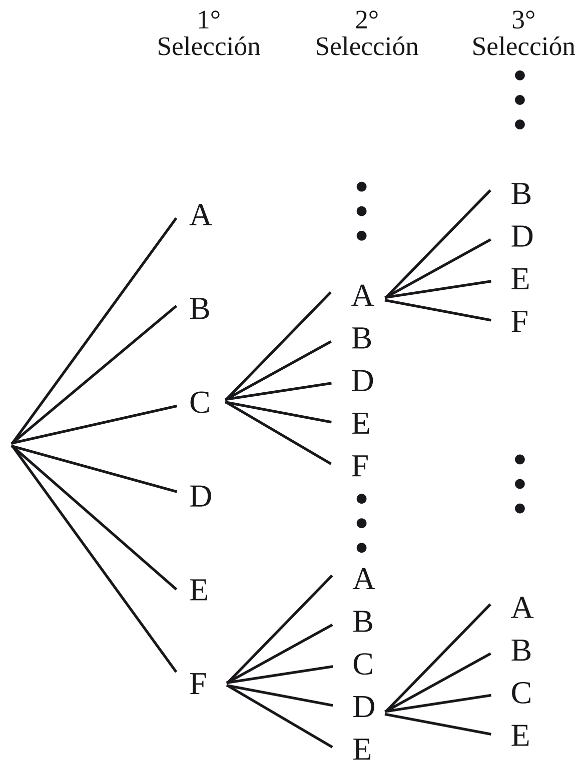
$A_1\,A_2$

$A_2\,A_1$

Ejemplos

2. Supongamos ahora, que se van a repartir 3 boletos entre las mismas 6 muchachas.

Solución



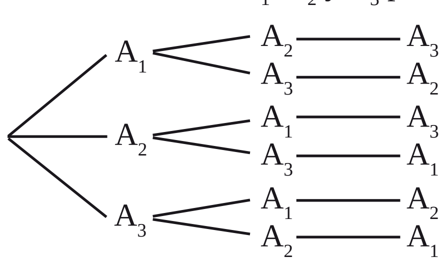
Hay (6)(5)(4) = 120 resultados, pero este total considera el orden; por ejemplo, ABC lo cuenta diferente a ACB, a BAC, a BCA, a CAB y CBA. **Cada resultado se cuenta 6 veces.**

Por lo tanto, el orden se deshace dividiendo 120 entre 6.

Número de maneras de asignar 3 boletos entre 6 muchachas =

$$= \frac{\text{Resultados del PFC}}{2} = \frac{120}{6} = 20$$

En general, 3 elementos A_1, A_2 y A_3 pueden ordenarse de seis formas:



$A_1\,A_2\,A_3$
$A_1\,A_3\,A_2$
$A_2\,A_1\,A_3$
$A_2\,A_3\,A_1$
$A_3\,A_1\,A_2$
$A_3\,A_2\,A_1$

RECAPITULEMOS:

2 objetos se ordenan de 2 maneras: $2 \times 1 = 2$
3 objetos se ordenan de 6 maneras: $3 \times 2 \times 1 = 6$
4 objetos se ordenarán de: $4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$ maneras,
5 objetos se ordenarán de: $5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$ maneras.
⋮

Es el momento de conocer un nuevo símbolo matemático: el **FACTORIAL**.

El símbolo n**!** Se lee “ene factorial” y se define como:

$$n! = (n)(n-1)(n-2)(n-3)...(3)(2)(1)$$

Así: $2! = 2 \times 1$

$4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1$

$3! = 3 \times 2 \times 1$

$10! = 10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$

De acuerdo con esta definición, tenemos que:

> 2 objetos se ordenan de 2! maneras
> 3 objetos se ordenan de 3! maneras
> 4 objetos se ordenan de 4! maneras
> •
> •
> •
> ***n*** objetos se ordenan de ***n!*** maneras

Conclusión:

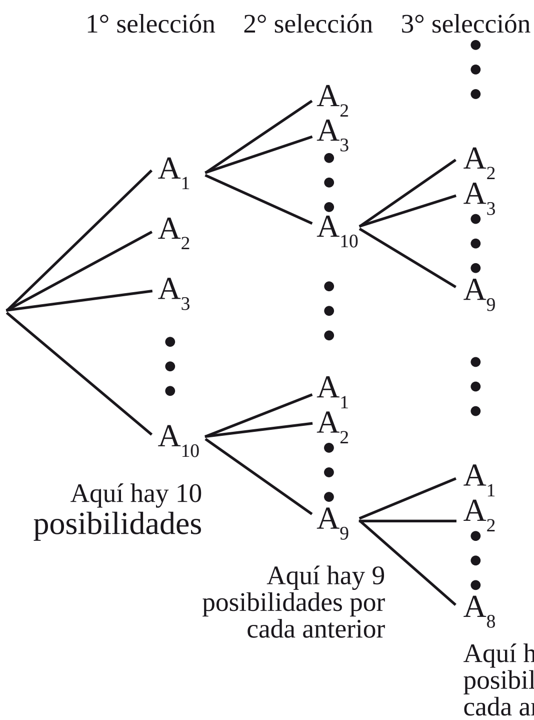
Si hemos seleccionado ***n*** objetos y no nos interesa el orden, aplicamos la siguiente fórmula:

$$\text{Número de objetos sin considerar el orden} = \frac{\textit{Resultados del PFC}}{n!}$$

Ejemplos

1. Diez jugadores participan en una competencia de ajedrez. Los tres primeros clasifican para jugar otro importante torneo sin importar el lugar (1º , 2º ó 3º) que ocupen en éste. ¿De cuántas formas se pueden seleccionar tres entre los 10 participantes?

Solución



Descripción del experimento. De 10 jugadores: A_1, A_2, A_3, A_4, ... A_{10}, serán seleccionados tres sin importar el orden: 1ª selección, 2ª selección y 3ª selección.

Número de selección de 3 con orden = (10)(9)(8)

Un resultado como $A_1\ A_2\ A_3$ lo considera diferente a:

$$\left\{\begin{array}{l} A_1\ A_3\ A_2 \\ A_2\ A_1\ A_3 \\ A_2\ A_3\ A_1 \\ A_3\ A_1\ A_2 \\ A_3\ A_2\ A_1 \end{array}\right.$$

Ejemplos
(Cont.)

Pero, como no importa el orden, debemos deshacerlo. Para ello, **dividimos la respuesta entre el número de maneras en que se ordenan 3 objetos**.

$$\text{Número de selecciones de 3 objetos sin orden} = \frac{10\times9\times8}{n!} = \frac{10\times9\times8}{3\times2\times1} = 120$$

Por lo tanto, existen 120 clasificaciones distintas de 3 elementos.

2. El sorteo MELATE, consiste en escoger seis números de 56 disponibles {1, 2, 3, ..., 56}. El resultado del sorteo son seis números naturales y un séptimo número llamado adicional. Para ganar el primer lugar, necesitas acertar a los seis números naturales. ¿De cuantas maneras distintas se puede llenar la boleta del MELATE?

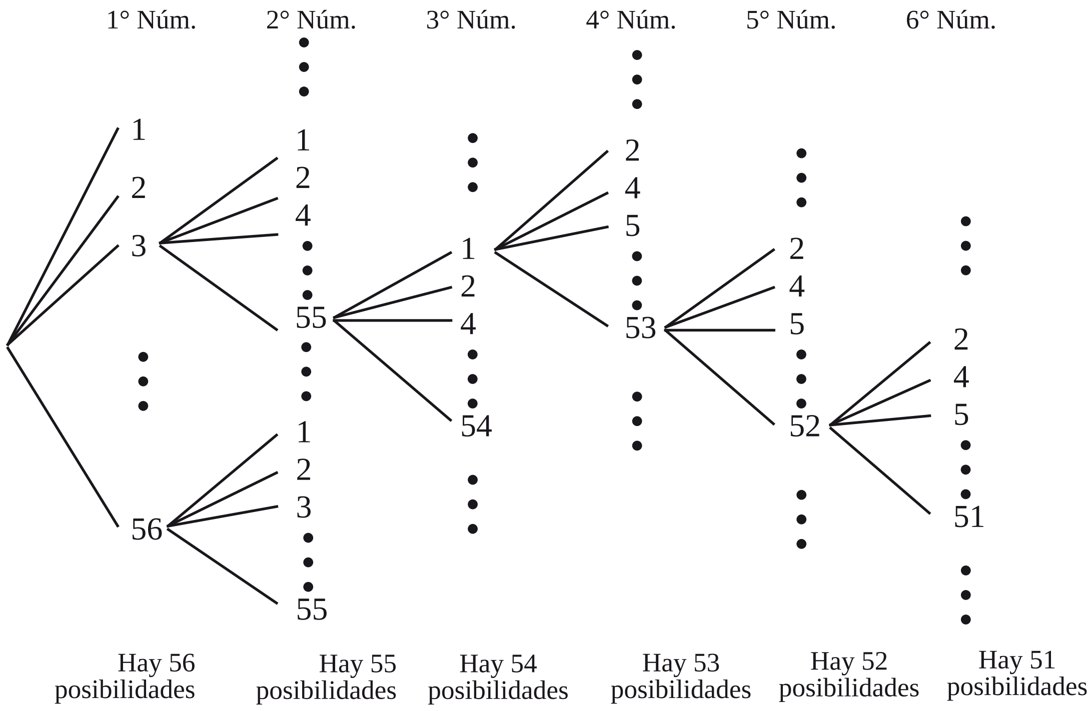
Solución

Descripción del experimento.

Experimento de seis etapas. Cada una consiste en escoger un número.

Para el primer número, hay 56 números disponibles.

Habiendo escogido el primer número, para el segundo quedan 55 posibilidades; asimismo para el tercero habrá 54, para el cuarto 53, para el quinto 52 y para el sexto 51.



Ejemplos

(Cont.)

Número de maneras de seleccionar 6 números
de un total de 56 con orden = (56)(55)(54)(53)(52)(51) = 23,377,273,920

Pero, como no importa el orden, debemos deshacerlo. Para ello, dividimos la cantidad obtenida entre la manera como se ordenan 6 objetos.

Número de maneras de seleccionar 6 números de 56 sin orden $\dfrac{56\times55\times54\times53\times52\times51}{6!}$

$$= \frac{23377273920}{720}$$

$$= 32,\ 468\ 436$$

Hay 32 468 436 maneras de llenar la boleta del **MELATE.**

Actividad 3.4 d

1. Con 6 latas de pintura de distintos colores, ¿cuántas mezclas de dos colores se pueden hacer?

2. Con 6 botes de pintura de distintos colores, ¿cuántas mezclas de tres pinturas se pueden hacer?

3. Para realizar cierto experimento, se seleccionan al azar, a cuatro estudiantes de un grupo de 20. ¿Cuántos grupos diferentes de cuatro estudiantes son posibles?

4. Hay 40 números en la lotería de un estado. ¿En cuántas formas puede un jugador seleccionar seis de los números? (El orden de la selección no es importante)

5. Supongamos que hay 30 estudiantes en un grupo y que todos deciden empezar a conocerse dándose un apretón de manos. Cada persona estrecha la mano derecha de todos los demás. ¿Cuántos apretones de mano tendrán lugar?

Permutaciones

En los problemas de selecciones y extracciones, partimos de *m* elementos distintos:

$$A_1, A_2, A_3 \ldots A_m$$

De estos *m* elementos, seleccionamos *n* de ellos, formando grupos distintos. Recordemos que un grupo formado se diferencia de otro, por los elementos que lo componen o por el orden en que aparecen.

Cuando importa el orden, grupos como *ABC*, *BAC*, *CAB* se consideran diferentes aunque tengan los mismos elementos (se distinguen por el orden en que aparecen).

Permutación. Una permutación de *n* elementos diferentes,es una ordenación de los ***n*** elementos de tal suerte que un elemento sea primero, otro sea segundo, otro más sea tercero y así sucesivamente hasta la posición enésima. El número de permutaciones de ***n*** elementos se simboliza por $\boldsymbol{P_n}$.

Ejemplos de permutaciones son:

- Las formas en que pueden llegar 6 corredores a la meta
- Las tiras de 4 letras distintas que podemos formar con P, A, T, O.

Permutaciones de P, A, T, O

PATO	APTO	TPAO	APAT
PAOT	APOT	TPOA	OPTA
PTAO	ATPO	TAPO	OAPT
PTOA	ATOP	TAOP	OATP
POAT	AOTP	TOPA	OTPA
POTA	AOPT	TOAP	OTAP

$P_4 = 24$

Los números de tres cifras distintas que se pueden formar con 3, 4, 5.

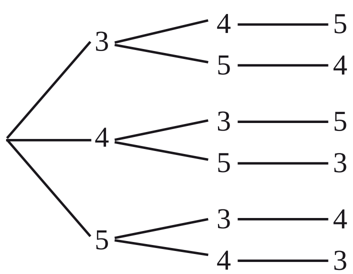
Permutaciones de 3, 4 y 5:

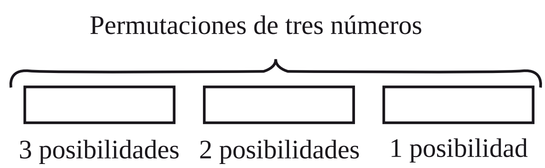
345	435	534
354	453	543

$P_3 = 6$

Más que enumerar todas las permutaciones, recordemos que estamos interesados en el número total de ellas. Para ello, nos auxiliaremos en el principio fundamental de conteo.

Por ejemplo, en el caso de los tres números (3, 4 y 5) se puede razonar que hay tres opciones para la primer cifra, dos para la segunda y sólo una para la tercera. Visto en un diagrama:





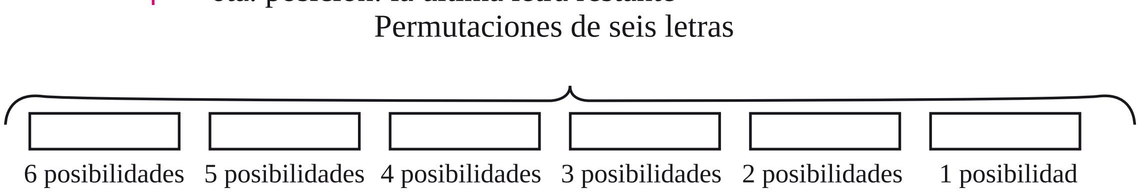
Por lo tanto, el número de permutaciones de tres números es: $P_3 = (3)(2)(1) = 3! = 6$

Ejemplo ¿Cuántas permutaciones diferentes son posibles para las letras *A, B, C, D, E y F?*

Solución

Dado que hay demasiadas permutaciones diferentes por enumerar, vamos a usar el siguiente razonamiento:

1ra. posición: cualquiera de seis letras
2da. posición: cualquiera de cinco letras
3ra. posición: cualquiera de cuatro letras
4ta. posición: cualquiera de tres letras
5ta. posición: cualquiera de dos letras
6ta. posición: la última letra restante

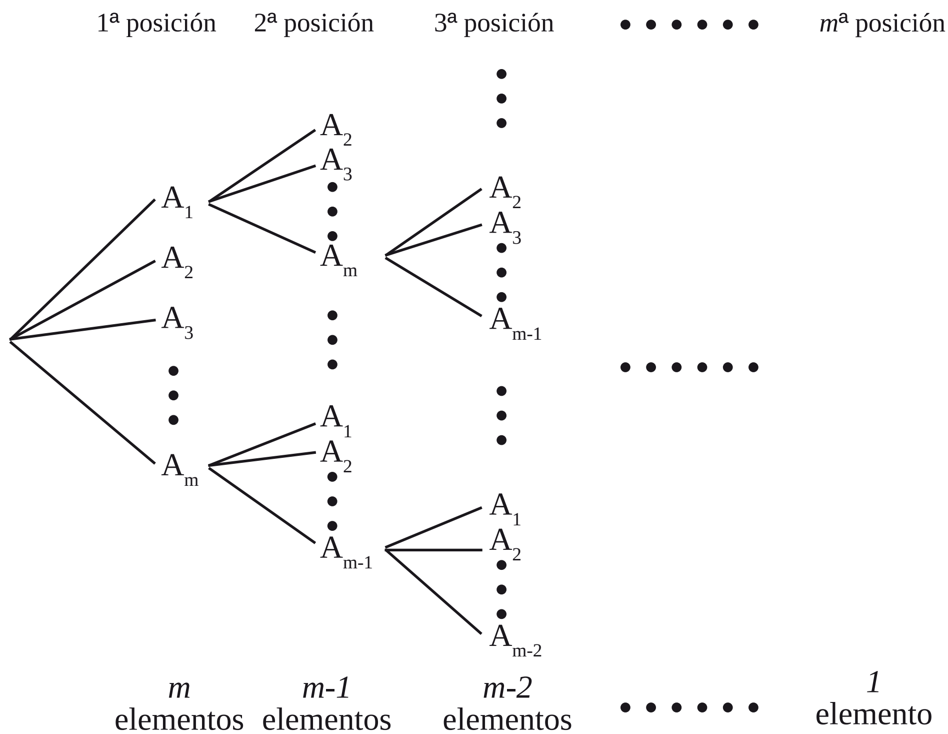


Usando el principio fundamental de conteo, encontramos que el número total de permutaciones de las seis letras es:

$$P_6 = (6)(5)(4)(3)(2)(1) = 6! = 720$$

Generalicemos: **El número de permutaciones de *m* elementos se designará por $\mathbf{P_m}$** y para conocer su fórmula procedemos como sigue:

Como partimos de m elementos: $A_1, A_2, \ldots A_m$, formamos el siguiente diagrama de árbol:



Aplicando el principio fundamental de conteo, las permutaciones de m elementos son:

$$P_m = \underbrace{(m)(m-1)(m-2)(m-3)...(2)(1)}_{m \text{ factores}}$$

$$\boxed{P_m = m!}$$

El número de permutaciones de m elementos es: $P_m = m\,(m-1)(m-2)\ldots(2)(1) = m!$
En otras palabras, hay ***m!*** formas diferentes en que ***m*** elementos se pueden ordenar.

Ejemplos

• Números distintos de 3 cifras con 3, 4 y 5

$3! = (3)(2)(1) = 6$

$P_3 = 3! = 6$

• Tiras distintas de 4 letras con *PATO*

$4! = (4)(3)(2)(1) = 24$

$P_4 = 4! = 24$

• Clasificaciones diferentes de 6 corredores

$6! = (6)(5)(4)(3)(2)(1) = 720$

$P_6 = 6! = 720$

• Distintas formas en que pueden sentarse los 40 alumnos de una clase en los 40 lugares que hay:

$$\begin{aligned} 40! &= (40)(39)...(3)(2)(1) \\ &= 81591528324\ 78980\ 000000\ 000000\ 00000\ 000000\ 000000\ 000 \\ &= 8.15915283247898 \times 10^{47} \end{aligned}$$

$$P_{40} = 40! = 8.15915283247898 \times 10^{47}$$

Características de las permutaciones

Partimos de ***m*** elementos distintos $A_1, A_2, A_3 ... A_m$. Se llaman permutaciones de esos ***m*** elementos a las distintas ordenaciones que podemos hacer con ellos. Una permutación se diferencia de otra sólo en el orden, pues en ambas aparecen los mismos elementos.

Permutaciones de m elementos tomados n a la vez*.

Ocasionalmente, puede interesar ordenar un subconjunto de un grupo de elementos en lugar de todo el grupo (***n* ≤ *m***). Por ejemplo, de seis corredores, sólo pueden interesar los tres que ganan medalla. (Aquí se escogen tres de seis y se ordenan). Esta ordenación es una permutación de 6 elementos tomados 3 a la vez.

Esto se escribe: ${}_6P_3 \longrightarrow$ *Permutación de 6 elementos tomados 3 a la vez.*

Ejemplos

1. Ocho caballos toman parte en una carrera. ¿De cuántas formas diferentes pueden llegar estos caballos en los lugares primero, segundo y tercero? (supóngase que no hay empates).

Solución

Tenemos las siguientes posibilidades:
Ganar (primera posición): *ocho opciones*
Segunda posición: *siete opciones*
Tercera posición: *seis opciones*

Usando el principio fundamental de conteo, multiplicamos estos tres números para obtener lo siguiente:

$$\overbrace{\underset{8}{\boxed{\qquad\qquad}}\quad\underset{7}{\boxed{\qquad\qquad}}\quad\underset{6}{\boxed{\qquad\qquad}}}^{\substack{\text{Ordenaciones diferentes en que llegan 8 caballos}\\ \text{a los tres primeros lugares}}}$$

Por lo tanto, hay (8)(7)(6) = 336 ordenaciones diferentes. Así,

$${}_6P_3 = \underbrace{(8)(7)(6)}_{\text{3 factores}}$$

2. Otros problemas similares:

- De 6 corredores, nos interesa el número de formas en que pueden ganar las tres medallas:

$${}_6P_3 = \underbrace{(6)(5)(4)}_{\text{3 factores}} = 120$$

Permutaciones de 6 elementos tomados 3 a la vez.

- Número de formas en que 6 corredores ocupan 4 lugares:

$${}_6P_4 = \underbrace{(6)(5)(4)(3)}_{\text{4 factores}} = 360$$

Permutaciones de 6 elementos tomados 4 a la vez.

(*) También se conocen como **variaciones sin repetición** de *m* elementos tomados de *n* en *n*. De acuerdo con esto, las variaciones de *n* elementos tomados de *m* en *m* se llaman permutaciones de *m* elementos.

Ejemplos

- 6 corredores ocuparían 5 lugares:

$${}_{10}P_5 = \underbrace{(6)(5)(4)(3)(2)}_{\text{5 factores}} = 720$$

Permutaciones de 6 elementos tomados 5 a la vez.

- 6 corredores ocuparían 6 lugares:

$${}_6P_6 = P_6 = \underbrace{(6)(5)(4)(3)(2)(1)}_{\text{6 factores}} = 720$$

¿Por qué ${}_6P_5 = {}_6P_6$? Observa que una vez que se han ocupado los 5 primeros lugares entre 6 corredores, el sexto lugar queda ya determinado por el corredor restante.

Simplificamos la notación cuando tomamos los *m* elementos

- 10 corredores ocuparían 4 lugares:

$${}_{10}P_4 = \underbrace{(10)(9)(8)(7)}_{\text{4 factores}} = 5040$$

- *m* corredores ocuparían *n* lugares:

$${}_mP_n = \underbrace{(m)(m-1)(m-2)\ldots}_{n \text{ factores}} \longrightarrow$$ Permutaciones de *m* elementos tomados *n* a la vez

Fórmula de permutaciones como creciente de factoriales

Ya sabemos que:

$${}_mP_n = (m)(m-1)(m-2)\ldots \quad \textit{hasta un total de n factores.}$$

Vamos a precisar, el último factor:

$$\begin{array}{ccccc} 1^\circ \textit{ factor} & 2^\circ \textit{ factor} & 3^\circ \textit{ factor} & & n^\circ \textit{ factor} \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow \\ m & m-1 & m-2 & \cdots & m-(n-1) = m-n+1 \end{array}$$

Por tanto, la fórmula queda así:

$${}_mP_n = (m)(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)$$

Puedes comprobarlo en varios casos perticulares: *último factor*

$${}_7P_3 = (7)(6)(5) \longrightarrow 7-3+1 = 5$$

$${}_{11}P_4 = (11)(10)(9)(8) \longrightarrow 11-4+1 = 8$$

$${}_6P_2 = (6)(5) \longrightarrow 6-2+1 = 5$$

$${}_5P_5 = (5)(4)(3)(2)(1) = P_5 \longrightarrow 5-5+1 = 1$$

Multipliquemos y dividamos por $(m - n)!$ la fórmula de ${}_mP_n$

$$ {}_nP_m = \frac{(m)(m-1)(m-2)...(m-n+1)(m-n)!}{(m-n)!} $$

Pero, el numerador es:

$$ (m)(m-1)(m-2)...(m-n+1)(m-n)\ (m-n-1)...\ (2)(1) = m! $$

Por tanto: $\boxed{{}_mP_n = \dfrac{m!}{(m-n)!}}$

Por ejemplo, verifiquemos el número de permutaciones de ocho caballos tomados tres a la vez:

$$ {}_8P_3 = \frac{8!}{(8-3)} = \frac{(8)(7)(6)(\cancel{5!})}{\cancel{5!}} = (8)(7)(6) = 336 $$

que es la misma respuesta ya obtenida.

Con esta fórmula, ¿cómo se expresaría ${}_mP_m$?

$$ {}_mP_m = \frac{m!}{(m-m)!} = \frac{m!}{0!} $$

Pero, ya sabemos que ${}_mP_m = P_m = m!$

Por lo tanto: $\dfrac{m!}{0!} = m!$

Para que se cumpla esta igualdad, **tendremos que asumir que:**

$$ \boxed{\mathbf{0! = 1}} $$

Ejemplos

1. De un comité de 10 personas, va a seleccionarse un presidente, un vicepresidente y un tesorero. ¿De cuántas formas puede hacerse esta elección?

Solución

Se seleccionan 3. Puesto que la forma en la que son asignados los candidatos a las 3 ocupaciones afecta sus responsabilidades, importa el orden.

Diez personas: $\underbrace{P_1 \quad P_2 \quad P_3 \quad P_4 \quad P_5 \quad P_6 \quad P_7 \quad P_8 \quad P_9 \quad P_{10}}$

Selección de 3 con orden. Es un conteo de permutaciones

$$ {}_{10}P_3 = \frac{10!}{(10-3)!} = \frac{10!}{7!} = \frac{(10)(9)(8)(\cancel{7!})}{\cancel{7!}} = (10)(9)(8) = 720 $$

Ejemplos

2. En un recipiente, hay diez pelotas numeradas de 0 a 9. Un niño saca una de ellas al azar y la guarda; saca una segunda y la conserva. ¿Cuántos resultados posibles hay?

Solución

Dos selecciones sin reemplazamiento con orden. Es una permutación
Diez números:

$$\underbrace{0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \quad 7 \quad 8 \quad 9}$$

Selección de 2 con orden. Es un conteo de permutaciones

$$_{10}P_2 = \frac{10!}{(10-2)!} = \frac{10!}{8!} = \frac{(10)(9)\cancel{(8)}}{\cancel{8!}} = (10)(9) = 90$$

Actividad 3.4 e

1. Calcula:

   a) $8!$ b) $2!$ c) $(4!)(0!)$

   d) $\frac{6!}{3!}$ e) $\frac{12!}{10!}$ f) $\frac{100!}{99!}$ g) $\frac{88!}{(86!)(2!)}$

2. Escribe en cada caso, todos los factores:

   a) $_4P_2$ b) $_5P_2$ c) $_9P_6$

   d) $_mP_n$ e) $_{n+1}P_n$ f) $_{n+2}P_{n+1}$

3. Escribe en la forma $_mP_n$:

   a) $(m)(m–1)(m–2)$

   b) $(m+1)(m)\ (m–1)\ (m–2)(m–3)$

   c) $(m–3)(m–4)...(m–9)$

   d) $(m–7)(m–8)...(m–24)$

4. Extraemos una carta de una baraja de 40. Después de dejarla sobre la mesa, extraemos una segunda, que colocamos junto a la anterior, y una tercera. ¿De cuántas formas puede seleccionarse el trío de cartas?

5. ¿De cuántas formas puede alinearse a cinco niños en una sola fila para que les tomen una foto?

Actividad 3.4 e (Cont.)

6. Entre un grupo de 12 candidatos se ocuparán las oficinas del presidente, vicepresidente, secretario y tesorero. ¿En cuántas formas diferentes pueden ocuparse las oficinas, si cualquiera de los 12 candidatos puede ocupar cualquier oficina?

7. Considere las “palabras” diferentes de tres letras que se pueden formar con las cinco vocales: a, e, i, o, u.
   a) ¿Cuántas palabras de tres letras se pueden formar si no se permiten repeticiones?
   b) ¿Cuántas son las palabras diferentes que se forman sin repetición y con la letra “o” en el centro?
   c) ¿Cuántas palabras diferentes se pueden formar, sin repeticiones que tengan, la “u” y la i al principio y al final?
   d) ¿Cuántas palabras diferentes se pueden formar con la letra “a” y otras dos vocales?

8. Tome en cuenta los números de tres cifras que se pueden formar usando los dígitos 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9 . Además suponga que no se permite la repetición de ningún dígito, a menos que se especifique lo contrario:
   a) ¿Cuántos números naturales de tres dígitos se pueden formar?
   b) ¿Cuántos números naturales pares, de tres cifras, se pueden formar?
   c) ¿Cuántos números naturales de tres cifras y mayores que 600 se pueden formar?

9. ¿De cuántas maneras se pueden acomodar las letras de MEDIO, usando cada letra una sola vez en cada acomodación?

10. Un equipo de beisbol consta de nueve jugadores en el terreno de juego. ¿Cuántas maneras diferentes de determinar el orden de pasar a batear son posibles? ¿Cuántas son aceptables si se desea que el receptor (catcher) batee al último?

11. Cuatro personas se forman para bajar un tobogán, pero sólo dos de los cuatro desean tomar la primera posición. Con esa limitante, ¿De cuántas formas pueden tomar asiento las cuatro personas en el tobogán?

Combinaciones

Si en determinado problema el orden no tiene importancia, grupos como *ABC, ACB, BAC, BCA, CAB* y *CBA* se consideran uno solo. Todos forman una sola combinación.

$$\left.\begin{array}{c} ABC \\ ACB \\ BAC \\ BCA \\ CAB \\ CBA \end{array}\right\} \text{Una sola combinación: } \boldsymbol{ABC}$$

Ejemplos

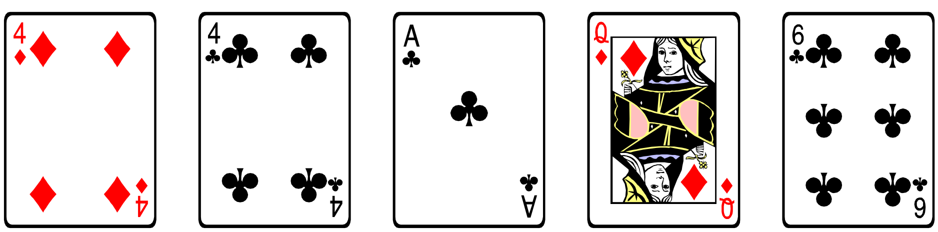
- Por ejemplo, si A, B y C son colores a mezclar para formar otro color, no importa el orden en que se mezclen.
- Si queremos repartir dos boletos entre seis muchachas (A, B, C, D, E y F) los resultados AB y BA indican lo mismo.

$$\left.\begin{array}{c} \text{AB} \\ \text{BA} \end{array}\right\} \text{Una sola combinación: AB}$$

- Si de una caja con tres canicas negras y dos blancas extraemos dos simultáneamente, no hay diferencia entre ● ○ y ○ ● .

$$\left.\begin{array}{c} \bullet\ \circ \\ \circ\ \bullet \end{array}\right\} \text{Una sola combinación: negra, blanca}$$

- En un juego de cartas, el jugador es libre de reordenar las cartas después que hayan sido repartidas (si alguien tiene un As, no importa en qué momento se lo entregaron).



- En el sorteo MELATE se trata de escoger 6 números de un total de 56, sin importar el orden de selección.

En todos estos ejemplos, los grupos formados de objetos se llaman combinaciones.

Combinación. Una combinación, es una forma en la que pueden presentarse los objetos, y en la que el orden de aparición no importa.

NOTACIÓN

- Si de tres objetos seleccionamos dos sin importar el orden, se forma una combinación de 3 objetos tomados dos a la vez.

  Escribimos: ${}_{3}C_{2}$ se lee: "**combinación de 3 objetos tomados dos a la vez**".

  O bien: $\binom{3}{2}$

- Si repartimos dos boletos entre 6 personas, no importa el orden, por lo que formamos una combinación de 6 objetos tomados dos a la vez.

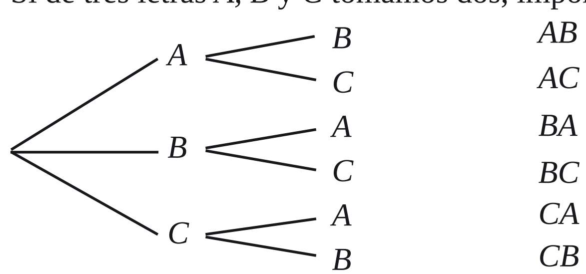
  ${}_{6}C_{2}$ o $\binom{6}{2}$ Combinación de 6 objetos tomados dos a la vez

- Si repartimos 5 cartas de una baraja de 52, no importa el orden, por lo que formamos una combinación de 52 objetos tomados 5 a la vez.

  ${}_{52}C_{5}$ o $\binom{52}{5}$ Combinación de 52 objetos tomados 5 a la vez

Fórmula de las combinaciones

Si de tres letras *A*, *B* y *C* tomamos dos, importando el orden, obtenemos:



Sabemos que esto es una permutación de 3 objetos tomados 2 a la vez.

$${}_{3}P_{2} = \frac{3!}{(3-2)!} = \frac{3!}{1!} = (3)(2) = 6$$

Revisemos los resultados que tienen las mismas letras:

6 permutaciones

AB, BA origina una combinación: AB

AC, CA origina una combinación: AC

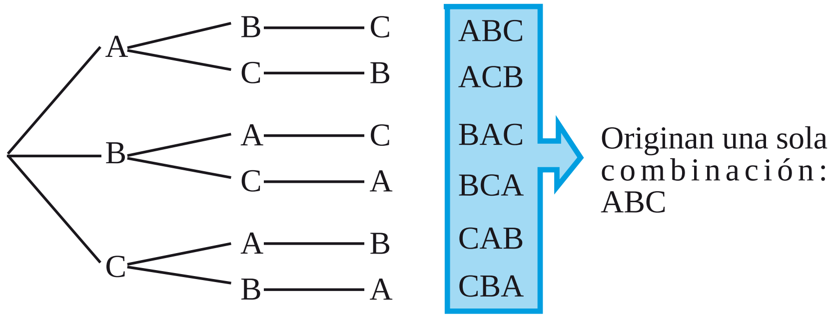
BC, CB origina una combinación: BC

Tomar 2 letras de 3 posibles, origina 3 combinaciones.

El número de combinaciones de tres objetos tomados 2 a la vez, es igual a la ***mitad*** *del número de* ***permutaciones****:*

$${}_3C_2 = \frac{{}_3P_2}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

Si tomamos los tres objetos, tendremos las siguientes permutaciones:



El número de combinaciones de tres objetos tomados 3 a la vez, es igual al número de permutaciones dividido entre 6.

$${}_3C_3 = \frac{{}_3P_3}{6} = \frac{6}{6} = 1$$

¿Qué número va en el denominador?

Es el número de veces que se pueden ordenar los objetos tomados.

En el primer ejemplo, 2 objetos se ordenan de 2 maneras:

$${}_3C_2 = \frac{{}_3P_2}{2}$$

En el segundo ejemplo, 3 objetos se ordenan de 6 maneras.

$${}_3C_3 = \frac{{}_3P_3}{6}$$

Pero, sabemos que: 2 objetos se ordenan de 2! maneras
3 objetos se ordenan de 3! maneras
4 objetos se ordenan de 4! maneras
***n* objetos se ordenan de *n*! maneras**

Entonces:

$${}_3C_3 = \frac{{}_3P_3}{6}$$

$${}_3C_2 = \frac{{}_3P_2}{2!}$$

En general, si de m objetos tomamos n (con $n \leq m$), sin importar el orden, se forman:

$$\frac{{}_mP_n}{n!} \quad \textit{combinaciones}$$

Ejemplo

Encuentra el número de combinaciones de las 4 letras A, B, C y D tomadas 3 a la vez.

- El número de permutaciones de 4 objetos tomados tres a la vez es:

$$_4P_3 = \frac{4!}{(4-3)!} = \frac{4!}{1!} = (4)(3)(2) = 24$$

Cada objeto se ordena de 3! = 6 maneras. Entonces, el número de combinaciones de 4 objetos tomados 3 a la vez es:

$$_4C_3 = \frac{24}{6} = 4$$

En general, el número de combinaciones de m objetos tomados n a la vez es iguales a:

$$_mC_n = \frac{_mP_n}{n!}$$

Pero: $$_mP_n = \frac{m!}{(m-n)!}$$

Por tanto: $$_mC_n = \frac{\frac{m!}{(m-n)!}}{n!} = \frac{m!}{n!(m-n)!}$$

$$_mC_n = \binom{m}{n} = \frac{m!}{n!(m-n)!}$$

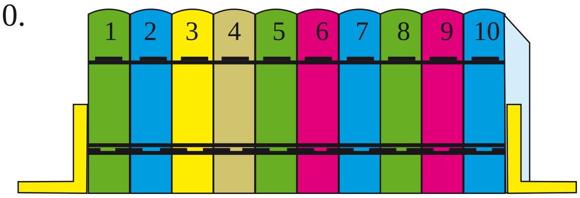
Características de las combinaciones

Partimos de m elementos distintos, A_1, A_2, A_3, . . ., A_m. Se llaman combinaciones de esos ***m*** elementos tomados de ***n* en *n*** (con $n \le m$), a los grupos de n elementos distintos que se pueden formar, de modo que un grupo se diferencia de otro por los elementos que lo componen, sin que importe el orden en que aparezcan.

Ejemplos

1. Encuentra el número de formas en que un estudiante puede escoger tres libros de una lista de 10.

Solución

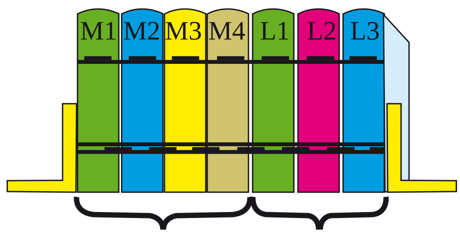


Seleccionar 3 sin orden

$$_{10}C_3 = \binom{10}{3} = \frac{10!}{3!(10-3)!} = \frac{10!}{3!7!} = \frac{(10)(9)(8)(\cancel{7!})}{3!\cancel{7!}} = \frac{(10)(9)(8)}{(3)(2)(1)} = 120$$

2. Encuentra el número de formas en que un estudiante puede seleccionar 2 libros de matemáticas y dos de literatura, de un estante con 4 libros de matemáticas y 3 libros de literatura.

Solución



Seleccionar 2 Seleccionar 2

$_4C_2$ $_3C_2$

Los dos libros de matemáticas se seleccionan de:

$$_4C_2 = \binom{4}{2} = \frac{4!}{2!(4-2)!} = \frac{4!}{2!2!} = \frac{(4)(3)(2!)(\cancel{7!})}{2!\cancel{2!}} = \frac{(4)(3)}{(2)(1)} = 6 \text{ maneras}$$

Y los dos libros de literatura se seleccionan de:

$$_3C_2 = \binom{3}{2} = \frac{3!}{2!(3-2)!} = \frac{3!}{2!1!} = \frac{(3)(\cancel{2!})}{\cancel{2!}1!} = \frac{(3)}{(1)} = 3 \text{ maneras}$$

Hay 6 maneras posibles de elegir dos libros de matemáticas, y dado que cada una de estas maneras se puede agrupar con cualquiera de las tres maneras posibles de elegir los dos libros de literatura, el principio fundamental de conteo, nos da:

$_4C_2 \times {_3C_2} = 6(3) = 18$ maneras de seleccionar dos de matemáticas y dos de literatura.

¿Cómo orientarse ante problemas de combinatoria?

¿Cómo saber ante cada uno de los problemas que se presentan si se trata de permutaciones (y de qué tipo específico) o de combinaciones?
Si los leemos detenidamente y los analizamos con profundidad podemos identificar de qué situación se trata.
Cuando se trata de formar agrupaciones de elementos hay que preguntarse dos cosas importantes:

- ¿Se permite o no que los elementos se repitan?
- ¿Es importante o no el orden en que se agrupan los elementos?

Las respuestas a estas preguntas dependerán del enunciado del problema.
A continuación un cuadro resumen:

	¿Influye el orden?	¿Puede haber repetición?	Fórmula
P_m permutaciones	Si	No	$P_m = m!$
${}_mP_n$ permutaciones de m elementos tomados de n en n ($n \leq m$)	Si	No	${}_mP_n = \dfrac{m!}{(m-n)!}$
${}_mC_n$ combinaciones ($n \leq m$)	No	No	${}_mC_n = \dfrac{m!}{n!\,(m-n)!}$

Actividad 3.4 f

1. En cada caso, decir si se trata de permutación o de combinación. Plantear la fórmula. No hacer cálculos.
   a) Las maneras de arreglar 5 cuadros en línea sobre una pared.
   b) Las maneras en que se pueden elegir a 3 personas de un grupo de 5.
   c) Las maneras en que se pueden elegir al primero y al segundo violinista entre 6 músicos.
   d) La manera en que se pueden elegir 4 suéteres de 7.
   e) Las maneras en que se pueden arreglar 5 sillas en una fila.
   f) Posibles resultados finales de 7 personas en una carrera si no hay empates.

2. De las 30 preguntas de que consta un test, se deben contestar veinte. (a) ¿de cuántos modos se pueden elegir esas veinte preguntas? (b) Si las diez primeras preguntas son obligatorias, ¿de cuántos modos se pueden elegir las otras diez?

3. Una fábrica de helados prodece doce sabores diferentes. (a) ¿Cuántos helados de tres sabores diferentes (tres gustos) se pueden fabricar? (b) ¿Y si consideramos el orden en los sabores?

4. Nos han regalado ocho novelas y cinco libros de poesía y queremos elegir tres de los primeros y dos de los segundos para leerlos en vacaciones. ¿De cuántas formas podemos elegir los cinco libros?

Actividad 3.4 f (Cont.)

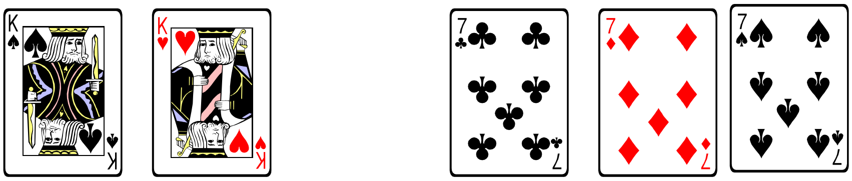
5. ¿Cuántos subconjuntos de cuatro elementos pueden formarse en un conjunto de 100 elementos?

6. Entre un grupo de ocho estudiantes graduados y cinco que aún no están graduados, ha de seleccionarse una comisión formada por tres estudiantes de los primeros y dos de los segundos. ¿Cuántas comisiones diferentes pueden formarse?

7. Un patrón entrevista a ocho personas para cuatro puestos en su compañía; tres de las ocho personas son mujeres. Si las ocho satisfacen los requisitos, ¿de cuántas formas puede el patrón ocupar los cuatro puestos sí:
   a) La selección es aleatoria?
   b) Exactamente dos mujeres?

8. De un grupo de cuatro parejas han de seleccionarse al azar cuatro personas. ¿De cuántas formas puede hacerse esto, dadas las siguientes condiciones?
   a) No hay restricciones
   b) Habrá al menos una pareja en el grupo de cuatro
   c) La selección debe incluir un miembro de cada pareja.

9. ¿De cuántas maneras se pueden repartir manos de póker con una bajara de 52 cartas de modo que los 5 naipes formen un par y una tercia (Dos reyes y tres sietes integran una mano de este tipo).



Cálculo de probabilidades aplicando técnicas de la combinatoria

A continuación utilizaremos las técnicas de la combinatoria para resolver problemas de probabilidad. Como ya se mencionó, estas técnicas resultan particularmente útiles en aquellas situaciones en las que resulta impráctico plantear el diagrama de árbol.

Ejemplos

1. Se lanza un dado tres veces seguidas; determina la probabilidad de los siguientes sucesos:
   a) A_1 : “Cae un punto en el primero, un punto en el segundo y un número diferente de uno en el tercero”.
   b) A_2 : “Cae un número par en cada lanzamiento”.
   c) A_3 : “Caen tres puntos en cada lanzamiento”.
   d) A_4 : “Caen números diferentes”.

Solución

1º Descripción del experimento:

Son tres lanzamientos consecutivos.

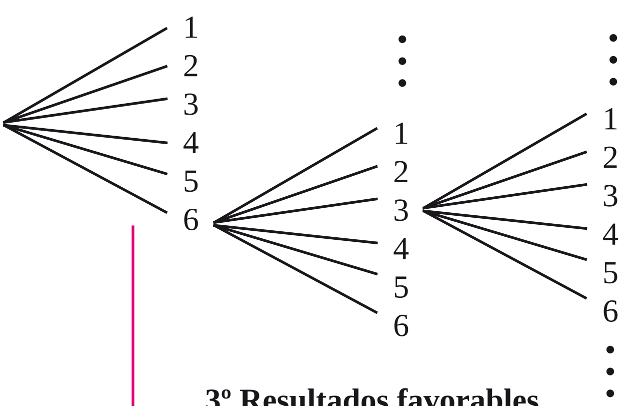
Algunos resultados:

111, 116, 651, 222, . . .

Los resultados posibles son de la forma: $N_1\,N_2\,N_3$

N_1 es el resultado del 1er. lanzamiento. Puede ser: 1,2,3,4,5 ó 6
N_2 es el resultado del 2do. lanzamiento. Puede ser: 1,2,3,4,5 ó 6
N_3 es el resultado del 3er. lanzamiento. Puede ser: 1,2,3,4,5 ó 6

2º Espacio muetral. Diagrama de árbol:



(Hay 6 posibilidades en cada etapa)

$N(S) = 6\times6\times6=216$

3º Resultados favorables

Sucesos:

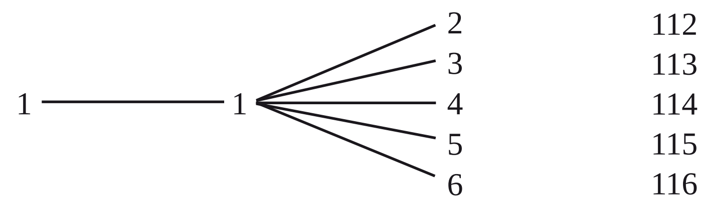
a) A_1: “*1 en el primero, 1 en el segundo y número diferente de 1 en el tercero*”.

Algunos resultados favorables:
112
113
114
115
116
¿Son todos?

Ejemplos
(Cont.)

Un diagrama de árbol para el suceso, nos permitirá precisar el total de resultados favorables:

Un punto en el primero — *Un punto en el segundo* — *Diferente de 1 en el tercero* — *Resultados*



$A_1 = \{112, 113, 114, 115, 116\} \longrightarrow n(A_1) = 5$

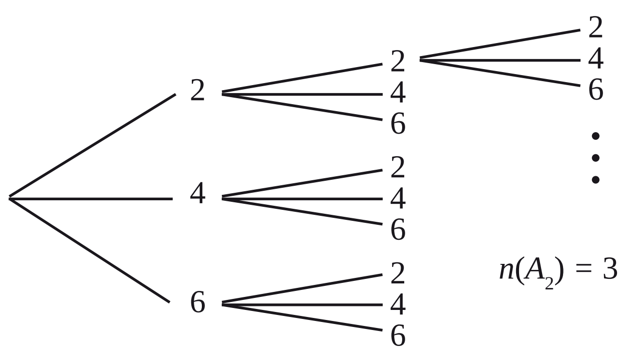
$$P(A_1) = \frac{5}{216}$$

b) A_2: "*Cae número par en cada lanzamiento*".

Algunos resultados favorables: 222, 246, 244, 662, ...

Diagrama de árbol:

1er lanzamiento — 2do. lanzamiento — 3er. lanzamiento



$n(A_2) = 3{\times}3{\times}3 = 27$

$$P(A_2) = \frac{27}{216}$$

c) A_3: "*Caen tres puntos en cada lanzamiento*".

Resultado favorable: 333

Hay un solo resultado favorable: $P(A_3) = \dfrac{1}{216}$

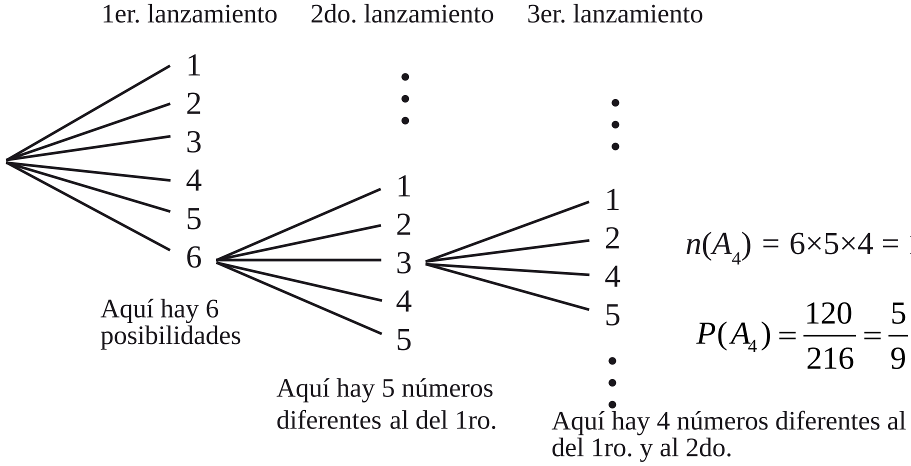
d) A_4: "*Caen números diferentes*".

Algunos resultados favorables:

123
124
132
134
456
. . . ¿Cuántos son?

Ejemplos

(Cont.)



$$n(A_4) = 6 \times 5 \times 4 = 120$$

$$P(A_4) = \frac{120}{216} = \frac{5}{9}$$

2. En el Estado de Sinaloa, las placas de los automóviles constan de tres letras y cuatro dígitos. La primera letra siempre es V, la segunda es F o G y la tercera puede ser cualquier letra (de un total de 26). ¿Cuál es la probabilidad de que en alguna placa aparezca la "palabra" VGI?

Solución

Descripción del experimento. Es un experimento de 7 etapas: en las primeras tres se selecciona una letra y en las últimas cuatro un dígito.

Algunos resultados: 

Son resultados de la forma: $N_1\ N_2\ N_3\ N_4\ N_5\ N_6\ N_7$

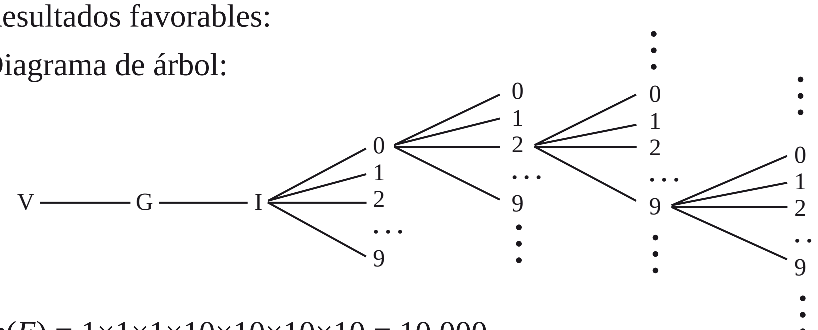
N_1 puede tomar un valor (la letra V)
N_2 puede tomar dos valores (F o G)
N_3 puede tomar 26 valores (A,B . . . Z)
N_4 puede tomar 10 valores (0,1 . . . 9)
N_5 puede tomar 10 valores (0,1 . . . 9)
N_6 puede tomar 10 valores (0,1 . . . 9)
N_7 puede tomar 10 valores (0,1 . . . 9)

$$n(S) = 1 \times 2 \times 26 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 520{,}000$$

Suceso: Se lee la palabra "**VGI**" 

Resultados favorables:

Diagrama de árbol:



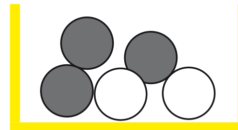
$$n(E) = 1 \times 1 \times 1 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 10{,}000$$

$$P(\text{se lea VGI}) = \frac{10000}{520000} = \frac{1}{52}$$

Ejemplos
(Cont.)

3. Una urna contiene tres canicas negras y dos blancas. Se extraen sucesivamente y sin reemplazamiento dos canicas. ¿Cuál es la probabilidad de obtener:

a) negra la 1ª y blanca la 2ª
b) una negra y una blanca
c) ambas sean negras?



Solución

¡Atención! Este problema puede ser resuelto con las técnicas vistas previamente. Ahora, se trata de aplicar los conceptos de permutaciones y combinaciones.

Descripción del experimento. Se trata de un problema de muestreo sin reemplazamiento. La población de interés equiprobable puede ser representada como:

$$\{n_1, n_2, n_3, b_1, b_2\}$$

A continuación revisamos cada uno de los sucesos:

a) "**Negra la 1ª y blanca la 2ª**. El suceso ***lleva implícito un orden***. <u>Es una permutación.</u>

- Cálculo de $n(S)$

$$\underbrace{\{n_1, n_2, n_3, b_1, b_2\}}_{\text{Permutaciones de 5 objetos tomados 2 a la vez:}}$$

$$n(S) = {}_6P_3 = \frac{5!}{(5-2)!} = \frac{5!}{3!} = \frac{5 \times 4 \times \cancel{3!}}{\cancel{3!}} = 20$$

- Cálculo de $n(A_1)$

$$\underbrace{\{n_1, n_2, n_3, b_1, b_2\}}_{\text{Tomar una negra de tres y una blanca de 2 con orden}}$$

$$n(A_1) = {}_3P_1 \bullet {}_2P_1 = \frac{3!}{(3-1)!} \times \frac{2!}{(2-1)!} = \frac{3!}{\cancel{2!}} \times \frac{\cancel{2!}}{1!} = \frac{3!}{1!} = (3)(2) = 6$$

$$P(A_1) = \frac{6}{20} = \frac{3}{10}$$

Ejemplos
(Cont.)

b) “**Una negra y una blanca**”. El suceso ***no requiere de orden***. Es una combinación.

- Cálculo de $n(S)$

$$\underbrace{\{n_1, n_2, n_3, b_1, b_2\}}$$

Combinación de 5 objetos tomados 2 a la vez:

$$n(S) = {}_5C_2 = \frac{5!}{2!(5-2)!} = \frac{5!}{2!3!} = \frac{5\times4\times\cancel{3!}}{2\times1\times\cancel{3!}} = \frac{20}{2} = 10$$

- Cálculo de $n(A_2)$

$$\underbrace{\{n_1, n_2, n_3, b_1, b_2\}}$$

Tomar una negra de tres y una blanca de 2 sin orden

$$n(A_2) = {}_2C_1 \bullet {}_3C_1 = \frac{\cancel{2!}}{1!1!} \times \frac{3!}{1!\,\cancel{2!}} = \frac{3!}{1!} = 6$$

$$P(A_2) = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$$

c) “**Ambas negras**”. Aquí tampoco interesa el orden. Es una combinación.

- Cálculo de $n(S)$

$$\underbrace{\{n_1, n_2, n_3, b_1, b_2\}}$$

Combinación de 5 objetos tomados 2 a la vez:

$$n(S) = {}_5C_2 = \frac{5!}{2!(5-2)!} = \frac{5!}{2!3!} = \frac{5\times4\times\cancel{3!}}{2\times1\times\cancel{3!}} = \frac{20}{2} = 10$$

- Cálculo de $n(A_3)$

$$\underbrace{\{n_1, n_2, n_3, b_1, b_2\}}$$

Tomar dos negras de tres sin orden

$$n(A_3) = {}_3C_2 = \frac{3!}{2!(3-2)!} = \frac{3!}{2!\times1!} = \frac{3\times\cancel{2!}}{2!\times1!} = 3$$

$$P(A_3) = \frac{3}{10}$$

Ejemplos
(Cont.)

4. En un recipiente hay diez pelotas numeradas de 0 a 9. Un niño saca una de ellas al azar y la guarda; saca una segunda y la conserva; finalmente saca una tercera. Usted toma nota del orden en que el niño sacó las pelotas. ¿Cuál es la probabilidad de sacar las pelotas numeradas 0, 1 y 2, en ese orden?

Solución

Descripción del experimento. Es un experimento de muestreo de tamaño tres.

La variable de interés es: "número obtenido"

La opción de números es: "0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9"

La población de interés equiprobable es: {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6,7, 8, 9}

♦ Cálculo de $n(S)$

$$\underbrace{\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6,7, 8, 9\}}_{\text{Permutación de 10 elementos tomados tres a la vez.}}$$

$$n(S) = {}_{10}P_3 = \frac{10!}{(10-3)!} = \frac{10!}{7!} = \frac{10\times9\times8\times\cancel{7!}}{\cancel{7!}} = 720$$

♦ Cálculo de $n(S)$

$$\underbrace{\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6,7, 8, 9\}}_{\text{Tomar el 0, el 1 y el 2 en ese orden.}}$$

$$n(A) = {}_1P_1 \bullet {}_1P_1 \bullet {}_1P_1 = \frac{1!}{(1-1)!}\times\frac{1!}{(1-1)!}\times\frac{1!}{(1-1)!} = 1$$

La probabilidad del suceso es

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{1}{720}$$

4. En el problema 2, ¿cuál es la probabilidad de que las pelotas extraídas tengan los números 0, 1 y 2, sea cual fuere el orden en que aparecen?

Solución

Descripción del experimento. Es un experimento de muestreo de tamaño tres.

La variable de interés es: "número obtenido"
La opción de números es: "0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9".

Ejemplos
(Cont.)

La población de interés equiprobable es: {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6,7, 8, 9}

Análisis del suceso: "Sale 0, 1, 2 en cualquier orden". El evento no implica un orden. Es una combinación.

♦ Cálculo de $n(S)$

$$\underbrace{\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}}_{\text{Combinación de 10 elementos tomados tres a la vez}}$$

$$n(S) = {}_{10}C_3 = \frac{10!}{3!(10-3)!} = \frac{10!}{7!} = \frac{10\times9\times8\times\cancel{7!}}{3\times2\times1\times\cancel{7!}} = \frac{720}{6} = 720$$

♦ Cálculo de *n(A)*

$$\underbrace{\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}}_{\text{Tomar el 0, el 1 y el 2 sin orden.}}$$

$$n(A) = {}_1C_1 \bullet {}_1C_1 \bullet {}_1C_1 = \frac{1!}{1!(1-1)!} \times \frac{1!}{1!(1-1)!} \times \frac{1!}{1!(1-1)!} = 1$$

La probabilidad del sucesoo es

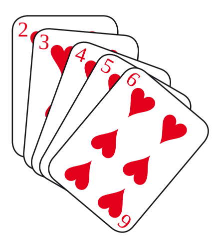
$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{1}{120}$$

5. ¿Cuál es la probabilidad de que una mano de cinco naipes seleccionada de una baraja estándar de 52 cartas consista de 5 corazones?

Solución

Descripción del experimento. El espacio muestral consiste de todas las manos posibles de 5 cartas escogidas de la baraja.
La variable de interés es: "carta seleccionada".
La opción de carta es: " cualquier carta de 52 que tiene la baraja".
La población de interés equiprobable es:

$$\left\{\begin{array}{l} \spadesuit\ \text{A, K, Q, J, 10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2} \\ \blacklozenge\ \text{A, K, Q, J, 10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2} \\ \clubsuit\ \text{A, K, Q, J, 10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2} \\ \heartsuit\ \text{A, K, Q, J, 10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2} \end{array}\right\}$$



Análisis del evento: "Salen 5 corazones". El evento consiste de todas las manos de 5 naipes escogidos de 13 corazones. No implica un orden. Es una combinación.

Ejemplos (Cont.)

Cálculo de $n(S)$. El espacio muestral consiste de todas las manos posibles de 5 naipes escogidos de la baraja de 52 cartas. El orden no importa, por consiguiente se trata de una combinación de 52 elementos tomados 5 a la vez.

$$n(S) = {}_{13}C_5 = \frac{52!}{5!(52-5)!} = \frac{52!}{5!47!} = \frac{52\times51\times50\times49\times48\times\cancel{47}!}{5\times4\times3\times2\times1\times\cancel{47}!} = \frac{311875200}{120} = 2598960$$

Cálculo de $n(E)$. El evento contiene ${}_{13}C_5$ resultados favorables

$$\underbrace{\{\heartsuit\ A, K, Q, J, 10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2\}}_{\text{De estos 13 elementos tomar 5 sin orden.}}$$

$$n(E) = {}_{13}C_5 = \frac{13!}{5!(13-5)!} = \frac{13!}{5!8!} = \frac{13\times12\times11\times10\times9\times\cancel{8!}}{5\times4\times3\times2\times1\times\cancel{8!}} = \frac{154440}{120} = 1287$$

$$P(5 \text{ corazones}) = \frac{1287}{2598960} = 0.0005$$

Actividad 3.4 g

1. Se extraen dos bolas sin reemplazamiento de una urna que contiene 8 bolas de las cuales 5 son blancas y tres son negras. Calcule la probabilidad de que:
   a) ambas sean blancas
   b) la primera negra y la segunda blanca.
   c) Una negra y una blanca

2. Una bolsa contiene 4 canicas rojas, 3 azules y 3 verdes. Se extrae una sola canica.
   a) Tabule un espacio muestral no equiprobable en base al color.
   b) Tabule un espacio muestral equiprobable.

3. Un frasco contiene 4 bolas numeradas del 1 al 4. Registre un epacio muestral para los experimentos siguientes.
   a) Se extrae una bola y se registra el número. Se regresa la bola y se extrae y registra una segunda bola(muestreo con reempazamiento).
   b) Se extrae y registra una bola. Sin reemplazar la primera bola, se extrae y registra una segunda bola.

4. En el experimento del problema 3, determine la probabilidad de obtener:
   a) dos números pares b) suma impar c) un producto primo.

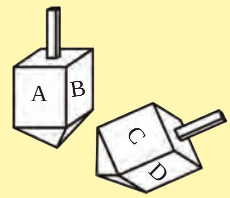
5. Un lote de 100 focos contiene 4 defectuosos y 96 en buen estado. Se seleccionan al azar cinco focos. ¿Cuál es la probabilidad de obtener 3 focos buenos y 2 defectuosos?

6. De una baraja española de 40 cartas extraemos 5 a la vez.
   a) ¿Cuál es la probabilidad de que las cinco sean oros?
   b) ¿Y la de obtener 4 ases y un oro?

AUTOEVALUACIÓN

1. Una perinola tiene cuatro lados, marcados A, B, C y D. Cuando se hace girar, se detendrá con uno de los lados hacia arriba. Simula girar la perinola tres veces y registra los resultados en cada ocasión. Traza un diagrama de árbol e incluye todos los puntos muestrales de este experimento.

2. Considera el conjunto de tres objetos {P, Q, R}
   a) Lista las permutaciones de 2 objetos escogidos de este conjunto.
   b) Lista las permutaciones de 3 objetos escogidos de este conjunto.
   c) Lista las combinaciones de 2 objetos de ese conjunto.
   d) Lista las combinaciones de 3 objetos de se conjunto.



3. Escribe todas las permutaciones de las letras W, X, Y, Z.

4. ¿Cuál (es) de las siguientes expresiones es (son) correctas?

   a) ${}_mP_n = \dfrac{m!}{(m-n)!}$ b) ${}_mC_n = n!$ c) ${}_mC_n = \dfrac{m!}{n!(m-n)!}$ d) ${}_mP_n = \dfrac{n!}{(m-n)!}$

5. ¿De cuántas maneras diferentes se pueden acomodar las cinco letras de la palabra RONDA, usando cada letra una sola vez en cada acomodación?
   a) ${}_8P_5$ b) ${}_5C_5$ c) 5! d) 5^5 e) Ninguna de las anteriores

6. Un grupo está integrado por 5 niños y 6 niñas. ¿Cuántos comités de cinco personas se pueden elegir si cada comité debe formarse con 2 niños y 3 niñas?
   a) 150 b) 200 c) 1800 d) 2400 e) Ninguna de las anteriores

7. Resuelve para n: ${}_nP_2 = 56$
   a) 7 b) 8 c) 14 d) no se da suficiente información

8. ¿Cuál(es) de las siguientes es (son) verdadera(s)

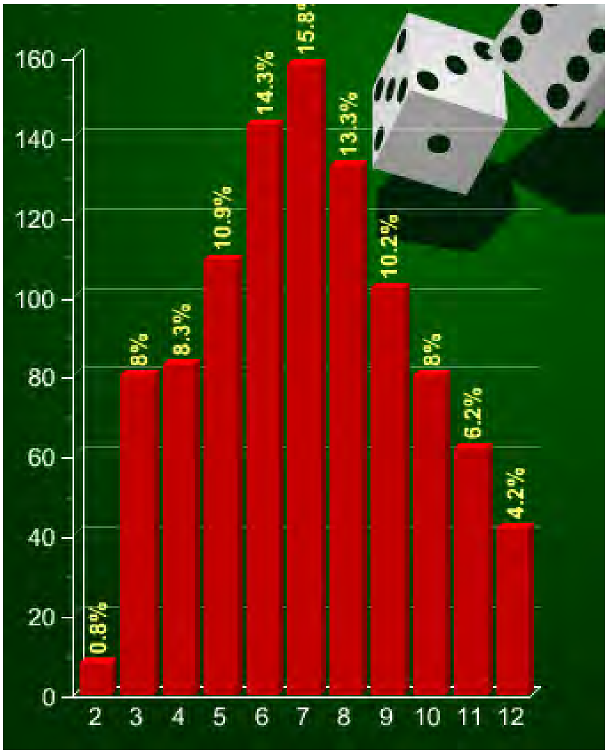
   a) ${}_{10}C_3 = {}_{10}C_7$ b) ${}_0C_3 = \dfrac{{}_{10}P_3}{3!}$ c) ${}_{10}P_3 = {}_{10}P_7$ d) ${}_mC_n = m!$

9. ¿De cuántas maneras diferentes se puede elegir un comité de 4 personas en un grupo de 12 estudiantes?
   a) 485 b) 495 c) 830 d) 28

10. Un supermercado ofrece 6 marcas de duraznos enlatados y 8 marcas de maíz enlatado. Una compradora desea probar 2 marcas diferentes de duraznos y tres marcas distintas de maíz. ¿De cuántas maneras puede escoger las 5 latas?
    a) 28 b) 10 c) 840 d) 1080

11. ¿Cuántos triáingulos se pueden formar colocando seis puntos en un plano, sin que haya tres de ellos en la misma línea recta?
    a) 10 b) 12 c) 18 d) 20

Distribuciones de Probabilidad



4

UNIDAD

Lección 4.1

Conceptos básicos: distribuciones de probabilidad, variable aleatoria, variables aleatorias discretas y continuas, función de probabilidad, valor esperado o esperanza matemática, media y desviación estándar de una distribución.

Objetivos: Entender que una variable aleatoria es una cantidad numérica cuyo valor depende de las condiciones y probabilidades asociadas con un experimento.
Entender la diferencia entre una variable aleatoria discreta y una continua.
Entender las similitudes y diferencias entre distribuciones de frecuencias y distribuciones de probabilidad.
Calcular, describir e interpretar la media y desviación estándar de una distribución de probabildad.

A lo largo de este estudio, aprendiste diversas técnicas para calcular probabilidades. Para cerrar este primer encuentro formal con la probabilidad, estudiarás las distribuciones de probabilidad. Existen muchas distribuciones de probabilidad, pero en este curso sólo estudiaremos los elementos básicos de dos de ellas: la binomial y la normal. Antes de hacerlo, deberás comprender el concepto de variable aleatoria.

Actividad 4.1 a

Qué hacer

Estudia detenidamente la siguiente información. Realiza lo indicado.

- Se han lanzado tres monedas balanceadas, cien veces, obteniéndose los siguientes resultados:

aas	*aaa*	*ssa*	*sss*	*aas*	*sas*	*aaa*	*sss*	*ass*	*aaa*	*sss*	*saa*
ssa	*aaa*	*sss*	*ssa*	*ass*	*sss*	*saa*	*sss*	*sss*	*sas*	*sas*	*sss*
asa	*ssa*	*aas*	*aaa*	*aas*	*sas*	*sss*	*sas*	*aas*	*aaa*	*sss*	*aas*
saa	*aas*	*ass*	*asa*	*aas*	*ass*	*sas*	*asa*	*aas*	*saa*	*ssa*	*asa*
aaa	*sss*	*aas*	*asa*	*ass*	*ass*	*ass*	*saa*	*ass*	*saa*	*ssa*	*asa*
ass	*ssa*	*asa*	*asa*	*sss*	*ass*	*ssa*	*sas*	*sss*	*asa*	*ass*	*ssa*
aaa	*sas*	*aas*	*sss*	*ass*	*aas*	*sas*	*ssa*	*aaa*	*ssa*	*aas*	*ssa*
asa	*aaa*	*saa*	*asa*	*ssa*	*sss*	*ass*	*saa*	*saa*	*ssa*	*aaa*	*sss*
saa	*ssa*	*sas*	*sss.*								

- ¿Qué nos informan estos datos? Recuerda que para poder encontrar un patrón en los datos, debemos organizarlos en una distribución de frecuencias.

Actividad 4.1 a (Cont.)

Recuerda que la distribución de frecuencias de una variable, es una descripción de las frecuencias con que se presenta cada una de las modalidades o valores de esa variable. La variable, es el fenómeno o característica que nos interesa estudiar. Dado un experimento, nos puede interesar una o más variables. Por tanto, necesitamos definir la variable que estudiaremos. En los experimentos aleatorios, lo que necesitamos es precisar una variable "que actúe" sobre cada resultado, asignándole un valor.

Por ejemplo, en el experimento de lanzar tres monedas consideremos la variable "*número de águilas que aparece*". ¿Cuántas águilas pueden aparecer en una ejecución del experimento?________________________________

Tu respuesta debe ser parecida a la siguiente:

pueden aparecer 0 águilas → *sss*
puede aparecer 1 águila → *ass, sas, ssa*
pueden aparecer 2 águilas → *aas, asa, saa*
pueden aparecer 3 águilas → *aaa*

Entonces, 0, 1, 2 y 3 águilas, son los posibles valores de la variable "*número de águilas al lanzar tres monedas*". En otras paloabras, la variable "*número de águilas*", le asigna un 0 al resultado *sss*, un 1 a los resultados *ass*, *sas*, *ssa*, un 2 a los resultados *aas*, *asa*, *saa*, y un 3 al resultado *aaa*.

Por tanto, los resultados anteriores, obtenidos al lanzar cien veces tres monedas, bajo la variable "*número de águilas*", se transforman en:

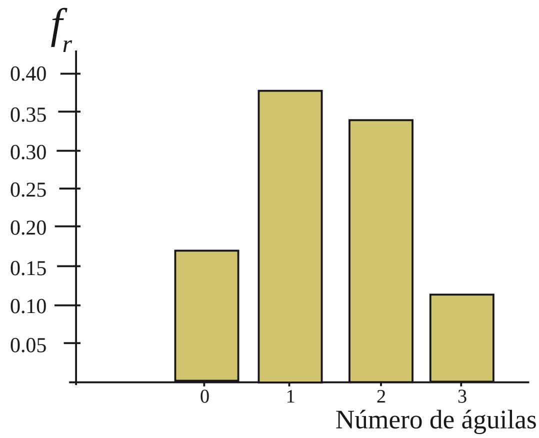
2	3	1	0	2	1	3	0	1	3	0	2
1	3	0	1	1	0	2	0	0	1	1	0
2	1	2	3	2	1	0	1	2	3	0	2
2	2	1	2	2	1	1	2	2	2	1	2
3	0	2	2	1	1	1	2	1	2	1	2
1	1	2	2	0	1	1	1	0	2	1	1
3	1	2	0	1	2	1	1	3	1	2	1
2	3	2	2	1	0	1	2	2	1	3	0
2	1	1	0								

Con esta información, construye una distribución de frecuencias absolutas y relativas.

Número de águilas	Recuento	f	f_r
0			
1			
2			
3			

Actividad 4.1 a (Cont.)

Verifica que el siguiente gráfico de barras corresponde a la distribución de frecuencias relativa que acabas de construir.

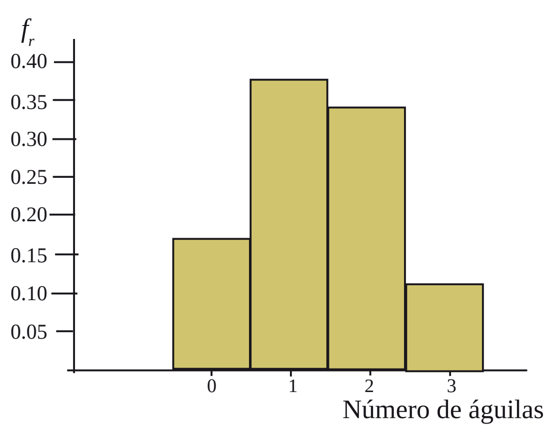


Si atendemos la definición frecuentista de la probabilidad, una distribución de frecuencias relativas también puede llamarse distribución de probabilidad.

La ***distribución de probabilidad*** de una variable, es una descripción de las probabilidades con que ocurren los diversos valores potenciales de la variable.

Para representar gáficamente una distribución de frecuencias de la variable "*número de águilas*", la cual es una variable discreta, se usó un gráfico de barras. Sin embargo, cuando hablamos de distribuciones de probabilidad, el gráfico que se usa con mayor frecuencia es el *histograma*, aunque la variable sea discreta.

A continuación, se muestra el histograma correspondiente a la distribución de probabilidad de la variable "*número de águilas*" obtenido al lanzar tres monedas, 100 veces.



Actividad 4.1 b

Para la distribución anterior, calcula:

a) La media: $\overline{X}$ =______

b) La desviación estándar: s = _____

Número de águilas	f	
0		
1		
2		
3		

Una distribución de probabilidad como la anterior, que proveniene de observaciones realizadas, recibe el nombre de ***distribución empírica de probabilidad.***

Pero, si en lugar del enfoque frecuentista aplicamos la definición de probabilidad teórica y las reglas que la rigen, obtenemos una distribución teórica de probabilidad.

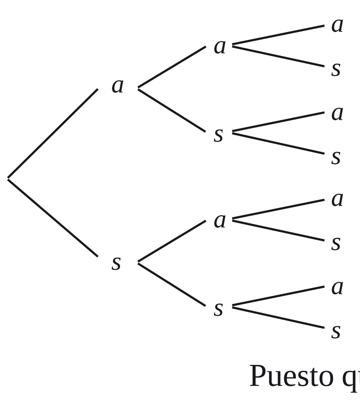
Para construir la distribución empírica, enfocamos la atención en el número de águilas obtenido cada vez que se realizó el experimento y enseguida aplicamos las herramientas estadísticas. En cambio, en el caso de probabilidades teóricas, recuerda que no repetimos los experimentos, sino que trabajamos sobre los posibles resultados distintos. Es decir, analizamos el espacio muestral. Entonces, para construir una distribución teórica de probabilidad, primero obtenemos el espacio muestral, después le aplicamos la variable implicada a cada resultado,y a continuación asignamos probabilidades según la regla de Laplace, a cada posible valor de la variable. A continuación, vamos a construir la distribución de probabilidad teórica del experimento de lanzar tres monedas.

Analiza cada uno de los pasos.

a) *Experimento*: Lanzar al aire tres monedas balanceadas.

b) *Descripción del experimento*: El experimento puede considerarse compuesto de tres etapas; en cada etapa los resultados posibles son: *a* o *s*.

c) *Diagrama de árbol y espacio muestral:*



Espacio muestral:

$S = \{aaa, aas, asa, ass, saa, sas, ssa, sss\}$

La variable "*número de águilas*" convierte estos resultados posibles en:

$\{3, 2, 2, 1, 2, 1, 1, 0\}$

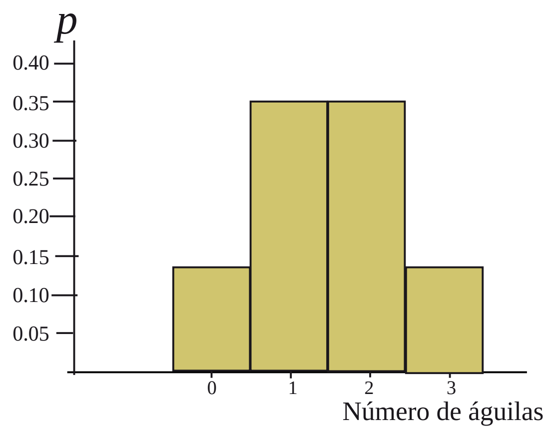
Puesto que las monedas están balanceadas, tenemos ocho resultados igualmente probables.

Ejemplo

Entonces, la distribución de probabilidad teórica es:

Número de águilas	N° Resultados favorables	**p**
0	1	1/8
1	3	3/8
2	3	3/8
3	1	1/8
Total	8	1.0

El histograma correspondiente a esta distribución es:

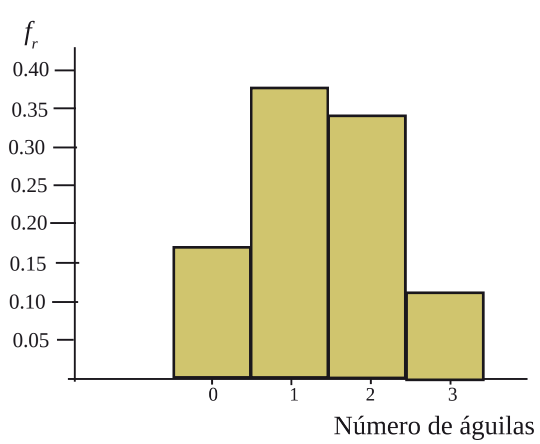


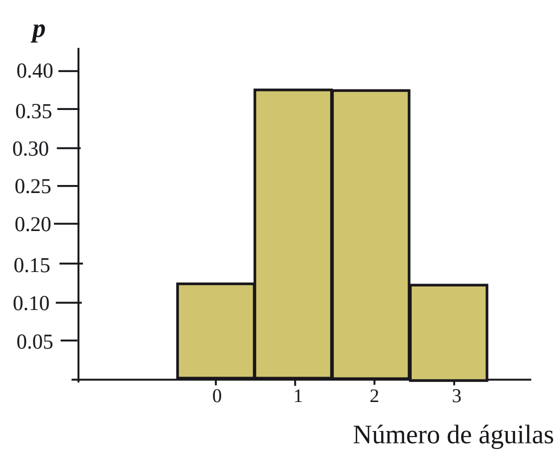
Actividad 4.1 C

A continuación, se muestran los dos histogramas correspondientes a las distribuciones de probabilidad empírica y teórica respectivamente, para el experimento de lanzar tres monedas. Analízalas y contesta:

a. ¿Qué semejanzas encuentras entre ambas distribuciones?

b. La distribución empírica se contruyó a partir de 100 repeticiones del experimento. ¿Qué pasaría si aumentamos más y más el número de repeticiones? Argumenta tu respuesta.





Actividad 4.1 d

a) Considera el experimento de lanzar dos dados. ¿Cuáles son los posibles valores de la variable "*suma de puntos de cada cara*".______________________________

b) Se han lanzado dos dados 1000 veces, registrándose los valores correspondientes a la variable "*suma de puntos de cada cara*". A partir de los resultados obtenidos, se construyó la siguiente distribución de frecuencias:

Suma de puntos	f
2	10
3	78
4	82
5	106
6	142
7	160
8	135
9	106
10	78
11	61
12	42
Total	1000

1) A partir de esta distribución, construye la distribución empírica de probabilidad y su representación gráfica.
2) Calcula la media y desviación estándar de la distribución.
3) Construye la distribución teórica de probabilidad.
4) Compara las dos distribuciones. Argumenta en qué condiciones éstas distribuciones serían prácticamente idénticas.

Estamos ya, en posibilidades de definir un concepto clave en probabilidad: el de variable aleatoria.

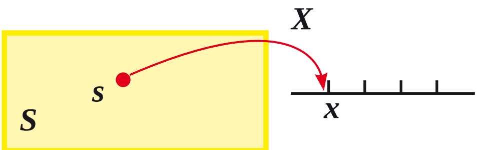
Variable aleatoria

Para un espacio muestral dado de algún experimento, una variable aleatoria es cualquier regla que asocia un número con cada resultado de dicho espacio muestral.

Puede apreciarse, que una variable aleatoria es realmente una función cuyo domino es el espacio muestral y cuyo rango es el conjunto de números reales.

Se acostumbra denotar las variables aleatorias con letras mayúsculas, tales como X, Y. Las letras minúsculas se usan para representar el valor asociado por la variable a un resultado muestral específico.

La notación $X(s)$ significa que x es el valor asociado con el resultado s por la variable aleatoria X.



Por ejemplo, en el experimento de lanzar tres monedas, la variable aleatoria *número de águilas* la denotaremos con la letra X. Las asignaciones que hace esta variable a los resultados del espacio muestral correspondiente, se indican a continuación:

$X(aaa) = 1$	$X(saa) = 2$
$X(aas) = 2$	$X(sas) = 1$
$X(asa) = 2$	$X(ssa) = 1$
$X(ass) = 1$	$X(sss) = 0$

Actividad 4.1 e

Considera el experimento de lanzar dos dados. Llama Y a la variable aleatoria "*suma de puntos en cada cara*". Simboliza las asignaciones que hace esta variable sobre cada uno de los resultados del espacio muestral.

Variables aleatorias discretas y continuas

En tu curso de estadística clasificaste las variables a partir de la naturaleza de sus valores, en discretas y continuas. Esta clasificación también se aplica para las variables aleatorias.

Variable aleatoria discreta, es una variable cuantitativa que puede tomar una cantidad numerable de valores.

Variable aleatoria continua, es una variable cuantitativa que puede tomar una cantidad innumerable de valores.

Ejemplos de variables aleatorias discretas:

- Número de hijos por familia.
- Suma de puntos al lanzar dos dados.

Ejemplos de variables aleatorias continuas:

- La estatura de un grupo de personas.
- El tiempo en que se realiza una tarea.

Funciones de probabilidad

Algunas veces es conveniente escribir una regla que exprese algebraicamente la probabilidad de un suceso en términos del valor de la variable aleatoria. Esta expresión suele escribirse como una fórmula y se denomina función de probabilidad.

Función de probabilidad, es una función expresada por medio de una fórmula matemática que nos permite calcular las probabilidades asociadas con los diversos valores de una variable aleatoria.

Las funciones de probabilidad las representaremos con la letra ***p***, y, puesto que ***x*** representa el valor que asigna la variable aleatoria al resultado del espacio muestral, la notación ***p(x)*** representa la probabilidad que corresponde al valor ***x*.**

Ejemplo

Consideremos el experimento de lanzar un dado una sola vez. Sea la variable aleatoria "*número de puntos en la cara que queda hacia arriba*". Si ***x*** representa el resultado del experimento bajo esta variable, entonces podemos plantear que los valores posibles de la distribución del número de puntos que pueden resultar al lanzar un dado, son:

$$x = 1, 2, 3, 4, 5, 6$$

Ahora, puesto que:

$$\begin{array}{ll} p(1) = 1/6 & p(4) = 1/6 \\ p(2) = 1/6 & p(5) = 1/6 \\ p(3) = 1/6 & p(6) = 1/6, \end{array}$$

la función de probabilidad para el experimento de lanzar un dado, es:

$$\boldsymbol{p}(x) = 1/6;\ \text{para } x = 1, 2, 3, 4, 5, 6$$

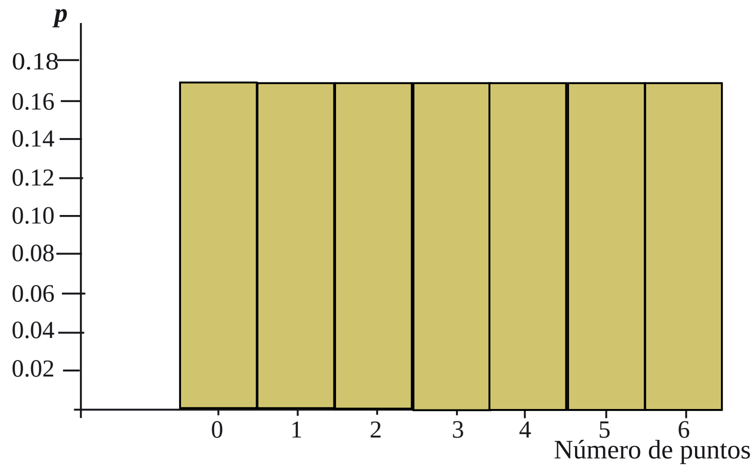
En forma de distribución:

x	*p(x)*
1	1/6
2	1/6
3	1/6
4	1/6
5	1/6
6	1/6

Al igual que en tus cursos de matemáticas, a esta función en particular, se le denomina función de probabilidad constante, porque el valor de *p(x)*, no cambia cuando varía el de *x*.

Ejemplo (Cont.)

La representación gráfica de esta función de probabilidad es la siguiente:



Puesto que los valores de una función de probabilidad son probabilidades, deben cumplir las propiedades de la probabilidad, en particular las dos siguientes:

1) La probabilidad asignada a cada valor de la variable aleatoria debe estar entre 0 y 1, inclusive; es decir, $0 \leq p(x) \leq 1$.
2) La suma de las probabilidades asignadas a cada uno de los valores de la variable aleatoria debe ser igual a 1, es decir, $\Sigma p(x) = 1$

Existen varias funciones de probabilidad de gran interés. En las próximas lecciones estudiaremos únicamente dos: la binomial y la normal.

Valor esperado o esperanza matemática

El valor esperado o esperanza matemática, es un concepto muy importante en probabilidad. En la siguiente actividad, podrás explorar este concepto.

Actividad 4.1 f

Dos jugadores A y B, van a participar en un juego que consiste en lanzar dos dados simultáneamente y calcular la diferencia de puntos entre el mayor y el menor punto mostrado por las caras que quedan hacia arriba. Las reglas son las siguientes:

a) Si resulta una diferencia de 0, 1 ó 2 entonces A gana un peso.
b) Si resulta 3, 4 ó 5 quien gana es B.
c) Comienzan con un total de 20 pesos y el juego termina cuando agotan dicha cantidad.

Actividad 4.1 f (Cont.)

Contesta:

1) ¿Cuál es la variable aleatoria implicada en el experimento?______________________
2) ¿Te parece que este juego es equitativo o justo?_____Si tuvieras que jugar, ¿cuál jugador preferirías ser?___________
3) Practica con un compañero(a) 20 veces este juego. ¿Consideras que debes cambiar la decisión que tomaste en e la pregunta 2?

En el juego planteado en la actividad anterior, tuviste que enfrentarte ante un problema de decisión. La probabilidad, proporciona las bases para ayudarte a tomar la mejor decisión ante situaciones de incertidumbre. Los conceptos de variable aleatoria y de distribución de probabilidad, nos permiten sistematizar el análisis para el logro de este propósito.
A continuación, analizaremos la distribución de probabilidad teórica del experimento de lanzar dos dados y observar "*la diferencia de puntos de las caras superiores*".

Experimento. Lanzar dos dados balanceado.
Descripción del experimento. El experimento puede considerarse compuesto de dos etapas: en cada etapa los resultados posibles son: 1, 2, 3, 4, 5 ó 6.
Espacio muestral.

$$S = \left\{ \begin{matrix} (1,1) & (1,2) & (1,3) & (1,4) & (1,5) & (1,6) \\ (2,1) & (2,2) & (2,3) & (2,4) & (2,5) & (2,6) \\ (3,1) & (3,2) & (3,3) & (3,4) & (3,5) & (3,6) \\ (4,1) & (4,2) & (4,3) & (4,4) & (4,5) & (4,6) \\ (5,1) & (5,2) & (5,3) & (5,4) & (5,5) & (5,6) \\ (6,1) & (6,2) & (6,3) & (6,4) & (6,5) & (6,6) \end{matrix} \right\}$$

La variable "*diferencia de puntos*", convierte el espacio muestral en:

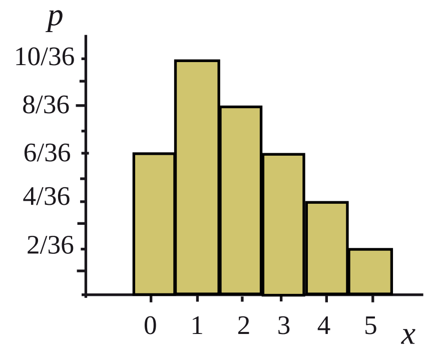
$$\begin{matrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & 0 \end{matrix}$$

Haz el recuento de todas las diferencias posibles de puntos.

x	*Recuento*	*f*
0		
1		
2		
3		
4		
5		

Tenemos 36 resultados igualmente probables. Por lo que, la distribución de probabilidad teórica es:

x	$p(x)$
0	6/36
1	10/36
2	8/36
3	6/36
4	4/36
5	2/36



Ahora, volvamos a la actividad 4.1 f:

A gana un peso, si sale 0, 1 ó 2.

B gana un peso, si sale 3, 4 ó 5.

¿Quién tiene más posibilidades de ganar?

x	$p(x)$
0	6/36
1	10/36
2	8/36
3	6/36
4	4/36
5	2/36

Probabilidad de que gane A:
6/36 +10/36 + 8/36 = 24/36

Probabilidad de que gane B:
6/36 + 4/36 + 2/36 = 12/36

Por lo tanto, el jugador A tiene ventaja sobre B, puesto que, de los 36 resultados posibles, en 24 gana A y sólo en 12 gana B.
Sin embargo, cambiando las reglas, podríamos convertir este juego, en uno equitativo. Para ello, debemos primero entender el siguiente concepto:

Esperanza matemática: si las probabilidades de obtener los importes a_1, a_2, a_3,...a_k son p_1, p_2, p_3, ...p_k, donde $p_1 + p_2 + p_3 + ...p_k = 1$, entonces la esperanza matemática es:

$$\boldsymbol{E} = a_1 p_1 + a_2 p_2 + a_3 p_3 + \ ... + a_k p_k$$

Cada cantidad se multiplica por la probabilidad correspondiente y la esperanza matemática E, se obtiene por medio de la suma de todos estos productos. En notación $\sum$:

$$E = \sum a \bullet p$$

Los valores de los importes son positivos cuando representan beneficios, triunfos o ganancias y son negativos cuando representan pérdidas, sanciones o déficits.

Calculemos los valores de la esperanza matemática que corresponde a cada jugador A y B del juego que estamos analizando.

x	$p(x)$
0	6/36
1	10/36
2	8/36
3	6/36
4	4/36
5	2/36

Si cae 0, 1 ó 2, A gana un peso.

$$E_A = 1\times\frac{6}{36} + 1\times\frac{10}{36} + 1\times\frac{8}{36} + 0\times\frac{6}{36} + 0\times\frac{4}{36} + 0\times\frac{2}{36} = \frac{24}{36}$$

Si cae 3, 4 ó 5, B gana un peso.

$$E_B = 0\times\frac{6}{36} + 0\times\frac{10}{36} + 0\times\frac{8}{36} + 1\times\frac{6}{36} + 1\times\frac{4}{36} + 1\times\frac{2}{36} = \frac{12}{36}$$

Hemos corroborado, que A tiene ventaja sobre B.

El valor esperado debemos interpretarlo como el valor que debemos esperar que ocurra a la larga. En otras palabras, decir que el jugador A tiene ventaja sobre B, no significa que A siempre vaya a ganar, pero, a largo plazo, el jugador A tiene una esperanza matemática de 24/36 = 2/3. Esto significa que en "*promedio*" de cada 3 pesos que se juegan, él gana 2.

Juego equitativo

En situaciones de azar, un criterio para "apostar" es esperar un juego justo o equitativo. A continuación, convertiremos el juego entre *A* y *B* en uno equitativo, con los siguientes cambios:

- Si sale 0, 1 ó 2 el jugador *A* gana un peso.
- Si sale 3, 4 ó 5 el jugador *B* gana dos pesos.

En este caso, la esperanza matemática (esperanza de ganancia) para cada jugador será:

$$E_A = 1\times\frac{6}{36} + 1\times\frac{10}{36} + 1\times\frac{8}{36} + 0\times\frac{6}{36} + 0\times\frac{4}{36} + 0\times\frac{2}{36} = \frac{24}{36}$$

$$E_B = 0\times\frac{6}{36} + 0\times\frac{10}{36} + 0\times\frac{8}{36} + 2\times\frac{6}{36} + 2\times\frac{4}{36} + 2\times\frac{2}{36} = \frac{24}{36}$$

Puesto que la esperanza de ganar es la misma para cada jugador, el juego se considera justo.

Un **juego es equitativo**, si la esperanza de la cantidad ganada por cada jugador es la misma.

Actividad 4.1 g

Contesta:

Un juego consiste en lanzar dos dados balanceados y calcular la suma de puntos. El jugador *A* gana una ficha si resulta una suma de 6, 7, 8 ó 9. El jugador *B* gana una ficha si la suma es distinta de esas señaladas. Calcula la esperanza matemática de *A* y de *B*. ¿Qué prefieres ser, jugador *A* o *B*? Justifica.

La media de una distribución de probabilidad

Al igual que para describir conjuntos de datos se utilizan los promedios y las medidas de dispersión, para describir una distribución de probabilidad se usan la media y la desviación estándar.

La media de una variable aleatoria discreta, denotada con la letra griega μ (mu), se encuentra al multiplicar cada valor posible de *x* por su probabilidad y después sumar todos los productos.

En símbolos: si una variable aleatoria toma los valores $x_1, x_2, x_3, \ldots x_k$, con las probabilidades $p(x_1), p(x_2), p(x_3), \ldots p(x_k)$, la media o valor esperado denotado por μ *es*

$$\mu = x_1 \cdot p(x_1) + x_2 \cdot p(x_2) + x_3 \cdot p(x_3) + \ldots + x_k \cdot p(x_k)$$

En la notación abreviada, escribimos:

$$\mu = \sum x \cdot p(x)$$

Puesto que la media es un valor que se espera ocurra a la larga, también se le llama valor esperado.

$$\mu = E(x) = \sum x \cdot p(x)$$

La media de una distribución de probabilidad denotada con la letra griega μ (mu) se define como el valor esperado de la variable aleatoria.

Varianza y desviación estándar de una distribución de probabilidad

En tu curso de estadística estudiaste que no es suficiente conocer la media de un conjunto de datos. La media, debe siempre acompañarse de una medida de dispersión, la cual generalmente es la varianza o la desviación estándar.

El cálculo de la varianza de una distribución de probabilidad, se hace casi de la misma manera que ya conoces, pero en vez de promediar las desviaciones cuadráticas de la media, obtenemos su valor esperado.

En general, si una variable aleatoria toma los valores $x_1, x_2, x_3, \ldots x_k$, con las probabilidades $p(x_1), p(x_2), p(x_3), \ldots p(x_k)$, la varianza de la distribución de probabilidad denotada como σ^2, se define como el valor esperado (la media), de las desviaciones con respecto a la media, elevadas al cuadrado:

$$\sigma^2 = (x_1-\mu)^2 \bullet p(x_1) + (x_2-\mu)^2 \bullet p(x_2) + \ldots + (x_k-\mu)^2 \bullet p(x_k)$$

En notación sigma:

$$\sigma^2 = \Sigma(x-\mu)^2 \bullet p(x)$$

La raíz cuadrada positiva de la varianza, es la desviación estándar de la distribución de probabilidad.

$$\sigma = \sqrt{\Sigma(x-\mu)^2 \bullet p(x)}$$

Observación. Recuerda que la media de una muestra se denota con $\overline{X}$. La media de una población, y de una distribución de probabilidad, se denotan con la letra griega μ. Estas notaciones usadas para las distribuciones de probabilidad, se debe a que éstas se pueden usar para representar poblaciones teóricas. Por tanto, se usan parámetros de poblaciones para describir las distribuciones de probabilidad, igual que se usan estadígrafos muestrales para describir muestras.

Ejemplo

Hallar la media y la desviación estándar de la distribución de probabilidad correspondiente al número de águilas obtenidas al lanzar tres monedas.

Solución

La distribución de este experimento y de la variable alaetoria indicada, ya la obtuvimos en páginas anteriores:

x	$p(x)$
0	1/8
1	3/8
2	3/8
3	1/8
	1.0

Cálculo de la media: $\mu = E(x) = \sum x \bullet p(x)$

$$= 0\times\left(\frac{1}{8}\right) + 1\times\left(\frac{3}{8}\right) + 2\times\left(\frac{3}{8}\right) + 3\times\left(\frac{1}{8}\right)$$

$$= 1.5$$

Observación. El valor esperado de los resultados de lanzar tres monedas y observar el número de águilas no es "literalmente significativo", puesto que nunca se puede obtener 1.5 águilas. Lo que ésto significa es que a la larga, deaspués de muchos lanzamientos el valor promedio sería 1.5 águilas.

Ejemplo (Cont.)

Cálculo de la varianza:

$$\sigma^2 = \Sigma(x-\mu)^2 \bullet p(x)$$
$$= (0-1.5)^2 \times \left(\frac{1}{8}\right) + (1-1.5)^2 \times \left(\frac{1}{8}\right) + (2-1.5)^2 \times \left(\frac{3}{8}\right) + (3-1.5)^2 \left(\frac{1}{8}\right)$$
$$= 0.75$$

Cálculo de la desviación estándar

$$\sigma = \sqrt{\Sigma(x-\mu)^2 \bullet p(x)}$$
$$= \sqrt{0.75} = 0.87$$

Actividad 4.1 h

Una familia planea procrear tres hijos. asumiendo que existe la misma probabilidad de tener niña o niño, determina:

a) La distribución de probabilidad.
b) la media, la varianza y la desviación estándar.

Ejercicio 4.1

1. Explica con tus propias palabras, cada uno de los siguientes conceptos. Ejemplifica.
   a. Variable aleatoria.
   b. Variable aleatoria discreta.
   c. Variable aleatoria continua.
   d. Distribución de frecuencias.
   e. Distribución de probabilidad.
2. ¿Cuál es la diferencia entre variable aleatoria discreta y variable aleatoria continua?
3. ¿Cuáles son las semejanzas y diferencias entre las distribuciones de frecuencias y las de probabilidad?
4. A continuación, se presentan dos distribuciones de probabilidad:

a)

x	1	2	3	4	5
$p(x)$	0.6	0.1	0.1	0.1	0.1

b)

x	1	2	3	4	5
$p(x)$	0.1	0.2	0.4	0.2	0.1

Para cada distribución:

a) Traza el histograma y describe laforma de la distribución.
b) Calcula el valor esperado y la desviación estándar.
c) ¿Cuál es la probabilidad de que un valor de x se encuentre entre $\mu - \sigma$ y $\mu + \sigma$

Lección 4.2 Permutaciones con repetición

Objetivos: Comprender el concepto de permutaciones con repetición y aplicarlo en la solución de problemas.

El concepto de permutaciones con repetición, lo utilizaremos como un conocimiento previo muy importante para entender las distribuciones binomiales.

Actividad 4.2 a

Qué hacer

Regresa a la lección (3.4) y repasa los conceptos y procedimientos de cálculo de las permutaciones y las combinaciones.

Recordemos que una permutación de *m* elementos diferentes es una ordenación de dichos elementos de tal manera que un elemento sea 1°, otro sea 2°, otro más sea 3° y así sucesivamente.

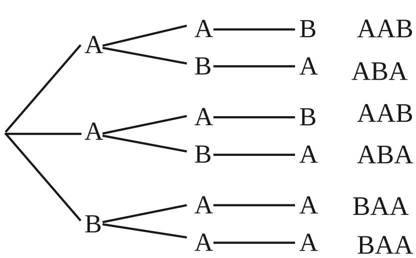
Por ejemplo, las permutaciones de *A*, *B* y *C*, son:

ABC *BAC* *CAB*
ACB *BCA* *CBA*

Supongamos, ahora, que se pide hallar las permutaciones posibles de las letras *A, A, B.*
El número total de permutaciones, de estas letras sería:

$$_3P_3 = 3! = 3\times 2 = 6$$

Pero, no todos estos arreglos serían distinguibles porque hay dos letras “A” en la lista.



¿Cuantas permutaciones diferentes son?

AAB
ABA
~~AAB~~
~~ABA~~
BAA
~~BAA~~

Son tres permutaciones diferentes: *AAB*, *ABA* y *BAA*.

Veamos otro ejemplo: ¿Cuántas palabras de tres letras puedes escribir con las letras de la palabra *OSA*? ¿Y con la palabra *OSO*?

Con la palabra *OSA*, ya sabemos que hay $P_3 = 3! = 6$ y son:

OSA *ASO* *SOA*

SAO *AOS* *OAS*

Al convertir la *A* en *O*, cada dos palabras ($P_2 = 2! = 2$) se transforman en una.

OSA *ASO* *SOA* *SAO* *AOS* *OAS*

OSO *SOO* *OOS*

Hemos formado permutaciones con repetición de 3 elementos de orden 2 (es decir, palabras con dos letras iguales y la tercera distinta) y hemos visto que:

$$PR_2^3 = \frac{3!}{2!} = 3$$

En general, si un conjunto de *m* objetos tiene m_1 de una clase, m_2 de una segunda clase, m_3 de una tercera clase, y así sucesivamente, con $m = m_1 + m_2 + ... + m_k$, entonces, el número de permutaciones de los *m* objetos es:

$$PR_{m_1, m_2, ... m_k}^m = \frac{m!}{m_1! m_2! ... m_k!}$$

Ejemplo

¿En cuantas formas distinguibles pueden escribirse las letras de *BANANA?*

Solución

Esta palabra tiene seis letras, de las cuales tres son *A*, dos son *N* y una es *B*. Por lo tanto, el número de formas distinguibles en que las letras pueden escribirse es:

$$PR_{3,2,1}^6 = \frac{6!}{3!\,2!\,1!} = 60$$

Equivalencia entre el número de permutaciones con repetición y el número de combinaciones

Sea el experimento de lanzar una moneda cuatro veces seguidas. ¿De cuantas maneras pueden obtenerse un sello y tres águilas sin importar el orden?

Obtener en cuatro lanzamientos un sello y tres águilas, sería por ejemplo: *saaa;* pero, como no importa el orden este resultado puede darse de

$$PR_{3,1}^4 = \frac{4!}{3!1!} = 4 \text{ maneras } \begin{cases} saaa \\ asaa \\ aasa \\ aaas \end{cases}$$

Si pensamos en la variable aleatoria “*número de sellos*” por ejemplo, la pregunta: ¿de cuántas maneras puede darse el resultado un sello y tres águilas?, puede cambiarse a: ¿<u>en cuáles de cuatro lugares disponibles puede colocarse un sello</u>?

$$\begin{array}{cccc} \boldsymbol{s} & \boldsymbol{a} & \boldsymbol{a} & \boldsymbol{a} \\ \square & \square & \square & \square \\ \boldsymbol{L_1} & \boldsymbol{L_2} & \boldsymbol{L_3} & \boldsymbol{L_4} \end{array}$$

Se elige un lugar de cuatro disponibles, para colocar un sello.

Si se elige L_1, el resultado supuesto es: *saaa*

L_1 es ocupado por s.

Si se elige L_2, el resultado supuesto es: *asaa*

L_2 es ocupado por s.

Si se elige L_3, el resultado supuesto es: *aasa*

L_3 es ocupado por s.

Si se elige L_4, el resultado supuesto es: *aaas*

L_4 es ocupado por s.

Pero, elegir un lugar de cuatro sin importar el orden, es una combinación de cuatro elementos tomado uno a la vez.

$$_4C_1 = \frac{4!}{3!1!} = 4$$

Puede observarse la siguiente equivalencia:

$$PR^4_{3,1} = {}_4C_1 = \frac{4!}{3!1!} = 4$$

Consideremos el mismo experimento y la misma variable aleatoria, pero ahora la pregunta es: ¿de cuántas maneras se pueden obtener dos sellos?

Obtener en cuatro lanzamientos dos sellos, y, por consiguiente dos águilas, sería por ejemplo: *ssaa;* pero, como no importa el orden este resultado puede darse de

$$PR^4_{2,2} = \frac{4!}{2!2!} = 6 \quad \text{maneras} \left\{ \begin{array}{l} aass \\ asas \\ assa \\ saas \\ sasa \\ ssa \end{array} \right.$$

Ahora, si pensamos en cuatro lugares, de los cuales tomaremos dos para colocar en cada uno un sello tenemos:

$$\begin{array}{cccc} s & s & a & a \\ \square & \square & \square & \square \\ L_1 & L_2 & L_3 & L_4 \end{array}$$

Se eligen dos lugares de cuatro disponibles, para colocar dos sellos

Si se eligen $L_1 L_2$, el resultado supuesto es: *ssaa*

$L_1 L_2$, son ocupados por un s cada uno.

Si se eligen $L_1 L_3$, el resultado supuesto es: *sasa*

$L_1 L_3$, son ocupados por un s cada uno.

Si se eligen $L_1 L_4$, el resultado supuesto es: *saas*

$L_1 L_4$, son ocupados por un s cada uno.

Si se eligen $L_2 L_3$, el resultado supuesto es: *assa*

$L_2 L_3$, son ocupados por un s cada uno.

Si se eligen $L_2 L_4$, el resultado supuesto es: *asas*

$L_2 L_4$, son ocupados por un s cada uno.

Si se eligen $L_2 L_4$, el resultado supuesto es: *assa*

$L_2 L_4$, son ocupados por un s cada uno.

Pero, elegir dos lugares de cuatro sin importar el orden, es una combinación de cuatro elementos tomado dos a la vez.

$$_4C_2 = \frac{4!}{2!\,2!} = 6$$

Puede observarse la siguiente equivalencia:

$$PR^4_{2,2} = {_4C_2} = \frac{4!}{2!\,2!} = 6$$

En general, si m objetos están divididos en una clase m_1 y una segunda clase m_2, con $m = m_1 + m_2$, se cumple que:

$$PR^{m}_{m1m2} = {}_{m}C_{m1} = {}_{m}m_{m2} = \frac{m!}{m_1!\ m_2!}$$

Ejercicio 4.2

1. Tienes cuatro monedas de un peso. ¿De cuántas formas puedes colocarlos sin importar el orden si siempre se ven las dos águilas y los dos sellos? En otras palabras, ¿de cuántas maneras puedes escribir?

2. ¿Cuántos números de 8 cifras puedes escribir con 4 tres, 2 cincos, un seis y un siete?

3. En cada caso, encuentra el número de permutaciones con repetición en cada grupo dado de letras.

a) A, A, G, E, E, E, M.
b) A, A, Y, Y, Y, Y, X, X, X.
c) A, L, G, E, B, R, A.
d) a, a, s
e) a, s, s.
f) C, X, X, X, X.

Lección 4.3 Distribución de probabilidad binomial

Objetivos: Entender los elementos clave de un experimento binomial y ser capaces de definir x, n, p y q.
Saber y ser capaz de calcular y aplicar probabilidades binomiales usando la función de probabilidad binomial.
Calcular, describir e interpretar la media y la desviación estándar de una distribución de probabilidad binomial.

La distribución binomial se aplica en una gran cantidad de situaciones, como las mostradas a continuación:

- Se va a inspeccionar un lote de lámparas producido por cierta fábrica. Se sabe por experiencia, que en condiciones normales de uso, el 70% durará 2000 horas encendidas. Queremos conocer la probabilidad de que entre seis de estas lámparas, 4 duren 2000 horas encendidas.
- ¿Es fácil aprobar por adivinación? Para que un estudiante apruebe, debe contestar correctamente por lo menos 6 preguntas de 10 de opción múltiple (cada una con cuatro opciones). ¿Qué tan probable es que un alumno apruebe por adivinación?

Para que una situación o fenómeno sea considerado binomial, debe cumplir las siguientes propiedades:

1. Cada observación se puede clasificar en una y sólo una de dos categorías: *éxito* o *fracaso* (experimento dicotómico).
2. El resultado (es decir, el éxito o fracaso) de cualquier observación, es independiente del resultado de cualquier otra observación. Para que se cumpla esta condición, se considera que cada observación es producto de una *población infinita sin reposición* o de una *población finita con reposición.*
3. Como consecuencia de la propiedad 2, la probabilidad de que una observación sea clasificada como éxito, es constante de una observación a otra; por lo tanto, la probabilidad de que una observación sea clasificada como fracaso, también es constante a lo largo de todas las observaciones.

Para resolver problemas catalogados como binomiales, se usa una fórmula (función de probabilidad), que proporciona de manera directa las probabilidades. También es usual utilizar tablas elaboradas para dicho fin.
Sin embargo, para que puedas entender lo que hay detrás de esa función binomial, debes estudiar detenidamente la siguiente actividad.

Actividad 4.3 a

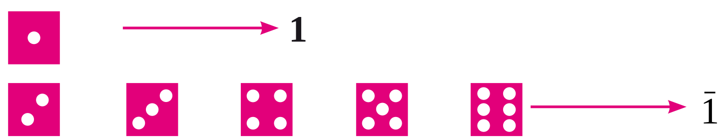
Qué hacer

Estudia detenidamente los siguientes ejemplos:

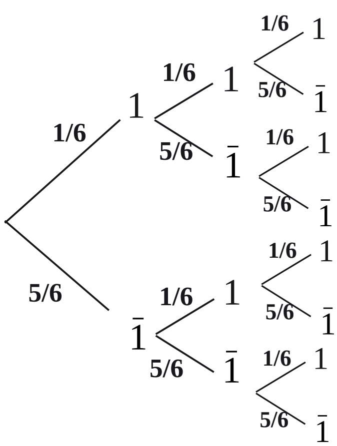
1. Sea el experimento que consiste en lanzar un dado balanceado tres veces. ¿Cuál es la probabilidad de obtener exactamente dos unos?

Solución

Cuando estudiaste los experimentos dicotómicos, aprendiste a tratar este tipo de experimentos. Estamos frente a un experimento compuesto de tres etapas. Puesto que nos interesa que caiga uno, en cada etapa las opciones son:



Verifica que el árbol de probabilidades es el siguiente:



En cada lanzamiento (etapa), tenemos que:

P(éxito) = P(obtener uno) = 1/6

P(fracaso) = P(no obtener uno) = 5/6

La probabilidad de obtener dos unos es favorecido por:

$$\{11\bar{1}\,,\ 1\bar{1}1\,,\ \bar{1}11\}$$

Entonces,

$$P(\text{obtener 2 unos}) = P(11\bar{1}) + P(1\bar{1}1) + P(\bar{1}11)$$
$$= \underbrace{(1/6)(1/6)(5/6) + (1/6)(5/6)(1/6) + (5/6)(1/6)(1/6)}$$
$$= 3 \times P(11\bar{1})$$

Es decir, la probabilidad de este experimento binomial, es un múltipo de la probabilidad de un resultado que llamaremos ***resultado básico.*** En este ejemplo el resultado básico es: $11\bar{1}$.

La pregunta que nos falta contestar es: ¿cómo surge ese múltiplo?

El múltipo 3, surge del siguiente hecho:

Actividad 4.3 a (Cont.)

El arreglo $11\bar{1}$ se puede ordenar de tres maneras distintas:

$11\bar{1}$
$1\bar{1}1$
$\bar{1}11$

Pero, estas tres maneras distintas, son las permutaciones de tres objetos ($11\bar{1}$) con dos idénticos (11).

$$PR_{2,1}^{3} = \frac{3!}{2!1!} = 3$$

Entonces: *P(dos unos en tres lanzamientos) =*

$$= PR_{2,1}^{3} \times P(11\bar{1}) = \frac{3!}{2!1!} \times \left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{5}{6}\right) = 3 \times \frac{5}{216} = \frac{15}{216}$$

O bien:

P(dos unos en tres lanzamientos) =

$$= {}_{3}C_{2} \times P(11\bar{1}) = \frac{3!}{2!1!} \times \left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{5}{6}\right) = 3 \times \frac{5}{216} = \frac{15}{216}$$

2. Sea el experimento que consiste en lanzar un dado cinco veces. ¿Cuál es la probabilidad de obtener exactamente dos unos?

Solución

Obtener dos unos en cinco intentos, tiene como resultado básico: $11\bar{1}\,\bar{1}\,\bar{1}$

La probabilidad del resultado básico es: $P(11\bar{1}\,\bar{1}\,\bar{1}) = (1/6)(1/6)(5/6)(5/6)(5/6) = 5^3/6^5$

Pero, como no importa el orden en que aparezcan los unos, debemos multiplicar esta probabilidad por el número de permutaciones de 5 objetos con un grupo de 2 repetidos (11) y otro de 3 ($\bar{1}\,\bar{1}\,\bar{1}$).

Entonces:

P(2 unos en 5 lanzamientos) =

$$= PR_{2,3}^{5} \times P(11\overline{111}) = \frac{5!}{2!3!} \times \left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{5}{6}\right)\left(\frac{5}{6}\right)\left(\frac{5}{6}\right) = 10 \times \frac{5^3}{6^5}$$

Recuerda que el factor 10 que multiplica la probabilidad del resultado básico, puede también verse como una combinación de 5 objetos tomados 2 a la vez.

P(2 unos en 5 lanzamientos) =

$$= {}_{5}C_{2} \times P(11\overline{111}) = \frac{5!}{2!3!} \times \left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{5}{6}\right)\left(\frac{5}{6}\right)\left(\frac{5}{6}\right) = 10 \times \frac{5^3}{6^5}$$

Actividad 4.3 b

Vuelve a considerar el experimento que consiste en lanzar un dado cinco veces.

a) Verifica mediante un árbol de probabilidades el resultado obtenido para el suceso “*obtener exactamente dos unos*.

b) Determina la probabilidad de obtener exactamente tres cincos.

Obtención de la función de probabilidad binomial (modelo matemático)

A continuación desarrollaremos el modelo matemático de una distribución binomial. El modelo está basado en las siguientes consideraciones:

- En los problemas de probabilidad binomial, estamos interesados en la probabilidad de obtener “*x éxitos* en *n* intentos”.

  En otras palabras: “*x éxito* y
  n - *x fracasos* en *n* intentos”

$$\overbrace{\underbrace{\qquad\qquad}_{x\ \textit{éxitos}}\underbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad}_{n\,-\,x\ \textit{fracasos}}}^{n \text{ intentos (muestra de tamaño } n\text{)}}$$

- Hay un número fijo de intentos (etapas o repeticiones) del experimento, y la probabilidad de éxito es la misma para cada intento.
- Llamaremos ***p*** a la probabilidad de un éxito y ***q* = *1* - *p*** la probabilidad de un fracaso.
- La probabilidad de obtener *x éxitos y n - x fracasos* en algún orden específico (***resultado básico***) es:

$$\boldsymbol{P}\left(\begin{array}{l}\textit{obtener x éxitos en}\\ \quad \textit{un órden específico}\end{array}\right) = p^{x}\left(1-p\right)^{n-x}$$

- Para considerar todas las posibles maneras en que puede darse el resultado básico, *multiplicamos la probabilidad de éste, por un factor*, que indica el número de maneras en que se puede ordenar dicho resultado básico.
- La manera en que se pueden colocar sin importar el orden, un resultado que en *n* intentos tiene *x* éxitos y *n* - *x* fracasos, es:

$$\underbrace{e\;e\;\ldots\;e}_{x\text{ éxitos}}\underbrace{f\,f\,f\ldots f}_{n\,-\,x\ \textit{fracasos}} \qquad\qquad PR^{n}_{x,n-x} = \frac{n!}{x!\left(n-x\right)!}$$

Ésto último, equivale a la manera en que se pueden tomar *x* lugares de *n* disponibles; ésto, representa una combinación de *n* objetos tomados *x* a la vez:

$$ {}_nC_x = \frac{n!}{x!(n-x)!} $$

- Por tanto, la probabilidad de obtener *x* éxitos en *n* intentos independientes es:

$$ P(x) = PR^{n}_{x,n-x} \bullet p^{x}(1-p)^{n-x} = {}_nC_x \bullet p^{x}(1-p)^{n-x} = \frac{n!}{x!(n-x)!} \bullet p^{x}(1-p)^{n-x} $$

Para $x = 0, 1, 2, \ldots$o n.

Ejemplo

Según encuesta realizada por el Sindicato Nacional de Trabajadores de la Educación (SNTE), 1/3 de los estudiantes de nivel secundaria, se sienten inseguros dentro de su escuela. Si elegimos al azar a 5 estudiantes de secundaria, determina la probabilidad que entre los 5, sientan inseguridad:

a) 0 b)1 c)2 d)3 e)4 f) 5

Solución

Descripción del experimento: el experimento consiste en 5 intentos o repeticiones independientes; por tanto, $n = 5$. Si llamamos éxito al resultado "*siente inseguridad*", entonces, la probabilidad de éxito para cada intento que consiste en preguntar a un estudiante sobre su sentimiento de inseguridad es, $p = 1/3$, y se considera siempre la misma. La probabilidad de que no se sienta inseguridad es: $q = 1 - p = 1 - 1/3 = 2/3$.

Solución del inciso a): $n = 5, x = 0, n - x = 5$

$$ P(0) = \frac{5!}{0!5!}\left(\frac{1}{3}\right)^{0}\left(\frac{2}{3}\right)^{5} = 1\bullet 1\bullet\left(\frac{32}{243}\right) = \frac{32}{243} = 0.1317 $$

Por tanto, la probabilidad de que entre cinco estudiantes de secundaria, elegidos al azar, ninguno sienta inseguridad es 0.1317

Solución del inciso b): $n = 5, x = 1, n - x = 4$

$$ P(1) = \frac{5!}{1!4!}\left(\frac{1}{3}\right)^{1}\left(\frac{2}{3}\right)^{4} = 5\bullet\frac{1}{3}\bullet\left(\frac{16}{81}\right) = \frac{80}{243} = 0.3292 $$

Así, la probabilidad de que entre cinco estudiantes de secundaria, elegidos al azar, exactamente uno sienta inseguridad es 0.3292

Ejemplo
(Cont.)

Solución del inciso c): *n = 5, x = 2, n - x = 3*

$$P(2) = \frac{5!}{2!3!}\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^3 = 10\left(\frac{1}{9}\right)\left(\frac{8}{27}\right) = \frac{80}{243} = 0.3292$$

Así, la probabilidad de que entre cinco estudiantes de secundaria, elegidos al azar, exactamente dos sientan inseguridad es 0.3292

Solución del inciso d): *n = 5, x = 3, n - x = 2*

$$P(3) = \frac{5!}{3!2!}\left(\frac{1}{3}\right)^3\left(\frac{2}{3}\right)^2 = 10\left(\frac{1}{27}\right)\left(\frac{4}{9}\right) = \frac{40}{243} = 0.1646$$

Por tanto, la probabilidad de que entre cinco estudiantes de secundaria, elegidos al azar, exactamente tres sientan inseguridad es 0.1646

Solución del inciso e): *n = 5, x = 4, n - x = 1*

$$P(4) = \frac{5!}{4!1!}\left(\frac{1}{3}\right)^4\left(\frac{2}{3}\right)^1 = 5\left(\frac{1}{81}\right)\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{10}{243} = 0.0412$$

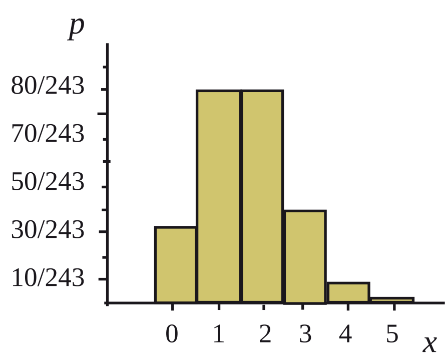
Por tanto, la probabilidad de que entre cinco estudiantes de secundaria, elegidos al azar, exactamente cuatro sientan inseguridad es 0.0412

Solución del inciso f): *n = 5, x = 5, n - x = 0*

$$P(5) = \frac{5!}{5!0!}\left(\frac{1}{3}\right)^5\left(\frac{2}{3}\right)^0 = 1\left(\frac{1}{243}\right)(1) = \frac{1}{243} = 0.0041$$

Por tanto, la probabilidad de que entre cinco estudiantes de secundaria, elegidos al azar, exactamente cinco sientan inseguridad es 0.0041

Puesto que hemos calculado las probabilidades para cada uno de los valores posibles de la variable aleatoria, a saber: x = 0, 1, 2, 3, 4, 5, podemos trazar el histograma de la distribución. Observa la figura y contesta: ¿qué forma tiene el histograma?___________________________________



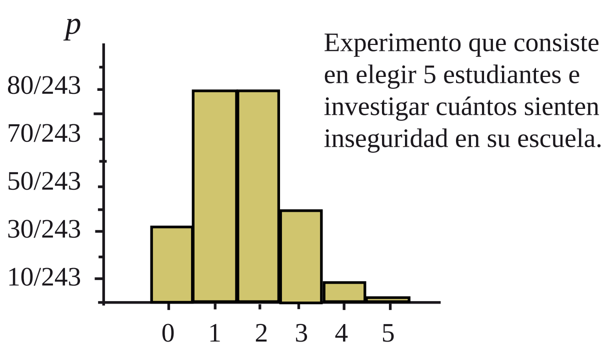
Actividad 4.3 c

Considera los siguientes experimentos y la variable aleatoria indicada:

1) Tres lanzamientos de un dado balanceado. Determina la probabilidad que entre los 3 lanzamientos aparezcan 0, 1, 2 ó 3 veces la cara con tres puntos. Traza el histograma.
   a) Verifica mediante un árbol de probabilidades el resultado obtenido para el suceso "*obtener exactamente dos unos*.
   b) Determina la probabilidad de obtener exactamente tres cincos.
2) Cuatro lanzamientos de una moneda balanceada. Determina la probabilidad que entre los 4 lanzamientos aparezcan 0, 1, 2, 3 ó 4 veces la cara con águila. Traza el histograma.
   a) Verifica mediante un árbol de probabilidades el resultado obtenido para el suceso "*obtener exactamente dos unos*.
   b) Determina la probabilidad de obtener exactamente tres cincos.

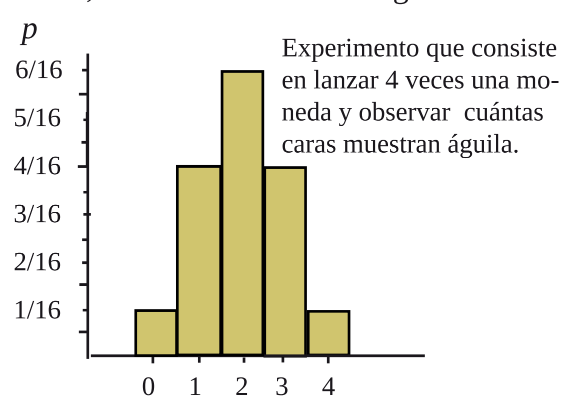
Forma de una distribución binomial.

Los resultados de la actividad (4.3 c), te permiten confirmar la siguiente afirmación: una distribución binomial puede ser simétrica o sesgada. Siempre que p sea igual a 0.5, la distribución binomial será simétricas. Sin embargo, cuando p sea diferente de cero, la distribución será sesgada.



x: número de estudiantes que se sienten inseguros.

Distribución binomial con ***p* = 1/3.** (Sesgada a la derecha)



x: número de águilas.

Distribución binomial con ***p* = 1/2.** (Simétrica)

La media y la desviación estándar de una distribución binomial

Recuerda que la media y la desviación estándar, ayudan a describir una distribución. A continuación estableceremos las fórmulas para calcular la media y la desviación estándar de una distribución binomial. Para que cuentes con un apoyo para el entendimiento de dichas fórmulas, utilizaremos el siguiente experimento: Un matrimonio desea procrear cuatro hijos. Asumiendo que existe la misma probabilidad de que nazca niño o niña en cada nacimiento, realiza lo indicado para la variable aleatoria "*número de niños*":

a) Construye la distribución de probabilidad
b) Calcula la media y desviación estándar.

Descripción del experimento: el experimento consiste en 4 intentos o repeticiones independientes; por tanto, n = 4. Si llamamos éxito al resultado "*nace niño*", entonces, la probabilidad de éxito para cada intento que consiste en verificar el sexo de cada bebé es, *p = 1/2,* y se considera siempre la misma. La probabilidad de que no sea niño es:
q = 1 - p = 1 - 1/2 = 1/2.

Probabilidad de tener:

0 niños: $P(0) = \frac{4!}{0!4!}\left(\frac{1}{2}\right)^0\left(\frac{1}{2}\right)^4 = 1•1•\left(\frac{1}{16}\right) = \frac{1}{16}$

1 niño: $P(1) = \frac{4!}{1!3!}\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^3 = 4•\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{8}\right) = \frac{4}{16}$

2 niños: $P(2) = \frac{4!}{2!2!}\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^2 = 6•\left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{6}{16}$

3 niños: $P(3) = \frac{4!}{3!1!}\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^1 = 4•\left(\frac{1}{8}\right)\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{4}{16}$

4 niños: $P(4) = \frac{4!}{4!0!}\left(\frac{1}{2}\right)^4\left(\frac{1}{2}\right)^0 = 1•\left(\frac{1}{16}\right)(1) = \frac{1}{16}$

Distribución de probabilidad:

x	*p(x)*
0	6/16
1	4/16
2	6/16
3	4/16
4	1/16

Cálculo de la media:

$$\mu = E(x) = \Sigma x • p(x)$$

$$= 0\times\left(\frac{1}{16}\right) + 1\times\left(\frac{4}{16}\right) + 2\times\left(\frac{6}{16}\right) + 3\times\left(\frac{4}{16}\right) + 4\times\left(\frac{1}{16}\right)$$

$$= 2$$

Con base en este resultado, haremos las siguientes observaciones:

- El experimento consiste en cuatro etapas: n = 4.
- La probabilidad de éxito en cada etapa es: p = 1/2 y de fracaso es: q = 1/2.
- El valor de la media puede escribirse:

$$\mu = 4•\frac{1}{2} = n•p = 2$$

En general, se cumple que:

La media de una distribución binomial es

$$\mu = n \cdot p$$

Calculemos ahora, la desviación estándar de la distribución anterior:

$$\sigma^2 = \Sigma(x-\mu)^2 \bullet p(x)$$

$$= (0-2)^2 \times \left(\frac{1}{16}\right) + (1-2)^2 \times \left(\frac{4}{16}\right) + (2-2)^2 \times \left(\frac{6}{16}\right) + (3-2)^2 \times \left(\frac{4}{16}\right) + (4-2)^2 \times \left(\frac{1}{16}\right)$$

$$= 4 \times \left(\frac{1}{16}\right) + 1 \times \left(\frac{4}{16}\right) + 0 \times \left(\frac{6}{16}\right) + 1 \times \left(\frac{4}{16}\right) + 4 \times \left(\frac{1}{16}\right) = 1$$

$$\sigma = \sqrt{1} = 1$$

Observa que:

$$\sigma^2 = 4\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) = 1$$

$$= n \bullet p \bullet q$$

En general, este resultado siempre es válido.

La desviación estándar de una distribución binomial es:

$$\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot q} = \sqrt{n \cdot p\,(1-p)}$$

Ejercicio 4.3

1. La probabilidad de que una persona lea un volante que se le entrega en la vía pública es 0.4. Supongamos que el volante se entregó a tres personas, cuyas decsisones de leerlo son independientes. a) Construya la distribución de probabilidades binomial del número de personas que estarán dispuestas a leer el volante. b) Calcule la media y desviación estándar. c) Describa la distribución obtenida. d) ¿Cuál es la probabilidad de que al menos 2 personas lean el volante?
2. En una caseta revisión fitosanitaria, la probabilidad de que un automóvil lleve frutas es de 0.01 y el que un automóvil lleve o no frutas no depende de que cualquier otro automóvil la lleve. ¿Cuál es la probabilidad de que no se encuentren frutas en una revisión de 1000 automóviles?
3. Se sabe que si tanto la mamá como el papá son zurdos, el 50% de sus hijos también lo será. ¿Cuál es la probabildad de que en diez familias en las que ambos papás son zurdos, haya al menos un hijo zurdo?

Lección 4.4 Distribución de probabilidad normal

Objetivos: Entender que una curva normal es una curva en forma de campana, con área total bajo la curva igual a 1.
Entender que la curva normal es simétrica alrededor de la media, con un área de 0.5000 en cada lado de la media.
Entender la relación entre la regla empírica y la curva normal.
Entender y ser capaz de utilizar la tabla de áreas de distribución normal estándar.
Calcular probabilidades para intervalos definidos en la distribución.
Determinar valores *z* para intervalos correspondientes en la distribución normal estándar.
Aplicar la distribución normal en situaciones diversas.

Actividad 4.4 a

Qué hacer

En tu curso de estadística estudiaste el concepto curva de frecuencia. Puesto que este concepto es importante para el tema que nos ocupa, a continuación deberás estudiar con mucha atención la forma en que se genera una curva de frecuencias.

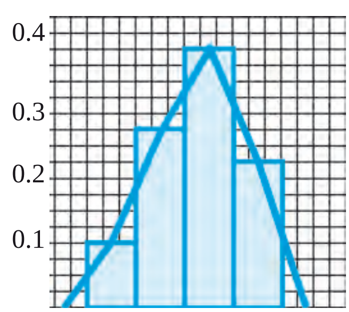
- Consideremos los siguientes datos:

Se ha anotado el peso en kilogramos de 40 estudiantes de una escuela.

41	46	46	46	51	51	52	54	54
57	58	58	58	59	60	61	61	61
64	64	65	65	66	67	67	67	68
68	68	69	69	72	72	73	74	75
75	78	78	80					

- Si agrupamos los datos de 10 en 10 kg obtenemos la siguiente distribución de frecuencias con su histograma y polígono de frecuencias asociado.

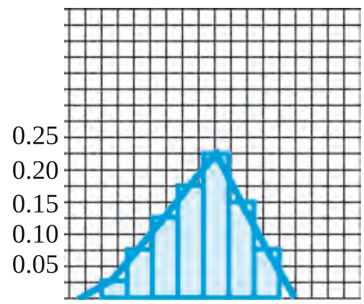
Intervalos	f	fr
[41,51)	4	0.100
[51,61)	11	0.275
[61,71)	16	0.400
[71,81)	9	0.225
Total	40	1.000



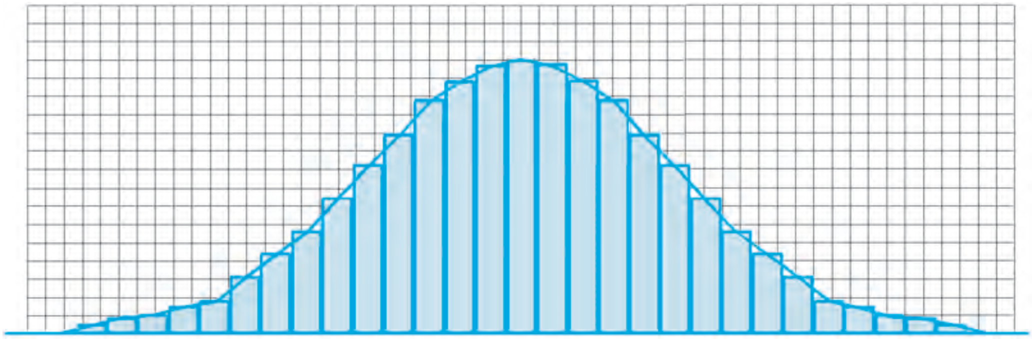
Actividad 4.4 a (Cont.)

- Si agrupamos los datos de 5 en 5 kg obtenemos la siguiente distribución de frecuencias con su histograma y polígono de frecuencias asociado.

Intervalos	f	fr
[41,46)	1	0.025
[46,51)	3	0.075
[51,56)	5	0.125
[56,61)	6	0.150
[61,66)	7	0.175
[66,71)	9	0.225
[71,76)	6	0.150
[76,81)	3	0.075
Total	40	1.000



- Si se hace el mismo estudio para todos los individuos de un país y agrupamos los datos aproximados por los decigramos y centigramos obtenemos un polígono de frecuencias que se aproxima a una curva que se llama **curva de frecuencias**.

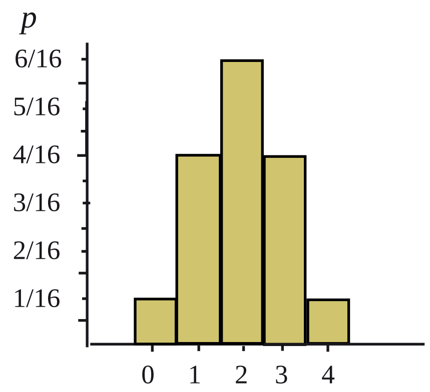


Como ya lo hemos mencionado, las curvas de frecuencias más comunes son la simétrica (normal) y las sesgadas (a la derecha o a la izquierda). La curva de frecuencia anterior es una curva de frecuencias normal, acampanada o gaussiana. En las páginas siguientes, estudiaremos los aspectos básicos de esta curva.

INTRODUCCIÓN A LAS DISTRIBUCIONES CONTINUAS

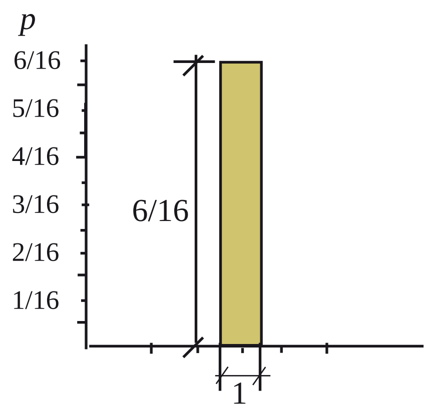
Al representar una distribución de probabilidad discreta mediante un histograma, la probabilidad de un valor cualquiera de la variable aleatoria, viene dado por la altura del rectángulo correspondiente.

Por ejemplo, sea el histograma adjunto que corresponde al experimento que consiste en lanzar 4 veces una moneda y observar cuántas caras muestran águila. La probabilidad de $x = 2$, puede observarse que es 6/16. Sin embargo, si consideramos que la base del rectángulo es una unidad, la probabilidad también puede leerse como el área del rectángulo: en el ejemplo sería un rectángulo cuya base tiene por límites 2.5 y 3.5

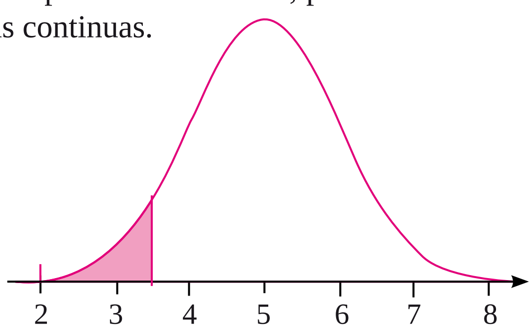


x: número de águilas.

$$P(3) = \textit{área del rectángulo}$$
$$= \textit{base por altura}$$
$$= 1 \times \frac{1}{16} = \frac{1}{16}$$



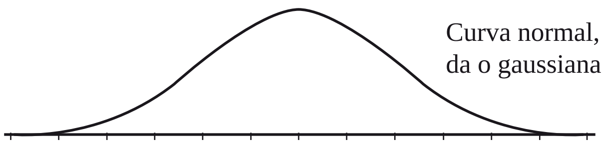
Al trabajar con probabilidades relacionadas con variables aleatorias continuas, el lugar de los histogramas lo ocupan las curvas continuas. En este caso, las probabilidades también se representan por medio de áreas, pero no de áreas de rectángulos, sino de áreas bajo curvas continuas.



En la figura, la probabilidad de que la variable tome un valor de 2.5 a 3.5, por ejemplo, viene dada por el área de la zona coloreada que se haya debajo de la curva. Aprender a calcular estas probabilidades, es uno de los objetivos inmediatos en este curso.

La distribución de probabilidad normal

Existe una cantidad muy diversa de distribuciones continuas. Sin embargo, la más importante es la llamada distribución normal. En la actividad (4.4 a), se analizó la variable peso y se obtuvo un histograma aproximadamente simétrico en forma de montículo o de campana. Se ha verificado que para poblaciones grandes, la distribución de la variable aleatoria peso, siempre es en forma de campana. Estas distribuciones se denominan *normales, acampanadas o gaussianas*. Son muchas las variables cuyo comportamiento presenta esta forma; por ejemplo, estaturas, pesos, calificaciones, entre muchas otras.



Curva normal, acampanada o gaussiana

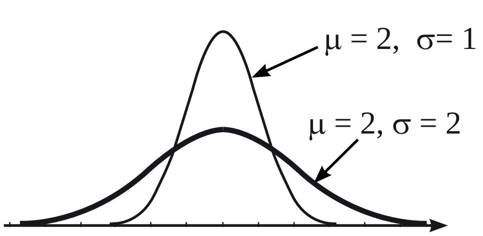
La función de probabilidad (fórmula matemática) de esta curva es:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

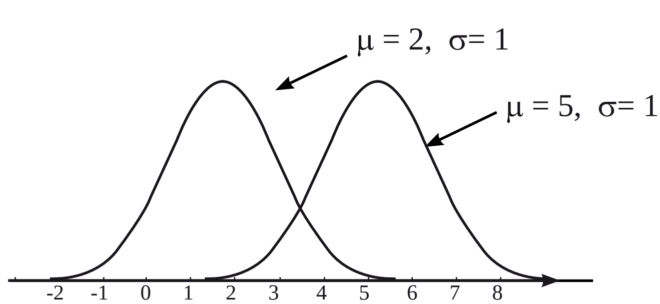
Para $-\infty < x < \infty$, donde ***e*** es el número irracional 2.71828...

Para valores fijos de μ y σ, nos queda una expresión en función de *x*. Al asignar valores a *x*, podemos calcular los valores respectivos de la función. Al graficar los pares coordenados, obtenemos la curva ya mecionada en forma de campana, simétrica con respecto a una recta vertical que pasa por su centro (media) y que se extiende indefinidamente en ambas direcciones.

Una característica importante de estas curvas normales, es que para cada par de valores μ y σ, hay una y sólo una distribución normal.



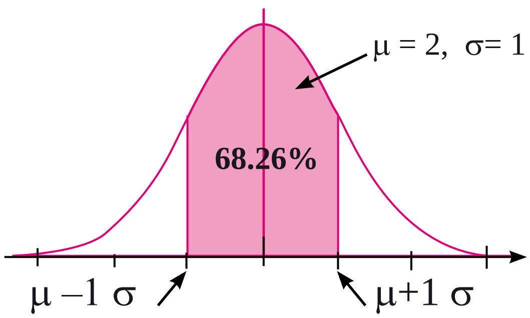
Dos curvas normales con medias iguales pero desviaciones estándar diferentes.

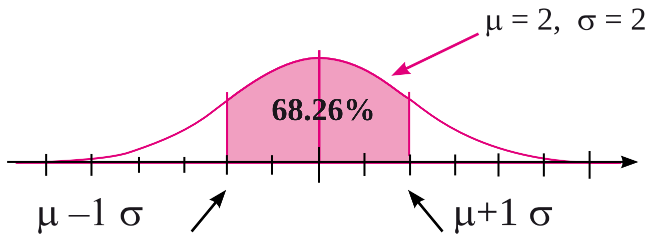


Dos curvas normales con medias distintas pero desviaciones estándar iguales.

Regla empírica

Una tarea clave que debemos hacer con las distribuciones normales, es calcular las áreas que se hallan bajo sus curvas. Para este propósito, debemos tener en cuenta algunas propiedades. Una de estas propiedades es la siguiente: Las curvas normales, tienen la misma proporción de área limitada por la curva y segmentos verticales ubicados a un mismo número de desviaciones estándar.

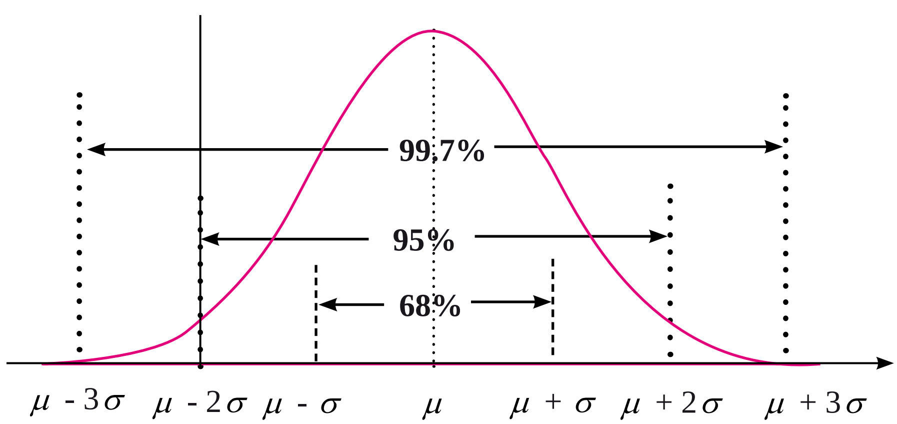




La denominada ***regla empírica,*** establece estas proprociones para las siguientes regiones:

Para cualquier distribución normal:

- el área entre $\mu - \sigma$ y $\mu + \sigma$ es aproximadamente el 68% del área total.
- el área entre $\mu - 2\sigma$ y $\mu + 2\sigma$ es aproximadamente el 95% del área total.
- el área entre $\mu - 3\sigma$ y $\mu + 3\sigma$ es aproximadamente el 99.7% del área total.



Teóricamente, las colas de la curva nunca tocan el eje de las abscisas, sino que se extienden infinitamente en ambas direcciones.

Actividad 4.4 b

Con base en la regla empírica, contesta:

a. ¿Qué proporción de una distribución normal es mayor que la media?

b. ¿Qué proporción de una distribución normal está a menos de una desviación estándar de la media?

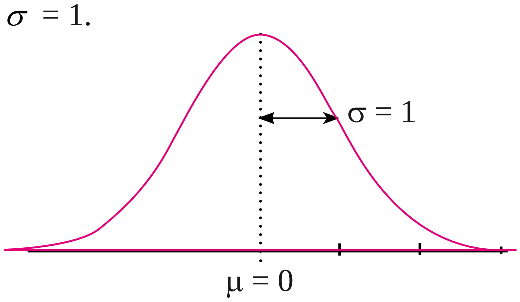
c. ¿Qué proporción es mayor que un valor que está a una desviación estándar por abajo de la media?

La regla empírica es una herramienta que resulta útil únicamente en aquellos casos en que se requieran encontrar probabilidades asociadas sólo con múltipos de números enteros de la desviación estándar (a menos de una, dos o tres desviaciones estándar de la media). En consecuencia, nuestra próxima tarea es calcular las áreas que se hallan bajo sus curvas para cualesquier número (entero o decimal) de desviaciones estándar.

Hallar áreas bajo curvas a partir de su fórmula matemática, corresponde a la rama de la matemática denominada cálculo integral, por lo que no es materia de estudio en este curso. En la práctica estadística dichas áreas se obtienen a partir de tablas. Ahora bien, puesto que para cada par de valores de μ y σ, habrá una curva normal, existen muchas distribuciones normales, y tendríamos que elaborar infinidad de tablas. Sin embargo, esto último no será necesario; lo único que necesitamos es tabular estas áreas para la distribución normal con $\mu = 0$ y $\sigma = 1$. Este hecho, descansa en dos conceptos: *puntuación o valores z y distribución normal estándar.*

Distribución normal estándar

La distribución normal estándar, es aquella distribución con $\mu = 0$ y $\sigma = 1$.



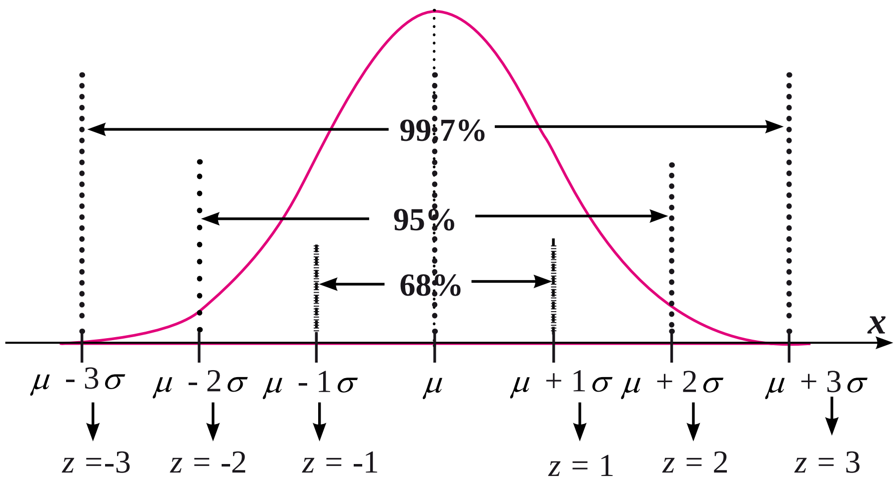
Valor o puntuación z

Para comprender el significado del valor **z**, estudia atentamente las siguientes cuestiones:

1. La regla empírica nos proporciona áreas comprendidas entre la curva y dos segmentos determinados por un número de desviaciones estándar antes y después de la media. *Ese número de desviaciones se llama valor z. Entonces, cada valor x puede escribirse como:* $x = \mu + \mathbf{z}\sigma$

Así pues, la regla empírica también puede plantearse como:

- el área entre $z = -1, z = 1$ y la curva, es de 68%.
- el área entre $z = -2, z = 2$ y la curva, es de 98%.
- el área entre $z = -3, z = 3$ y la curva, es de 99.7%.



En el caso de una distribución normal estándar, puesto que $\mu = 0$ y $\sigma = 1$, la expresión $x = \mu + \mathbf{z}\sigma$, se convierte en:

$$x = 0 + \mathbf{z}(1) = z$$

Por esta razón, a la distribución normal estándar también se le conoce como la distribución normal de la *variable z.* A continuación se prsenta la tabla denominada: *Área de la distribución normal estándar.*

Los valores de esta tabla son las probabilidades de que una variable aleatoria que tiene la distribución normal estándar, tome un valor entre 0 y z; la probabilidad está representada por el área coloreada bajo la curva de la figura siguiente. Las áreas para valores negativos de z se obtienen por simetría.

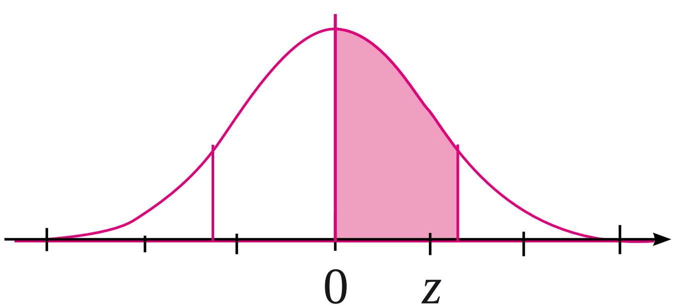


TABLA I:
Área de la distribución normal estándar

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.0000	0.0040	0.0080	0.0120	0.0160	0.0199	0.0239	0.0279	0.0319	0.0359
0.1	0.0398	0.0438	0.0478	0.0517	0.0557	0.0596	0.0636	0.0675	0.0714	0.0753
0.2	0.0793	0.0832	0.0871	0.0910	0.0948	0.0987	0.1026	0.1064	0.1103	0.1141
0.3	0.1179	0.1217	0.1255	0.1293	0.1331	0.1368	0.1406	0.1443	0.1480	0.1517
0.4	0.1554	0.1591	0.1628	0.1664	0.1700	0.1736	0.1772	0.1808	0.1844	0.1879
0.5	0.1915	0.1950	0.1985	0.2019	0.2054	0.2088	0.2123	0.2157	0.2190	0.2224
0.6	0.2257	0.2291	0.2324	0.2357	0.2389	0.2422	0.2454	0.2486	0.2517	0.2549
0.7	0.2580	0.2611	0.2642	0.2673	0.2704	0.2734	0.2764	0.2794	0.2823	0.2852
0.8	0.2881	0.2910	0.2939	0.2967	0.2995	0.3023	0.3051	0.3078	0.3106	0.3133
0.9	0.3159	0.3186	0.3212	0.3238	0.3264	0.3289	0.3315	0.3340	0.3365	0.3389
1.0	0.3413	0.3438	0.3461	0.3485	0.3508	0.3531	0.3554	0.3577	0.3599	0.3621
1.1	0.3643	0.3665	0.3686	0.3708	0.3729	0.3749	0.3770	0.3790	0.3810	0.3830
1.2	0.3849	0.3869	0.3888	0.3907	0.3925	0.3944	0.3962	0.3980	0.3997	0.4015
1.3	0.4032	0.4049	0.4066	0.4082	0.4099	0.4115	0.4131	0.4147	0.4162	0.4177
1.4	0.4192	0.4207	0.4222	0.4236	0.4251	0.4265	0.4279	0.4292	0.4306	0.4319
1.5	0.4332	0.4345	0.4357	0.4370	0.4382	0.4394	0.4406	0.4418	0.4429	0.4441
1.6	0.4452	0.4463	0.4474	0.4484	0.4495	0.4505	0.4515	0.4525	0.4535	0.4545
1.7	0.4554	0.4564	0.4573	0.4582	0.4591	0.4599	0.4608	0.4616	0.4625	0.4633
1.8	0.4641	0.4649	0.4656	0.4664	0.4671	0.4678	0.4686	0.4693	0.4699	0.4706
1.9	0.4713	0.4719	0.4726	0.4732	0.4738	0.4744	0.4750	0.4756	0.4761	0.4767
2.0	0.4772	0.4778	0.4783	0.4788	0.4793	0.4798	0.4803	0.4808	0.4812	0.4817
2.1	0.4821	0.4826	0.4830	0.4834	0.4838	0.4842	0.4846	0.4850	0.4854	0.4857
2.2	0.4861	0.4864	0.4868	0.4871	0.4875	0.4878	0.4881	0.4884	0.4887	0.4890
2.3	0.4893	0.4896	0.4898	0.4901	0.4904	0.4906	0.4909	0.4911	0.4913	0.4916
2.4	0.4918	0.4920	0.4922	0.4925	0.4927	0.4929	0.4931	0.4932	0.4934	0.4936
2.5	0.4938	0.4940	0.4941	0.4943	0.4945	0.4946	0.4948	0.4949	0.4951	0.4952
2.6	0.4953	0.4955	0.4956	0.4957	0.4959	0.4960	0.4961	0.4962	0.4963	0.4964
2.7	0.4965	0.4966	0.4967	0.4968	0.4969	0.4970	0.4971	0.4972	0.4973	0.4974
2.8	0.4974	0.4975	0.4976	0.4977	0.4977	0.4978	0.4979	0.4979	0.4980	0.4981
2.9	0.4981	0.4982	0.4982	0.4983	0.4984	0.4984	0.4985	0.4985	0.4986	0.4986
3.0	0.4987	0.4987	0.4987	0.4988	0.4988	0.4989	0.4989	0.4989	0.4990	0.4990
3.1	0.4990	0.4991	0.4991	0.4991	0.4992	0.4992	0.4992	0.4992	0.4993	0.4993
3.2	0.4993	0.4993	0.4994	0.4994	0.4994	0.4994	0.4994	0.4995	0.4995	0.4995
3.3	0.4995	0.4995	0.4995	0.4996	0.4996	0.4996	0.4996	0.4996	0.4996	0.4997
3.4	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4998
3.5	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998
3.6	0.4998	0.4998	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999
3.7	0.4999									
4.0	0.49997									
4.5	0.499997									
5.0	0.4999997									

CÁLCULO DE PROBABILIDADES UTILIZANDO LA CURVA NORMAL ESTÁNDAR

La tabla de áreas bajo la curva normal estándar, se utiliza para calcular áreas bajo cualquier curva normal. Este cálculo se basa en las siguientes consideraciones:

1. Es importante entender que en el cálculo de áreas bajo la curva, no se trabaja con valores *x*, sino con valores z; el acceso a la tabla es con valores *z*.
2. Debido a que la tabla estándar utiliza valores *z*, debemos convertir los valores *x* en valores *z*. Ésto se llama estandarizar los valores *x*. La estandarización se hace aplicando la fórmula:

$$x = \mu + z\sigma$$

Despejando *z*:

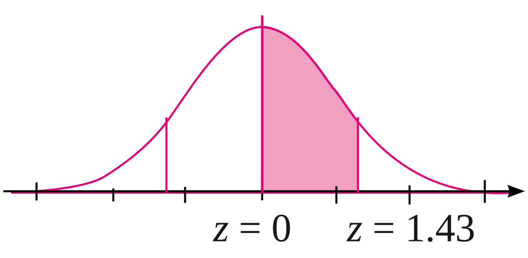
$$z = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

3. El área bajo toda la curva normal es igual a1.
4. La media divide el área a la mitad, 0.5 a cada lado.
5. Para valores negativos de *z*, el área se determina por simetría.
6. En la tabla I se enumeran todas las posibles áreas en los intervalos que empiezan en la media (localizada en $z = 0.0000$) y terminan en un valor específico de *z*.
7. Las probabilidades (áreas) de otros intervalos se encuentran usando los elementos de la tabla y aplicando operaciones de suma y resta, según las propiedades de la curva normal.

Ejemplo 1

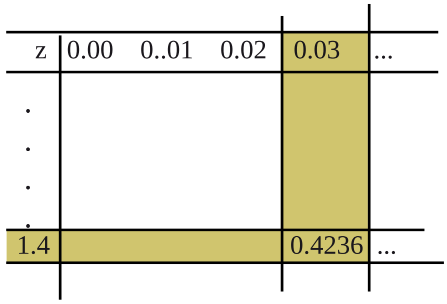
Encuentra el área bajo la curva normal estándar entre $z = 0$ y $z = 1.43$

Solución



Éste es un caso de respuesta directa. El valor de z se localiza en el márgen de la tabla, con las unidades y el dígito de los décimos escritos en el lado izquierdo y la cifra de los centécimos escrita a lo largo del márgen superior.

Ejemplo 1
(Cont.)



Para z = 1.43, se localizan el renglón identificado como 1.4 y la columna identificada como 0.03; en su intersección se encuentra 0.4236. Este valor representa la medida del área o probabilidad para el intervalo z = 0.000 a z = 1.43.

Por tanto, *P(0.000 < z <1.43) = 0.4236.*

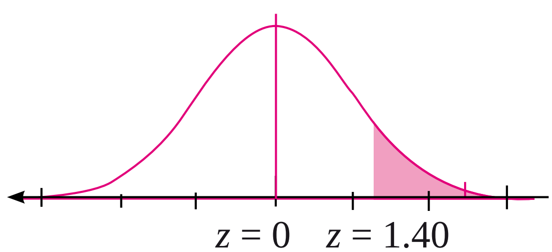
Actividad 4.4 C

a. Encuentra el área bajo la curva normal estándar entre $z = 0$ y $z = 2.2$.
b. Encuentra el área bajo la curva normal estándar entre $z = 0$ y $z = 1.83$.
c. Encuentra el área bajo la curva normal estándar entre $z = 0$ y $z = 0.43$.
d. Encuentra el área bajo la curva normal estándar entre $z = 0$ y $z = 3.48$.
e. ¿Cuál es el valor z correspondiente a un área de 0.4738?

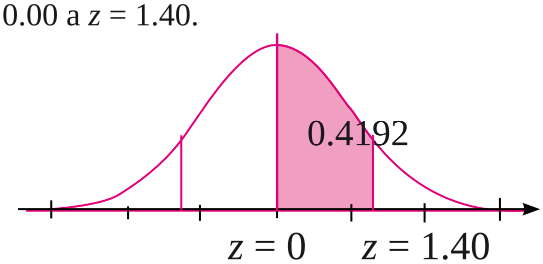
Ejemplo 2

Encuentra el área bajo la curva normal estándar a la derecha de $z = 1.40$.

Solución



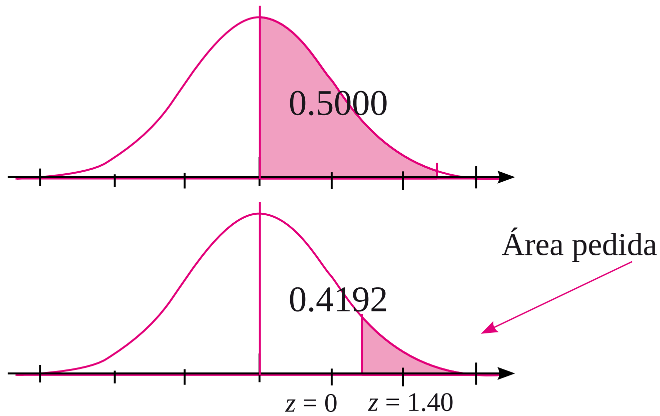
La tabla no proporciona directamente el área pedida.El área dada por la tabla, es la que va de $z = 0.00$ a $z = 1.40$.



Para determinar el área a la derecha de z = 1.42 tomamos en cuenta que “*toda el área a la derecha de la media es igual a 0.5000.*

Entonces, para encontrar el área pedida, se resta 0.4192 de 0.5000.

$P(z > 1.40) = 0.5000 - 0.4192 = 0.0808$

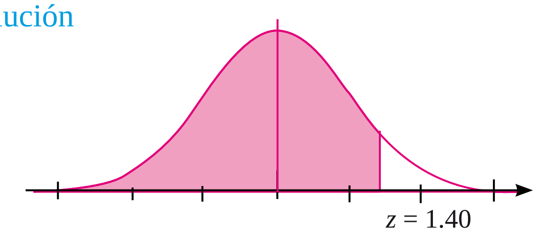


Actividad 4.4 d

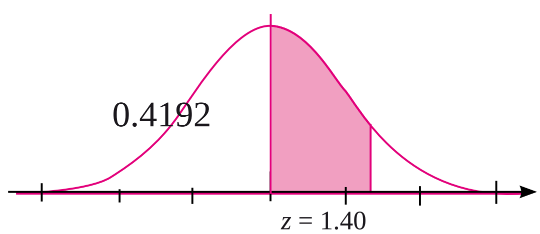
a. Encuentra el área bajo la curva normal estándar a la derecha de $z = 2.32$.
b. Encuentra el área bajo la curva normal estándar a la derecha de $z = 0.40$.
c. Encuentra el área bajo la curva normal estándar a la derecha de $z = 0.08$.
d. Encuentra el área bajo la curva normal estándar a la derecha de $z = 3.20$.

Ejemplo 3 Encuentra el área bajo la curva normal estándar a la izquierda de $z = 1.40$.

Solución



Ya sabemos que la tabla proporciona el área de $z = 0.00$ a $z = 1.40$.



Para determinar el área a la izquierda de $z = 1.40$ tomamos en cuenta que "toda el área a la izquierda de la media es igual a 0.5000".

Entonces, para encontrar el área pedida, se suma 0.4192 de 0.5000.

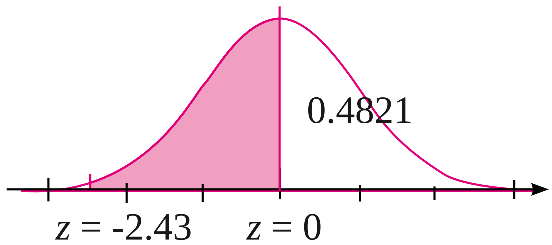
Por tanto, $P(z < 1.40) = 0.5000 + 0.4192 = 0.9192$.

Actividad 4.4 e

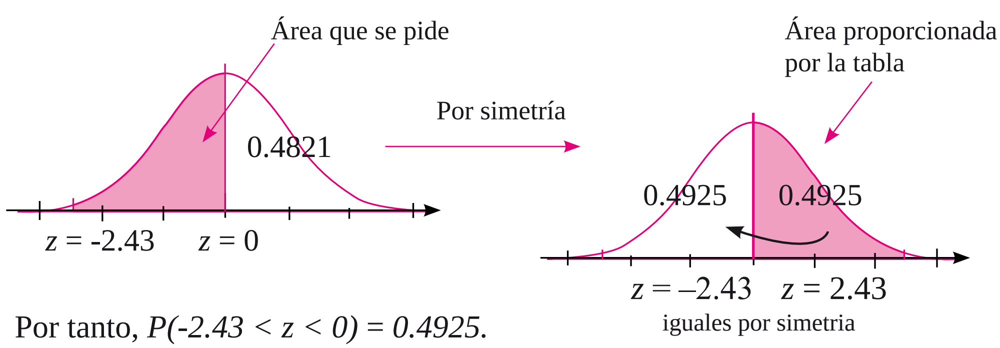
a. Encuentra el área bajo la curva normal estándar a la izquierda de $z = 2.32$.
b. Encuentra el área bajo la curva normal estándar a la izquierda de $z = 0.40$.
c. Encuentra el área bajo la curva normal estándar a la izquierda de $z = 0.08$.
d. Encuentra el área bajo la curva normal estándar a la izquierda de $z = 3.20$.

Ejemplo 4 Encuentra el área bajo la curva normal estándar entre $z = 0$ y $z = -2.43$.

Solución



Debido a la simetría, la determinación de las probabilidades asociadas con valores por abajo (a la izquierda) de la media, el área entre la media y un valor negativo de z, es exactamente la misma que el área entre la media y el mismo valor de z pero positivo.



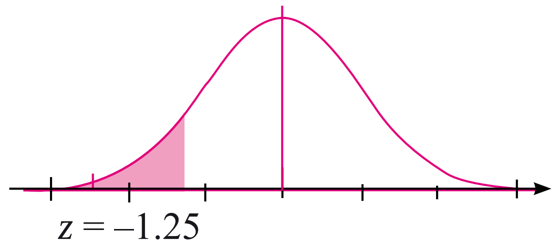
Por tanto, $P(-2.43 < z < 0) = 0.4925$.

Actividad 4.4 f

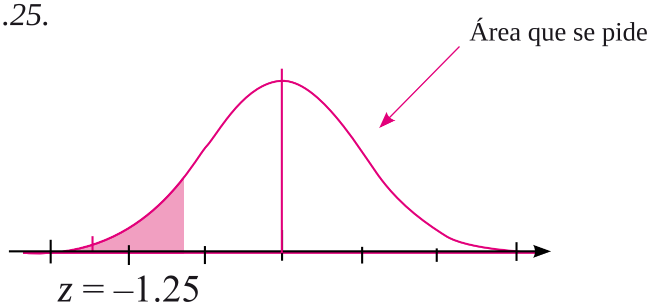
a. Encuentra el área bajo la curva normal estándar entre $z = 0$ y $z = -2.43$.
b. Encuentra el área bajo la curva normal estándar entre $z = 0$ y $z = -0.40$.
c. Encuentra el área bajo la curva normal estándar entre $z = 0$ y $z = -0.08$.
d. Encuentra el área bajo la curva normal estándar entre $z = 0$ y $z = -3.20$

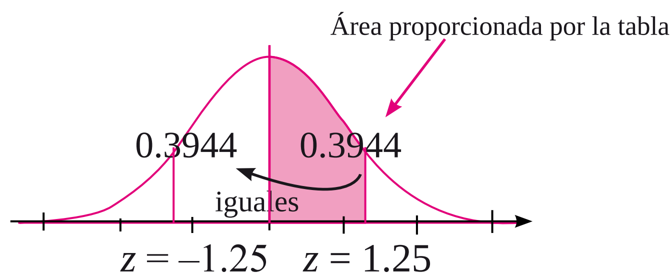
Ejemplo 5 Encuentra el área bajo la curva normal estándar a la izquierda de $z = -1.25$.

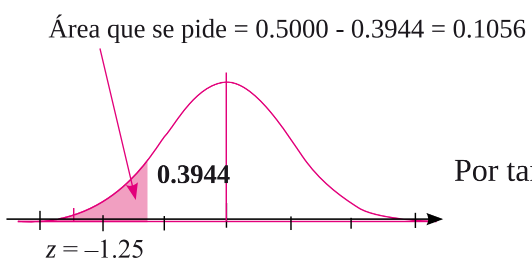
Solución



En estos casos, debemos tener en cuenta que la tabla proporciona el área de $z = 0$ a $z = 1.25$, la cual será igual por simetría al área que va de $z = 0$ a $z = -1.25$.







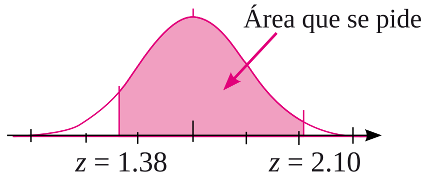
Por tanto, $P(z < -1.25) = 0.1056$.

Actividad 4.4 g

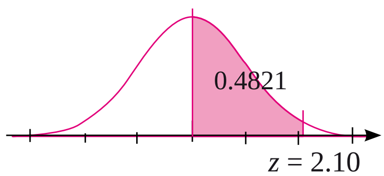
a. Encuentra el área bajo la curva normal estándar a la izquierda de z = -2.43.
b. Encuentra el área bajo la curva normal estándar a la izquierda de z = -0.40.
c. Encuentra el área bajo la curva normal estándar a la izquierda de z = -0.08.
d. Encuentra el área bajo la curva normal estándar a la izquierda de z = -3.20

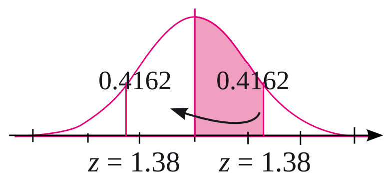
Ejemplo 6 Encuentra el área bajo la curva normal estándar entre $z = -1.38$ y $z = 2.10$

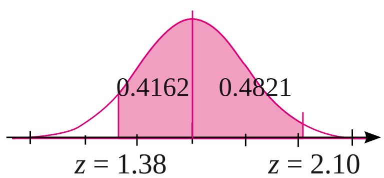
Solución



Áreas proporcionadas por la tabla:







Área pedida = 0.4162 + 0.4821 = 0.8983.

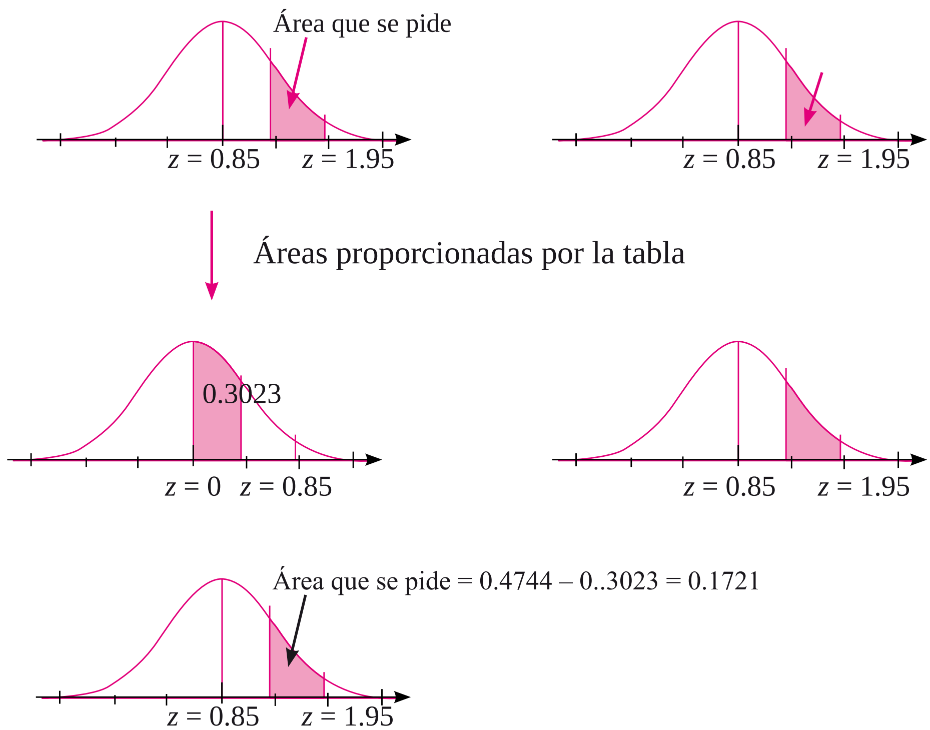
Por tanto, $P(-1.38 < z < 2.10) = 0.8983$.

Actividad 4.4 h

a. Encuentra el área bajo la curva normal estándar entre $z = -1.26$ y $z = 2.15$.
b. Encuentra el área bajo la curva normal estándar entre $z = -2.00$ y $z = 1.34$.
c. Encuentra el área bajo la curva normal estándar entre $z = -1.47$ y $z = 1.05$.
d. Encuentra el área bajo la curva normal estándar entre $z = -3.20$ y $z = 3.20$

Ejemplo 7 Encuentra el área bajo la curva normal estándar entre $z = 0.85$ y $z = 1.95$

Solución



Por tanto, $P(0.85< z < 1.95) = 0.1721$.

Actividad 4.4 i

a. Encuentra el área bajo la curva normal estándar entre $z = 1.26$ y $z = 2.15$.
b. Encuentra el área bajo la curva normal estándar entre $z = 1.34$ y $z = 2.00$
c. Encuentra el área bajo la curva normal estándar entre $z = 1.05$ y $z = 1.47$.
d. Encuentra el área bajo la curva normal estándar entre $z = 0.89$ y $z = 3.20$

APLICACIONES DE LA DISTRIBUCIÓN NORMAL

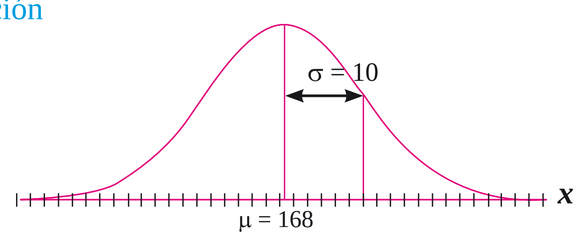
Una vez dominada la capacidad de calcular áreas bajo curva normal estándar, estamos en posibilidades de aplicar esta metodología a todas las distribuciones normales. La clave está en entender tres cuestiones:

1. La información asociada con una distribución estará en términos de valores *x* o probabilidades.
2. Para usar la tabla de áreas de una distribución normal estándar, debemos usar valores estandarizados *z*. En otras palabras, para poder utilizar la tabla que contiene las respuesta que se busca, debemos transformar la información dada (valores *x*), en valores *z*.
3. El valor estandarizado, *z*, se calcula mediante la fórmula:

$$z = \frac{x-\mu}{\sigma}$$

Ejemplo 1 La estatura media de 1300 estudiantes de preparatoria es de 168 cm y la desviación estándar de 10 cm. si las estaturas se distribuyen normalmente, a) Calcula la probabilidad de que un alumno elegido al azar mida más de 175 cm. b) ¿Cuántos alumnos se puede esperar que midan más de 175 cm?

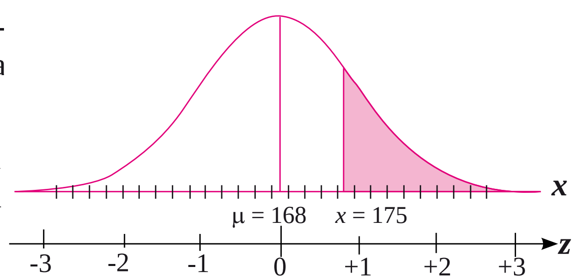
Solución



Sea *x* la estatura.

a) Se desea determinar la probabilidad de que un estudiante tenga una estatura mayor que 175 cm.

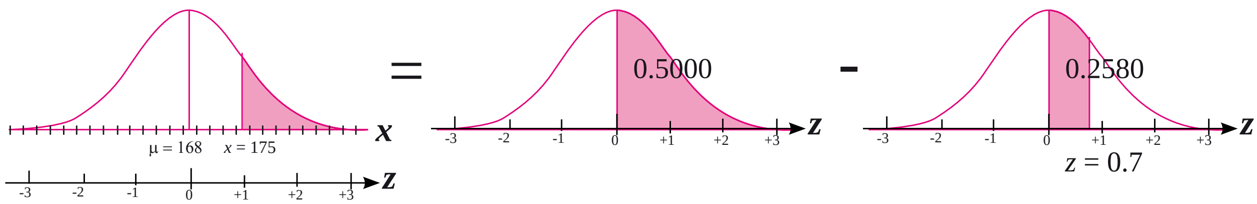
Para obtener esta probabilidad debemos encontrar el área coloreada en la figura.



Ahora, para poder utilizar la tabla de áreas de la distribución normal estándar, debemos estandarizar el valor de $x = 175$.

175 en unidades estándar: $z = \frac{x-\mu}{\sigma} = \frac{175-168}{10} = 0.7$

Recuerda que en este caso, primero determinamos la probabilidad de que la estatura se encuentre enre $z = 0$ y $z = 0.7$, y enseguida restamos este valor a 0.5



Entonces, la probabilidad de que un estudiante elegido al azar tenga una estatura mayor que 175 cm es de 0.500 - 0.258 = 0.242.

b) ¿Cuántos alumnos se puede esperar que midan más de 175 cm? Puesto que son 1300 estudiantes se espera que (1300)(0.242) = 314.6 ó 315 estudiantes midan más de 175 cm.

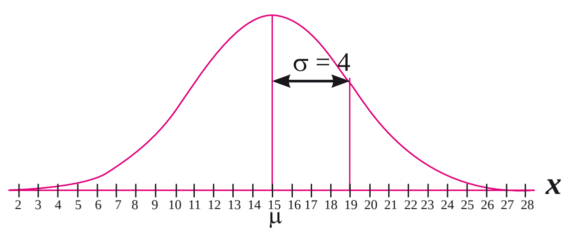
Actividad 4.4 j

Con referencia al ejemplo 1 obtener la probabilidad de que la estatura del estudiante elegido se encuentre:

a) entre 150 cm y 170 cm.
b) sea menor que 160 cm.
c) sea mayor que 180.

Ejemplo 2 Un estudiante de preparatoria entra a la escuela a las 7:00 am y hace un promedio de 15 minutos desde que sale de su casa hasta que llega a su escuela, con una desviación estándar de 4 minutos. supóngase que la distribución de los tiempos de viaje es aproximadamente normal. Si siempre sale de su casa a las 6:50 a. m., ¿qué porcentaje de las veces llegará tarde?

Solución

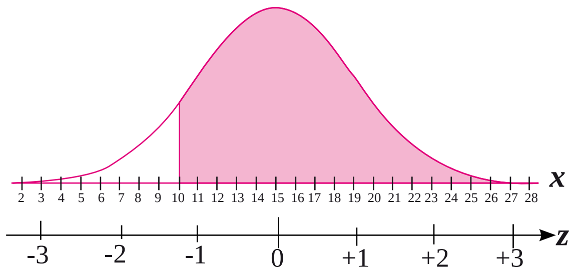


Sea x la variable aleatoria que denota el tiempo (en minutos) empleado por el estudiante, desde que sale de su casa hasta el momento en que entra a su escuela.

Por la hora en que el estudiante sale de su casa, le quedan 10 minutos antes de registrar retardo. Por tanto, nuestro problema cambia a: "*¿cuál es la probabilidad de que el estudiante emplee más de 10 minutos para llegar a la escuela*?".

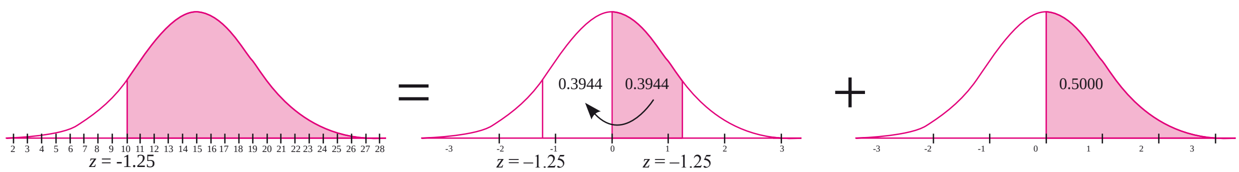
Ejemplo 2 (Cont.)

Por tanto, requerimos de la probabilidad dada por el área coloreada en la figura:



10 en unidades estándar: $z = \dfrac{x-\mu}{\sigma} = \dfrac{10-15}{4} = -1.25$

Para obtener esta probabilidad debemos encontrar el área coloreada en la figura.



Entonces, la probabilidad de que el estudiante llege tarde a la escuela es de 0.3944 + 0.5000 = 0.8944.

Ejercicio 4.4

1. Los ingresos de una pequeña empresa para el próximo año, se consideran que son valores de una variable aleatoria normal con media de \$500,000.00 y desviación estándar de \$20,000.00. Determina la probabilidad de que:
   a. Los ingresos se encuentren entre \$525,000.00 y \$550,000.00.
   b. Los ingresos excedan a \$560,000.00.

2. La media de los pesos de 500 estudiantes de una escuela es 75 kg con una desviación estándar de 7.5 kg. Suponiendo que los pesos se distribuyen normalmente, hallar cuántos estudiantes pesan (a) entre 60 y 80 kg. (b) más de 90 kg.

3. El tiempo necesario para que una ambulancia llegue a un estadio de futbol se distribuye según una variable normal de media 25 minutos y desviación estándar 4 minutos. Calcula la probabilidad de que el tiempo de llegada esté comprendido entre 20 minutos y 30 minutos.

AUTOEVALUACIÓN IV

1. ¿Qué diferencias existen entre la distribución de probabilidad binomial y la normal?

2. La probabilidad de que una pieza de repuesto sea defectuosa es 0.3 y el hecho de que una pieza sea o no defectuosa es independiente de lo que se pueda decir de cualquier otra pieza. hallar la probabilidad de que en una muestra de 5 piezas:
   a) Se encuentren exactamente 3 defectuosas.
   b) Ninguna defectuosa.
   c) Al menos cuatro defectuosas.

3. Si una moneda se lanza seis veces, ¿cuál es la probabilidad de obtener al menos 5 águilas?

4. Un examen de opción múltiple consiste de 10 preguntas con cuatro posibles respuestas para cada pregunta. Si un estudiante contesta al azar encuentra las probabilidades de que:
   a) Obtenga exactamente tres respuestas correctas;
   b) No obtenga ninguna respuesta correcta;
   c) A lo sumo obtenga cuatro respuestas correctas.

5. En una operación de llenado de latas, el peso de llenado está normalmente distribuido con una media de 21.3 onzas y una desviación estándar de 0.50. La etiqueta en la lata anuncia que el peso del llenado es 20 onzas. ¿Qué porcentaje de las latas contendrán menos de este peso especificado?

6. En un examen final de matemáticas las calificaciones están distribuidas normalmente con una media de 68 y una esviación estándar 13. Si se elige un estudiante examinado,
   a) ¿Cúal es la probabilidad de que haya obtenido ariba de 80?
   b) ¿Cuál es la probabilidad de que haya obtenido menos de 60?

7. La media de los diámetros interiores de una tuerca es 0.502 pulgadas y la desviación estándar 0.005 pulgadas. El propósito para el que se destinan estas tuercas permite una tolerancia máxima de en el diámetro de 0.496 a 0.508 pulgadas, de otro modo las tuercas se consideran defectuosas. Determinar el porcentaje de tuercas defectuosas producido por la máquina, suponiendo que los diámetros se distribuyen normalmente.

Bibliografía

J. Díaz Godino, Ma. C. Batanero, Ma. J. Cañizares. *Azar y probabilidad*, editorial Síntesis, Madrid, España, 1996.

Robert Johnson, Patricia Kuby. *Estadística Elemental*, tercera edición, Thomson, México, 2004.

Robert Johnson, Patricia Kuby. *Estadística Elemental*, décima edición, Cengage, México, 2008.

John E. Freund, Gary A. Simon. *Estadística elemental*, octava edición, Pearson, México, 1992.

José Alfredo Juárez Duarte, Armando Flórez, Arturo Ylé, José Alberto Alvarado. *Estadística y probabilidad*, DGEP-UAS, México, 2002.

Miguel de Guzmán, José Colera y Adela Salvador. *Matemáticas III*, ediciones Anaya, Madrid, 1988.

Ma. José Asencio, José A. Romero y Estrella de Vicente. *Estadística*. Mc Graw Hill, Bogotá, Colombia, 1999.

Jay L. Devore, *Probabilidad y Estadística para ingeniería y ciencias*, cuarta edición, Thomson, México, 1998.

Jay L. Devore, *Probabilidad y Estadística para ingeniería y ciencias*, séptima edición, Cengage Learning, México, 2008.

Carmen Batanero. *Didáctica de la estadística*. Departamento de Didáctica de la Estadística. Universidad de Granada, España.

ALEA, grupo portugués que promueve la enseñanza de la estadística. http://alea-estp.ine.pt/html/nocoes/html.

Piotr Marion W., Gabriel Velasco S. *Problemario de probabilidad*, editorial Thomson, México, 2001.

Mark L. Berenson, david M. Levine. *Estadística Básica en Administración*, editorial Prentice-Hall, México, 1992.

G. A. Whitmore, John Neter, William Wasserman. *Problemas de estadística, método autodidáctico*, editorial CECSA, México, 1981.

L. H. Longley-Cook. *Problemas de estadística y cómo resolverlos*, editorial CECSA, México, 1981.

Jorge Domínguez D., Jorge Axel Domínguez. *Estadística y probabilidad*, Oxford, México, 2006.

Diego Bricio Hernández, Alberto Ruiz M. *Probabilidad y estadística*, editorial CECSA, México, 1981.

Luis Magaña Cuéllar. *Matemáticas III. Estadística y probabilidad*, editorial Nueva Imagen, México, 2006.

Gabriel Velasco S. *Problemario de probabilidad*, editorial Thomson, México, 2001.

Gabriel Velasco Sotomayor. *Estadística con excel*, editorial Trillas, México, 2005.

Agustín Montaño. *Estadística I*, editorial Pac, México, 1992.

Esenciales de estadística, editorial Santillana, México, 2008.

Probabilidad
José Alfredo Juárez Duarte, Arturo Ylé Martínez
Armando Flórez Arco y Santiago Inzunsa Cázares

Se terminó de imprimir en el mes de enero de 2012,
en los talleres gráficos de Servicios Editoriales Once
Ríos, s.a. de c.v., Río Usumacinta 821, Col. Industrial
Bravo, c.p. 80200. Tel. 712-29-50. Culiacán, Sin.

Esta edición consta de 4,000 ejemplares

DGEP

Dirección General de Escuelas Preparatorias

Probabilidad

Bachillerato

José Alfredo Juárez Duarte
Arturo Ylé Martínez
Armando Flórez Arco
Santiag I nzunsa Cázares

Plan de estudios 2009

Probabilidad

Bachillerato

Autores
José Alfredo Juárez Duarte
Arturo Ylé Martínez
Armando Flórez Arco
Santiago Inzunsa Cázares

Primera edición: enero de 2010
Segunda edición: enero de 2012

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE SINALOA
DIRECCIÓN GENERAL DE ESCUELAS PREPARATORIAS

Diseño: Leticia sánchez Lara

Editado en los talleres gráficos de Servicios Editoriales Once Ríos,
Río Usumacinta 821, Col. Industrial Bravo, Culiacán, Sin.

Impreso en Sinaloa, México

Presentación

Este libro, fue escrito para utilizarse en la asignatura de PROBABILIDAD que se cursa en el sexto semestre de bachillerato plan 2009 de la Universidad Autónoma de Sinaloa.

Su principal característica está en el énfasis que se hace en el uso de representaciones visuales al solucionar problemas de probabilidad. En este sentido, uno de sus principales objetivos es promover que los estudiantes usen de manera espontánea tales representaciones visuales mientras resuelven problemas de probabilidad o cuando están explorando o desarrollando algún concepto. Básicamente son tres las representaciones usadas: listado de resultados, diagramas de árbol y diagramas de Venn.

La evidencia aportada por la investigación didáctica en probabilidad, sugiere que la visualización juega un rol importante en la manera como los expertos resuelven problemas de probabilidad (y en general problemas matemáticos). Las representaciones visuales se convierten en un fuerte apoyo de la memoria, facilitan la atención y comunicación, el registro de información, y facilitan el descubrimiento y las inferencias. En suma, el uso de representaciones lleva a una comprensión total del problema y a un incremento en la profundización del proceso implicado.

El uso de representaciones visuales, nos ha permitido plantear en este libro, una estrategia de enseñanza desde una perspectiva constructivista, donde se busca que el alumno a través de un intenso trabajo en el estudio de ejemplos y la solución de problemas, adquiera una sólida base, antes y como preparación para la introducción y el trabajo con fórmulas, de modo que se tenga más posibilidades de lograr un aprendizaje significativo. En otras palabras, a través del estudio bajo esta propuesta de trabajo, el alumno podrá resolver prácticamente cualquier problema básico de probabilidad, sin una necesidad obligada de utilizar fórmulas.

Sin embargo, no debemos perder de vista, que uno de los propósitos centrales en el estudio de las matemáticas, es el proceso mismo de abstracción. De lo que se trata, es de evitar presentar al estudiante un objeto abstracto ya construido, sin una comprensión de las ideas básicas implícitas. En palabras de Miguel de Guzmán: «*La matemática está muy lejos de ser una colección de recetas. La matemática es un ejercicio de la imaginación y del pensamiento. La aplicación de una rutina, de una fórmula, sólo tiene sentido, dentro de la matemática, si va acompañada de otras estrategias del pensamiento*». O en palabras de Stewart: «*¿Fórmula? ¿Quién se preocupa por las fórmulas? Las fórmulas están en la superficie de las matemáticas no en la esencia*»

La presente propuesta metodológica para estudiar probabilidad, también contempla un nuevo orden en el tratamiento de los contenidos. Se plantean cuatro bloques: conceptualización del azar, estudio de los sucesos compuestos, estudio de los experimentos compuestos, y estudio de las distribuciones de probabilidad. A su vez, el primero y segundo bloque constituyen el conocimiento conceptual básico de la probabilidad, y, el tercero y cuarto el estudio de los experimentos compuestos. Esto último, significa, que debido al enfoque didáctico utilizado, el estudio de las distribuciones es simplemente una extensión de los experimentos compuestos: es la llegada a modelos probabilísticos abstractos. En otras palabras, un alumno(a) que domine la unidad tres, no tendrá ninguna dificultad para abordar el estudio de las distribuciones.

Con respecto al uso del libro en el salón de clase, asumimos que un libro de texto, es un instrumento de enseñanza para el profesor y un instrumento de aprendizaje para el alumno. El libro de texto debe estar diseñado de tal manera que fomente el trabajo independiente de los alumnos(as).

Holmes plantea que «*la peor manera de enseñar es hablar, y la mejor manera de aprender es hacer*»

En esta idea, debemos tener muy en cuenta que: «e*n el proceso docente-educativo el profesor debe enseñar lo esencial, lo fundamental. Explicar aquellos aspectos básicos de los cuales se pueden deducir todo un conjunto de elementos derivados, secundarios que no deben, por lo general ser explicados, para que los alumnos (as), los desarrollen de manera independiente. A la exposición inicial se le debe dedicar el mínimo imprescindible del tiempo y a la independencia escolar el máximo. Todo el contenido no debe ser expuesto por el docente, sólo lo esencial, lo que posibilite que el alumno trabaje y forme la habilidad*»

A partir de esta concepción, el libro está basado en el desarrollo de actividades de aprendizaje en las que el rol principal del maestro es la mediación. Las actividades fueron diseñadas para estimular la experimentación, el planteamiento de conjeturas y la búsqueda de explicaciones.

Este libro, es producto de muchos otros. Cada uno de los libros o materiales citados en la bibliografía aportaron algo, desde una idea vaga, hasta un propuesta que sólo requirió de ajuste.

Finalmente, ante la incertidumbre natural que implica el tratar de implementar cambios en lo establecido, nos permitimos citar a Gilberto Guevara Niebla: «*No se sabe si una nueva propuesta pueda modificar la situación actual, pero lo que sí se conoce es que las prácticas tradicionales no han rendido los frutos esperados*».

Cualquier comentario o sugerencia para mejorar esta propuesta, que agradecemos de antemano, favor de enviarlo a la dirección: *jjuarez@uas.uasnet.mx.*

Deseamos a profesores y estudiantes, mucho éxito en su estudio de la probabilidad, disciplina que junto con la estadística, nos permite entender fenómenos del mundo real que incluyen incertidumbre, esto es, fenómenos que no pueden ser predecidos con certeza.

Atentamente
Culiacán Rosales, Sinaloa, enero de 2012.
Los autores

Contenido

UNIDAD 4
DISTRIBUCIONES DE PROBABILIDAD

Introducción a la Probabilidad

1

UNIDAD

Lección 11 Conceptos básicos: azar, experimento aleatorio, significado de probabilidad

Objetivos: Conocer la noción de azar y de experimentos aleatorios.
Diferenciar entre experimentos aleatorios y deterministas.
Comprender el concepto de probabilidad.

La noción de aleatoriedad es el punto de partida para el estudio de la probabilidad. En la vida diaria nos referimos de manera indirecta a este concepto de muchas formas; por ejemplo, con frecuencia decimos que algo sucede por azar. En la siguiente actividad, se pide que expongas tus ideas iniciales sobre estas cuestiones.

Actividad 1.1 a

Qué hacer

Contesta las siguientes preguntas:

a) ¿Qué es lo primero que piensas al escuchar los términos azar y aleatorio?_
_

b) Elabora una lista de términos del lenguaje ordinario que utilizas en vez de azar o aleatorio
_
_

c) Compara los términos que escribiste con los de tus compañeros.
¿Qué coincidencias encuentras? _
_

d Intenta explicar lo que significa para ti azar.____________________________________
_
_ _

Existen muchas expresiones que se usan en la vida diaria, que de manera implícita se refieren al azar o a la aleatoriedad. Por ejemplo:

"Por suerte, de chiripa, sin querer, sin intención, por accidente, por casualidad...."

Utlizamos estos términos para hacer referencia a la casualidad, a cosas fortuitas o imprevistas, a situaciones inciertas o no controladas.

Así pues, en el lenguaje ordinario, el azar es entendido como sinónimo de suerte o casualidad, de falta de intención. Por ejemplo, hablamos de encuentros casuales o accidentales, de coincidencias al azar, de logros por suerte, de acciones sin intención, etcétera.

Sin embargo, el azar no debe entenderse simplemente como sinónimo de suerte o casualidad, sino como una acción altamente compleja, debido a que una pequeña variación en dicha acción, produce un efecto considerable en el resultado. Ésto ocasiona una total incertidumbre respecto a lo que va a ocurrir en el futuro. Decimos entonces que el resultado es aleatorio, porque la predicción resulta imposible.

Ejemplo

Consideremos el sencillo experimento de arrojar una moneda al aire y observar de qué lado cae. La experiencia nos indica que, aunque se intente repetir el experimento en idénticas condiciones, es imposible predecir con certeza cuál será el resultado. La explicación de esta incertidumbre, es que no se pueden replicar idénticamente las condiciones iniciales, porque cualquier cambio imperceptible, por ejemplo en la fuerza de lanzamiento o en la posición en que se coloca la moneda, tendrá un gran efecto en el resultado. Ese efecto considerable, causado por cosas modestas e imperceptibles, a falta de mejor explicación, se dice que es causado por el azar.

Los fenómenos cuyos resultados se atribuyen al azar se llaman fenómenos aleatorios o sucesos aleatorios. Es decir, los fenómenos aleatorios son aquellos cuyos resultados no se pueden predecir con certeza debido a que pequeños cambios en las condiciones iniciales producen efectos muy complejos en el desarrollo del fenómeno.

En contraparte, los fenómenos cuyos resultados si pueden preverse, se llaman determinísticos.

Experimentos aleatorios y experimentos determinísticos

En probabilidad la palabra "experimento" tiene un significado amplio. Se le llama experimento, tanto a los verdaderos experimentos que se pueden provocar, como a los fenómenos observables en el mundo real. Es decir, la acción de observar un fenómeno se considera un experimento. Por lo general, antes de observar debemos realizar otra acción, por ejemplo: extraer o seleccionar un objeto y después observar alguna característica de interés, tirar un dado o una moneda y observar su cara superior.

Así como distinguimos entre fenómenos aleatorios y determinísticos, también diferenciamos entre experimentos aleatorios y determinísticos.

Un experimento es determinístico, si al realizarse en las mismas circunstancias sólo tiene un resultado posible el cual es predecible.

Por ejemplo, si colocamos un trozo de hielo bajo el sol, sabemos de antemano cuál será el resultado.

Un experimento es aleatorio, si cumple con las siguientes características:
- Se conocen de antemano, todos los posibles resultados, pero no se sabe cuál de esos resultados se va a obtener al realizarse el experimento.
- Se puede repetir en circunstancias similares.

Actividad 1.1 b

a) Indica cuáles de los siguientes experimentos son aleatorios y cuáles determinísticos. En el caso que sean aleatorios, anotar todos los posibles resultados, y si son determinísticos anotar el resultado esperado.

1) Observar un partido de fútbol y registrar el resultado
Experimento_ Posibles resultados (o resultado)_

2) Ejecutar un tiro libre en básketbol y observar si el balón entra en la canasta.
Experimento_ Posibles resultados (o resultado)_

3) Medir con gran precisión tanto la longitud de una circunferencia como su diámetro y calcular el cociente Circunferencia / Diámetro.
Experimento_ Posibles resultados (o resultado)_

4) Colocar dentro del congelador una botella de vidrio cerrada llena de agua.
Experimento_ Posibles resultados (o resultado)_

5) Lanzar un dado y observar el número de puntos que muestra la cara que queda hacia arriba.
Experimento_ Posibles resultados (o resultado)_

b) Escribe tres ejemplos de experimentos aleatorios y sus resultados posibles.
_
_

c) Escribe tres ejemplos de experimentos determinísticos
_
_

d) Lanza una moneda al aire diez veces y realiza lo indicado:
1) Anota un resultado cualquiera obtenido_
2) Registra todos los resultados obtenidos_
3) ¿Cuántas águilas obtuviste?_

Si repites varias veces un experimento aleatorio, obtendrás una sucesión de resultados muy irregular, denominada sucesión aleatoria.
Anota la sucesión aleatoria que obtuviste al lanzar la moneda 10 veces_

En resumen, en un experimento aleatorio, se destacan cuatro aspectos:

- El proceso de generación de resultados, el cual es el experimento mismo.
- Los posibles resultados.
- El resultado obtenido en un ensayo.
- La sucesión de resultados obtenida en una serie de ensayos particulares.

Ahora, cabe plantear la siguiente pregunta: si al efectuar un experimento aleatorio, de lo único que estamos seguros es que ocurrirá uno de los posibles resultados, ¿qué utilidad tiene estudiar este tipo de experimentos?

En la siguiente actividad, podrás convencerte que, aunque parezca un contrasentido, el azar tiene leyes, y es precisamente la probabilidad el campo de las matemáticas que trata de encontrar esas leyes a fin de tomar decisiones adecuadas en aquellas situaciones que parecen estar dominadas por el azar.

Actividad 1.1 C

Qué hacer

a) Contesta las siguientes preguntas:

1) Si lanzas una moneda una vez y cae "águila", ¿qué puedes comentar?

____

2) Si lanzas una moneda 5 veces y caen 5 "águilas", ¿qué opinas?

____

3) Si lanzas una moneda 1000 veces y aparece "águila" 950 veces, ¿qué opinas de este hecho? ____________________

Con toda seguridad, de acuerdo a tu experiencia, consideras totalmente "normal" que al lanzar una moneda una vez, pueda caer águila, o al lanzarla 5 veces puedan caer 5 águilas. Pero, si al lanzar la moneda 1000 veces caen 950 águilas, inmediatamente sospecharás de la moneda. Tal vez concluyes que se está haciendo trampa o que la moneda no es "honesta" o que está "cargada".

Al concluir que algo no anda bien cuando al lanzar una moneda 1000 veces caen 950 águilas, estás ya aplicando una ley del azar. Así pues, las leyes del azar surgen cuando en lugar de considerar un sólo fenómeno, contemplas cientos o miles de tales fenómenos.

Para que adquieras más elementos sobre esta cuestión, seguiremos con la exploración de fenómenos aleatorios trabajando con el sencillo experimento de lanzar una moneda.

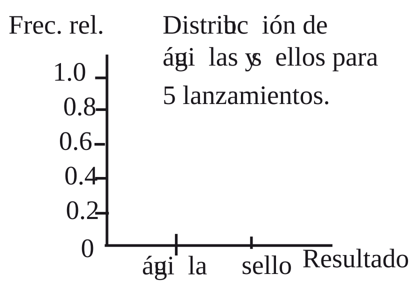
Actividad 1.1 d

Qué hacer

a) Contesta con base en tu experiencia: “si lanzas una moneda, ¿cuál es la probabilidad de que caiga águila?¿_ En qué basas tu respuesta?

b) Lanza una moneda 5 veces. Denota con “*a*” al resultado cae águila, y con “*s*” al resultado cae sello. Anota la sucesión obtenida._ A continuación, completa la tabla siguiente y traza su gráfico de barras correspondiente

Resultado	Frec. abs.	Frec. rel.
águila		
sello		
Total	5	1.0

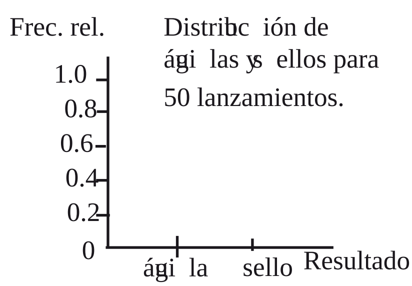


c) Lanza una moneda 50 veces. Anota la sucesión obtenida._

_ _ _

A continuación, completa la tabla siguiente y traza su gráfico de barras correspondiente

Resultado	Frec. abs.	Frec. rel.
águila		
sello		
Total	50	1.0



Compara tus resultados con los de tus compañeros, y escribe alguna conclusión sobre los resultados obtenidos._

_

Gran parte del trabajo matemático (y en consecuencia de la probabilidad), consiste en encontrar patrones o leyes que nos permitan modelar los fenómenos estudiados. En este caso, estamos interesados en encontrar algún patrón mostrado por las sucesiones aleatorias. Pero, como ya se mencionó, la única manera de descubrir patrones en una secuencia aleatoria, es repetir un gran número de veces el experimento correspondiente. Por tanto, deberás trabajar en equipo tal y como se indica en la siguiente actividad.

Actividad 1.1

a) Un equipo de dos alumnos (as) lanza la moneda 50 veces y anotan el número de veces que caen águila y sello. Además, deben calcular la frecuencia relativa tanto de águila como de sello.

Resultados primer equipo	
# de lanz.	50
f de águila	
f de sello	
f_r de águila	
f_r de sello	

b) Otro equipo de dos alumnos (as) vuelve a lanzar la moneda 50 veces, pero ahora, sumarán sus resultados con los de la primer pareja, de tal manera que contabilizaremos 100 lanzamientos y un número de águilas y sellos igual a la suma de lo obtenido por los equipos uno y dos.

Equipo	1	2
# de lanz.	50	100
f de águila		
f de sello		
f_r de águila		
f_r de sello		

Estamos asumiendo que el equipo 2 lanzó la moneda 100 veces

c) Un tercer equipo vuelve a lanzar 50 veces la moneda y suma sus resultados a los de las parejas anteriores.

Equipo	1	2	3
# de lanz.	50	100	150
f de águila			
f de sello			
f_r de águila			
f_r de sello			

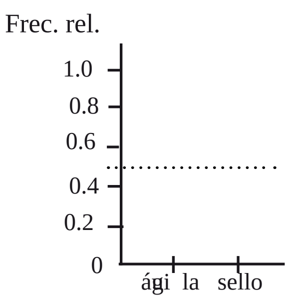
Estamos asumiendo que el equipo 3 lanzó la moneda 150 veces

Y así sucesivamente, otras parejas de alumnos deberán lanzar la moneda y los resultados de cada pareja se van acumulando con los anteriores.
A continuación, deben organizarse para completar la siguiente tabla:

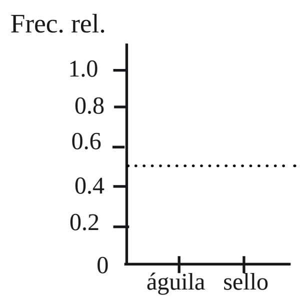
Actividad 1.1 e (Cont.)

Equipo	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
# de lanz.	50	100	150	200	250	300	350	400	450	500	550	600	650	700	750	800	850	900	950	1000
$f_{\text{águila}}$																				
f_{sello}																				
$f_{r\ \text{águila}}$																				
$f_{r\ \text{sello}}$																				

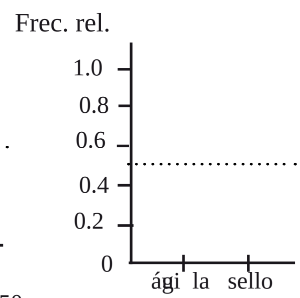
h) Enseguida, realiza cuatro gráficos de barras que muestren el comportamiento de las distribuciones de las frecuencias relativas de los dos resultados posibles: águila y sello, al aumentar el número de lanzamientos.



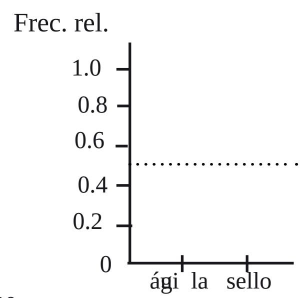
Distribución para 5 lanzamientos



Distribución para 50 lanzamientos

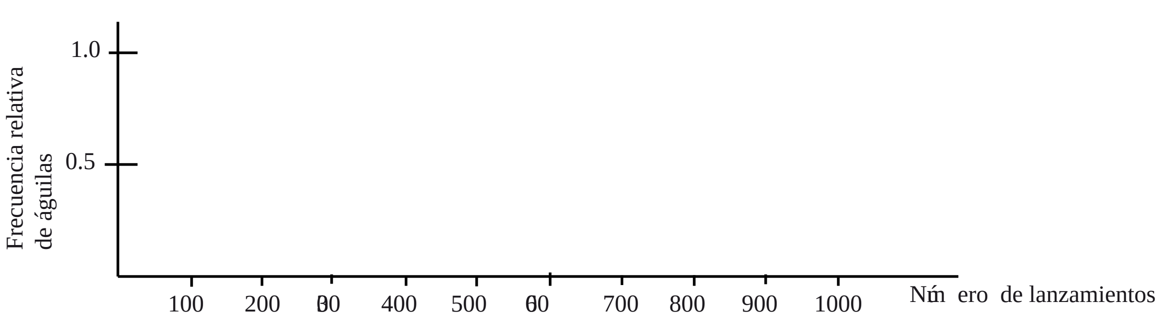


Distribución para 500 lanzamientos



Distribución para 1000 lanzamientos

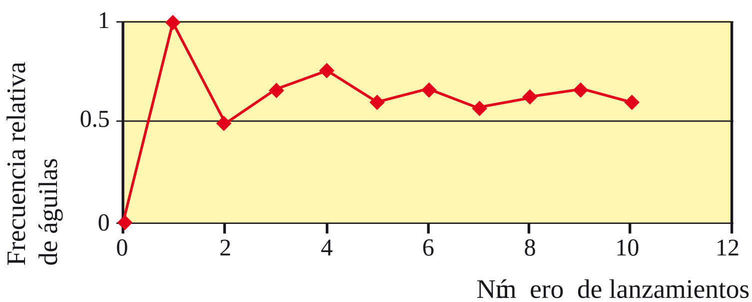
Ahora, regresemos a la primer pregunta planteada al inicio de esta actividad: "si lanzas una moneda, ¿cuál es la probabilidad de que caiga águila?". Seguramente contestaste que ½ 0.5 ó 50%. Pero, ¿qué significa ésto? Los gráficos de barras que acabas de trazar, nos permiten avanzar hacia una respuesta: con pocos lanzamientos la frecuencia relativa puede ser cualquier valor, pero después de muchos (cientos o miles), esta frecuencia se mantiene muy cerca de 0.5. Ésto se aprecia mejor si nos concentramos únicamente en un resultado; para ello, traza un gráfico que muestre cada una de las frecuencias relativas del resultado águila conforme aumenta el número de lanzamientos:



Actividad 1.1 e (Cont.)

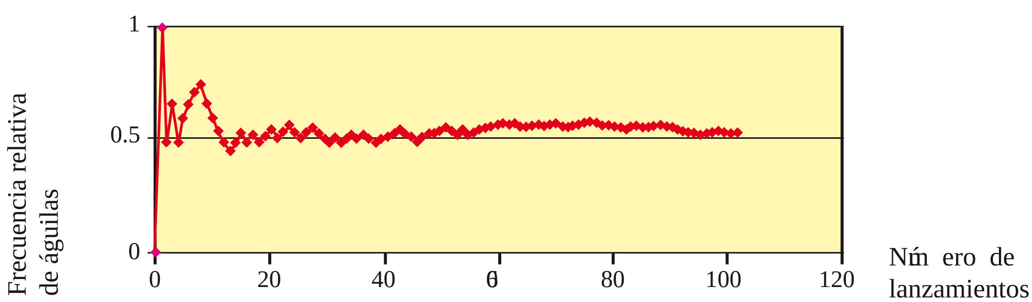
Aún sin conocer tus resultados en el momento de escribir este texto, estamos seguros que el comportamiento de tu segundo gráfico es muy parecido al mostrado a continuación:

Gráfico que muestra lo que ocurrió al ir repitiendo el experimento de lanzar una moneda hasta 10 veces. Analiza la tabla adjunta para que interpretes mejor lo mostrado en el gráfico.

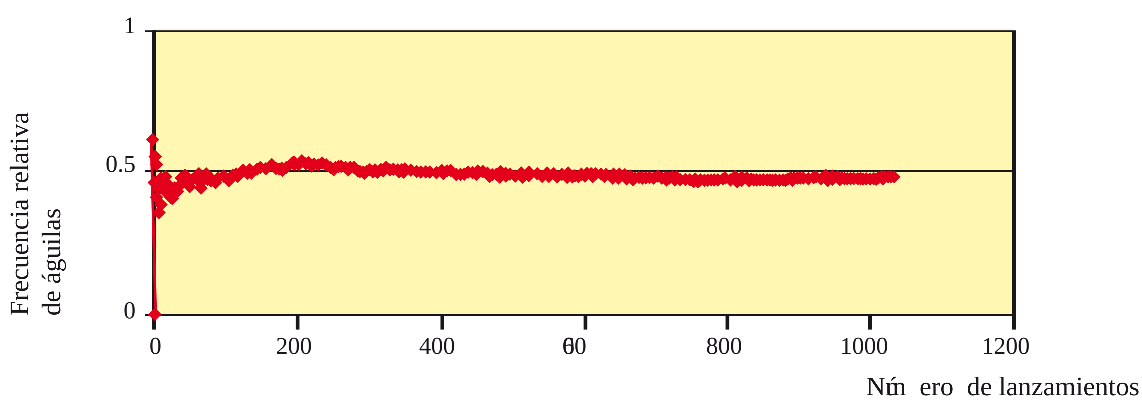


Número de lanza-mientos	Sucesión aleatoria	Frec. rel. de "águila"
1	*a*	1.0
2	*as*	0.5
3	*asa*	0.6
4	*asaa*	0.75
5	*asaas*	0.6
6	*asaasa*	0.6
7	*asaasas*	0.55
8	*asaasasa*	0.62
9	*asaasasaa*	0.6
10	*asaasasaas*	0.6

Ahora, observa lo que ocurrió conforme se lanzaba la moneda hasta 100 veces:



Finalmente observa lo sucedido conforme se lanzaba la moneda hasta 1000 veces:



Actividad 1.1e (Cont.)

Estudia con mucha atención la siguiente conclusión derivada de tu trabajo realizado, y de los gráficos presentados como apoyo:

> Si atendemos los resultados obtenidos con pocos lanzamientos de una moneda, las frecuencias relativas del resultado “águila” son muy irregulares; sin embargo, si a partir de un cierto momento, siguen aumentando los lanzamientos, dicha frecuencia relativa, tiende a estabilizarse alrededor de 0.5. Esta frecuencia relativa también puede verse como una proporción:
>
> $$0.5=\frac{1}{2}=\frac{50}{100}$$

A este número al que tienden a estabilizarze las frecuencias relativas de un suceso (en este caso el suceso “cae águila”) se le llama probabilidad de que ocurra el suceso.

> Probabilidad de que ocurra un suceso: es la frecuencia relativa con la que puede esperarse que el suceso ocurra, al repetir el experimento más y más veces.

Entonces, según estos resultados, la probabilidad de que ocurra águila al lanzar una moneda es 0.5.

> Simbólicamente: *P(águila)* = 0.5 ⟶ Se lee: *“la probabilidad de que ocurra el suceso águila” es 0.5*

i) Lee con mucha atención: La afirmación *P(águila)* = 0.5, significa que, conforme aumenta el número de lanzamientos de una moneda, (cientos o miles de veces), la frecuencia relativa o proporción con que aparece el resultado águila tiende a ser 0.5.

Ahora, considera el experimento de lanzar un dado. Según tu experiencia contesta:

1) ¿Cuáles son los resultados posibles?_

2) ¿Cuál es la probabilidad de que la cara superior muestre un punto?_
¿En qué basas tu respueta?_

3) Observa las siguientes distribuciones que muestran las frecuencias relativas de cada uno de los seis resultados posibles, obtenidas conforme se lanza un dado más y más veces:

Actividad 1.1 e (Cont.)

Distribución de 101 lanzamientos

x	f	f_r
1	19	0.188
2	14	0.139
3	20	0.198
4	19	0.188
5	18	0.178
6	11	0.109

Distribución de 301 lanzamientos

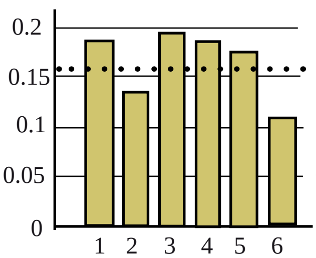
x	f	f_r
1	57	0.189
2	47	0.156
3	57	0.189
4	49	0.163
5	54	0.179
6	37	0.123

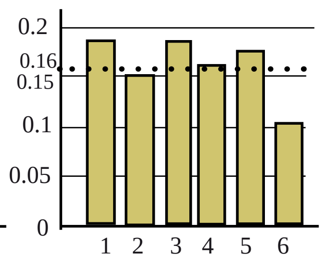
Distribución de 1001 lanzamientos

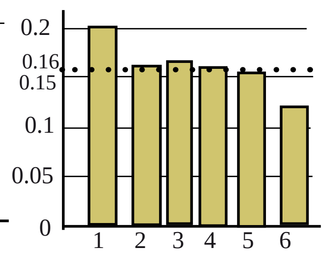
x	f	f_r
1	203	0.203
2	163	0.163
3	167	0.167
4	162	0.162
5	157	0.157
6	149	0.149

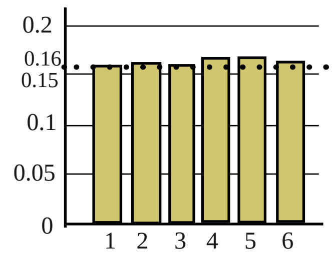
Distribución de 5001 lanzamientos

x	f	f_r
1	802	0.160
2	818	0.164
3	815	0.163
4	862	0.172
5	864	0.173
6	840	0.168

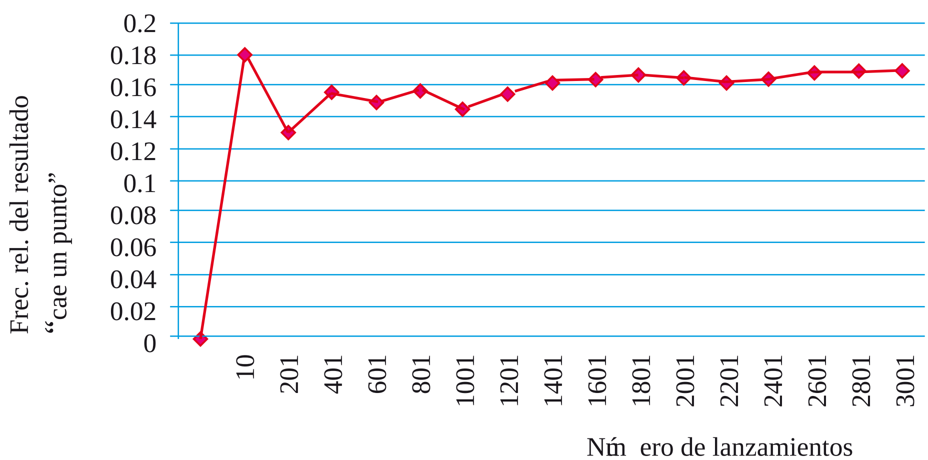








Ahora, considera tu respuesta a la pregunta: al lanzar un dado, ¿cuál es la probabilidad de que la cara superior muestre un punto? Tu respuesta seguramente fue 1/6 ó 0.16. Una vez más, ¿qué significa ésto? Apoyándonos en los gráficos anteriores, podemos asegurar que, conforme el número de lanzamientos del dado se hace cada vez más grande, la frecuencia relativa con que aparece cualquier cara del dado tiende a ser 1/6 ó 0.16. Ésto se aprecia mejor si nos concentramos únicamente en un resultado; para ello, observa el siguiente gráfico, que muestra el comportamiento de las frecuencias relativas del resultado "*cae un punto*" conforme aumenta el número de lanzamientos de un dado.



Describe el comportamiento de este gráfico:

Actividad 1.1 e (Cont.)

Atendiendo este gráfico, ¿qué se quiere decir cuando se afirma que la probabilidad de que caiga un punto al lanzar un dado es 1/6 _ _

Ya estamos en condiciones de establecer las siguientes conclusiones:

- En un suceso aleatorio, después de un gran número de repeticiones del experimento que lo genera, surge una especie de orden o regularidad estadística, manifestado por la estabilización de la frecuencia relativa (o proporción), con que aparece dicho suceso. Esa frecuencia relativa se conoce como probabilidad de que ocurra el suceso.
- El valor conocido como probabilidad de un suceso, sólo nos informa sobre la proporción de veces que aparecerá dicho suceso en un gran número de repeticiones del experimento correspondiente. En otras palabras, en la sucesión aleatoria originada por la repetición de un experimento aleatorio, se observará mucha variabilidad local que impide predecir su comportamiento inmediato, pero hay una regularidad global (***llamada regularidad estadística***) manifestada por la estabilidad de las frecuencias relativas.

La interpretación dada a la probabilidad de un suceso, también se conoce como ley de los grandes números, y fue enunciada por primera vez por Jakob Bernoulli en su obra «*arte de conjeturas*» a finales del siglo XVII de la siguiente manera:

«*La frecuencia relativa de un suceso tiende a estabilizarse en torno a un número, a medida que el número de pruebas del experimento crece indefinidamente*»

Jakob Bernoulli (1654 - 1705)

Lee con atención:

Debe quedar muy claro, que la estabilización a largo plazo, se presenta en las frecuencias relativas y no en las absolutas. Por ejemplo, en el caso de la moneda, no es correcto decir que a medida que el número de lanzamientos aumenta, el número de águilas se aproxima a la mitad del número de lanzamientos. Así pues, la regularidad a largo plazo significa que la proporción de veces que aparece águila (o sello), tiende a estabilizarse. Ésto puede apreciarse en la siguiente tabla que muestra los resultados obtenidos por diversos investigadores:

Investigador \ Resultado	$f_{\text{águilas}}$	$f_{r\ \text{águilas}}$	Total de lanzamientos
Buffon	2048	0.5069	4040
Pearson	12012	0.5005	24000
Kerrich	5067	0.5067	10000

Nota. En la moneda norteamericana, se habla de caras y cruces, en vez de águilas y sellos.

Ejercicio 11

1. Contesta:
   a) Explica la relación que existe entre azar y experimento aleatorio.
   b) Explica qué es una sucesión aleatoria.
   c) Explica la diferencia entre experimento aleatorio y experimento determinístico.
   d) Al repetir más y más un experimento aleatorio, ¿qué ocurre con la frecuecnia relativa de un suceso? _
   e) Según la ley de los grandes números, ¿por qué se dice que al lanzar una moneda honesta, la probabilidad de que caiga águila es 0.5?_

2. Investiga en algún periódico o revista, cinco enunciados que lleven implícito lo que hasta este momento entendemos por probabilidad.

3. Frecuentemente se critica, a los encargados de pronosticar el tiempo, afirmando que siempre ocurre lo contrario a su pronóstico, ¿cómo explicarías estas supuestas fallas?

4. Supón que lanzas una moneda honesta, ésto es, una en la que la probabilidad de salir sello en cada lanzamiento es ½. Tienes la posibilidad de escoger 10 ó 100 lanzamientos.
   a) En la primera apuesta, ganas si la proporción de sellos está entre 0.4 y 0.6. ¿Escogerías 10 ó 100 lanzamientos? ¿Por qué?
   b) En la segunda apuesta, ganas si exactamente la mitad de lanzamientos fueron sellos. ¿Escogerías 10 ó 100 lanzamientos ¿Por qué?

5. Si lanzaras una moneda honesta 8 veces, ¿cuál de los siguientes resultados es más probable? (*A*, indica que salió águila; *S*, indica que salió sello):

   ASASASAS　　　*AAAASSSS*　　　*ASAASSAS*

6. Supón que en 6 lanzamientos consecutivos de una moneda obtienes AAAAAA. ¿Qué es más probable obtener en el próximo lanzamiento, águila o sello? Explica por qué.

Lección 12 Asignación de probabilidades: enfoque frecuencial.

Objetivo: Conocer el enfoque frecuentista para asignar probabilidades.
Asignar probabilidades según el enfoque frecuencial.

Hay diferentes maneras de asignar probabilidades a los resultados de un experimento aleatorio. En las próximas lecciones estudiarás tres de ellos: frecuencial, subjetivo y teórico.

Actividad 1.2 a

Qué hacer

Estudia con atención:

La asignación de probabilidades mediante el enfoque frecuencial, utiliza la frecuencia relativa obtenida al repetir el experimento aleatorio un gran número de veces. De esta manera, surge la siguiente definición:

Definición de probabilidad según el enfoque frecuencial

Se define la probabilidad frecuentista o empírica de un suceso *A*, representada por ***P (A)*** como el valor obtenido para la frecuencia relativa con que se observa *A*, en un número grande de repeticiones del experimento.

Al aplicar esta definición, estamos asumiendo que el número de veces que se repitió el experimento es suficiente para garantizar una cierta estabilización de las frecuencias relativas; por tanto, sólo nos fijamos en el número total de casos considerados, y en las veces que apareció el suceso de interés. Entonces, aplicamos directamente la siguiente fórmula:

$$P\,(\text{de un suceso}) = \frac{\text{frecuencia absoluta del suceso}}{\text{número total de repeticiones del experimento}} = \frac{f}{N}$$

En la práctica, este enfoque nos permite utilizar como fuente de datos, las frecuencias relativas de sucesos del pasado.

Ejemplos :

1. En beisbol, si un bateador pega 120 hit en 400 intentos, el porcentaje de bateo (así se llama en ese deporte) es

$$\frac{120}{400} = 0.300$$

En términos probabilísticos, decimos que este jugador, tiene una probabilidad de 0.300 de pegar de hit en su próximo turno.

Simbólicamente: *P(hit)* = 0.300. O bien *P(hit)* = 30% .

¿Qué nos indica ésto? que en promedio en cada 100 turnos pegará de hit 30 veces. Sin embargo, no puede asegurarse que sean exactamente 30; pueden ser digamos 34 ó 28.

2. Cuando el encargado del tiempo observa que en el pasado, en 1200 de 1500 días con condiciones meteorológicas parecidas a las observadas al día de hoy, se presentaron lluvias, entonces, pronosticará que la probabilidad de que el día de mañana llueva es de:

$$\frac{1200}{1500} = 0.800$$

Probabilidad de lluvia = 0.800 = 80%

Si llamamos *Ll* al suceso lluvia: *P(Ll)* = 80%

Simbólicamente *P(lluvia)* = 80%

3 ¿Va a someterse dentro de poco a una intervención quirúrgica? ¡Las posibilidades señalan que no habrá complicaciones! A continuación se presentan las estadísticas del número de determinadas operaciones realizadas y el número de éxitos obtenidos en el último año.

TIPO	NÚMERO DE OPERACIONES	NÚMERO DE ÉXITOS
Vesícula biliar	472 000	465 300
Apéndice	784 000	781 000
Hernia	508 000	506 000

Con base en estas estadísticas, calcule:

a) La probabilidad de que una operación de la vesícula biliar tenga éxito.
b) La probabilidad de que una operación del apéndice resulte exitosa.

Ejemplo :
(Cont.)

Solución:

a) Este experimento se realizó 472 000 veces.

Los posibles resultados son: éxito (e) o fracaso (f)

$$\underbrace{e\ e\ e \ldots f \ldots e\ e \ldots f \ldots}_{472\ 000 \text{ resultados}}$$

El número de veces que apareció éxito (e) fue: 465 300

Por lo tanto: $P(e) = \dfrac{465\ 300}{472\ 000} = 0.9858$

b) Este experimento se realizó 784 000 veces.

Los posibles resultados son también: éxito (e) o fracaso (f).

$$\underbrace{e\ e\ e \ldots f \ldots e\ e \ldots f \ldots}_{784\ 000 \text{ resultados}}$$

El número de veces que apareció “e” fue: 781 000

Por lo tanto: $P(e) = \dfrac{781\ 000}{784\ 000} = 0.9961$

Ejercicio 12

1. Utilizando los datos del ejemplo de la actividad 1.2 a, calcula la probabilidad de que:
   a) Una operación de vesícula fracase
   b) Una operación apéndice fracase
   c) Una operación de hernia fracase.

2. Como ya se mencionó, el estadístico Pearson lanzó una moneda 24000 veces y obtuvo 12012 águilas. Con base en estos datos determina:
   a) La probabilidad de que una moneda caiga águila.
   b) La probabilidad de que una moneda caiga sello.

3. La siguiente tabla, muestra la distribución de 5001 lanzamientos de un dado.

x	f	f_r
1	802	0.160
2	818	0.164
3	815	0.163
4	86[illegible]	0.172
5	86[illegible]	0.173
6	840	0.168

Determina:
P(1), P(2), P(3),
P(4), P(5) y P(6).

4. De los últimos 12 000 tornillos para coches producidos por la corporación Tuercas y Tornillos, 6 eran defectuosos (D) y los tornillos restantes eran buenos (B). Se tomará un tornillo al azar para inspeccionarlo. ¿Cuál es la probabilidad de que el tornillo seleccionado sea defectuoso? ¿Y de que sea bueno?

5. Las estadísticas demográficas demuestran que sobre 1000 nacimientos, se registran un promedio de 515 mujeres y 485 varones. Si se escoge una persona al azar de una población. ¿Cuál es la probabilidad de que sea mujer?

Lección 1.3 Asignación de probabilidades: enfoque subjetivo

Objetivos: Conocer el enfoque subjetivo para asignar probabilidades.
Asignar probabilidades según el enfoque subjetivo.
Conocer la escala de probabilidad.
Distinguir entre suceso seguro y suceso imposible.

Actividad 1.3a

Qué hacer

a) Estudia con atención:

En la actividad anterior, asignamos probabilidades a sucesos mediante la expresión:

$$P(suceso) = \frac{f}{N}$$

Recordemos que los datos requeridos por esta fórmula, pueden obtenerse repitiendo el experimento muchas veces o bien utilizando datos ya conocidos en el pasado. Sin embargo, no siempre existen posibilidades de repetir un experimento en circunstancias semejantes, ni contar con datos registrados previamente. En estas circunstancias, podemos utilizar el denominado enfoque subjetivo.

Definición de probabilidad según el enfoque subjetivo

Se define la probabilidad subjetiva, como el número asignado para cuantificar la ocurrencia de un suceso, según el grado de confianza o credibilidad que se tiene de que ese suceso ocurra.

Esta manera de asignar probabilidades se llama subjetivo debido a que la confianza o credibilidad que se atribuye a la ocurrencia de un suceso, es generalmente reforzado por la cantidad de información que tenemos sobre el fenómeno. Es decir dos personas diferentes pueden asignar probabilidades diferentes.

Para asignar valores a la probabilidad de un suceso, debemos tener en cuenta la escala de probabilidad.

Escala de probabilidad. Suceso seguro y suceso imposible

Para entender la escala de probabilidad, contesta las siguientes preguntas relacionadas con la fórmula de la probabilidad frecuentista:

$$P(suceso) = \frac{f}{N}$$

1) ¿Cómo es el valor de f con respecto a N? ¿Puede ser $f > N$? ¿Es $f < N$? ¿Puede ser $f = N$? ¿Puede ser $f = 0$?

En la tabla siguiente se presentan algunas sucesiones que pueden ocurrir al lanzar una moneda.

Sucesión aleatoria	$f_{águila}$	N	Probabilidad de águila (f / N)
SSSSSSSSSS	0	10	0/10 = 0
ASSAASSSSS	3	10	3/10 = 0.3
SSSSAASAAA	5	10	5/10 = 0.5
AAASAAAASA	8	10	8/10 = 0.8
AAAAAAAAAA	10	10	10/10 = 1.0

Aunque las frecuencias relativas calculadas no son propiamente probabilidades (por corresponder a sucesiones demasiado pequeñas), el rango que muestran dichas frecuencias ilustra los posibles valores que puede tomar la probabilidad de un suceso. Dicho rango, es el siguiente:

> La probabilidad de un suceso, es un número real que va desde 0 hasta 1.

En otras palabras, para medir la mayor o menor posibilidad de que ocurra un suceso en un experimento, se le asigna un número entre 0 y 1, llamado su probabilidad. Se asigna una probabilidad 0, cuando el suceso de interés nunca puede ocurrir, y 1, cuando el suceso ocurre siempre que se realiza el experimento.

> Un suceso con probabilidad cero, se llama imposible, y un suceso con probabilidad 1, se llama seguro.

Por ejemplo, la probabilidad de que una persona viva 200 años es 0; el suceso "una persona vive 200 años" es un suceso imposible. La probabilidad de que haya nubes si está loviendo es 1; el suceso "hay nubes si está lloviendo" es un suceso seguro.

A continuación, se presenta la escala de probabilidad:

0	1/4	1/2	3/4	1
Imposible				Seguro

Ejercicio 13

1. Inventa un suceso de cada tipo.
   a) muy probable o casi seguro
   b) medianamente probable
   c) poco probable
   d) casi imposible

2. Contesta las siguientes preguntas. (Si desconoces el deporte al que se hace referencia, pregunta a tus compañeros (as). Compara tus respuestas con las de tus compañeros (as).

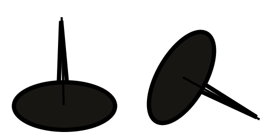
   a) En fútbol soccer profesional, ¿cuál es la probabilidad de que se anote un gol en las siguientes siuaciones?:
   - Tiro libre_
   - Tiro de esquina_
   - Tiro de penalty_
   - Tiro de media cancha _

   b) En básquetbol profesional, asigna un valor a la probabilidad de encestar en:
   - Tiro libre_
   - Tiro de dos puntos_
   - Tiro de tres puntos_

   c) En la vida cotidiana, asigna un valor a la probabilidad de:
   - Infraccionen a una persona por estacionar su auto en línea amarilla_
   - Neva en tu lugar de origen_
   - Llueva un día de verano en tu lugar de residencia_

3 Considera el experimento de colocar una chincheta en un vaso y lanzarlo sobre una mesa. Aplicando el enfoque subjetivo, ¿podrías asignar una probabilidad al suceso "la chincheta cae apuntando hacia arriba" y una probabilidad al suceso "la chincheta apunta hacia abajo?" ¿Cómo podrías verificar tus probabilidades?_________________

_ _



Lección 14 Asignación de probabilidades: enfoque clásico o teórico.

Objetivos: Conocer el enfoque teórico o clásico para asignar probabilidades.
Asignar probabilidades según el enfoque teórico o clásico.
Distinguir entre resultados equiprobables y no equiprobables.
Conocer la regla de Laplace y aplicarla en la asignación de probabilidades de experimentos simples (de una etapa).

La manera más inmediata de asignar probabilidades, es utilizando el razonamiento *a priori*. Cuando afirmaste que al lanzar una moneda la probabilidad de que caiga águila es un "medio" (o 0.5), o "una posibilidad de dos", usaste el hecho de que la moneda tiene dos caras, y una de ellas es águila.

Actividad 1.4 a

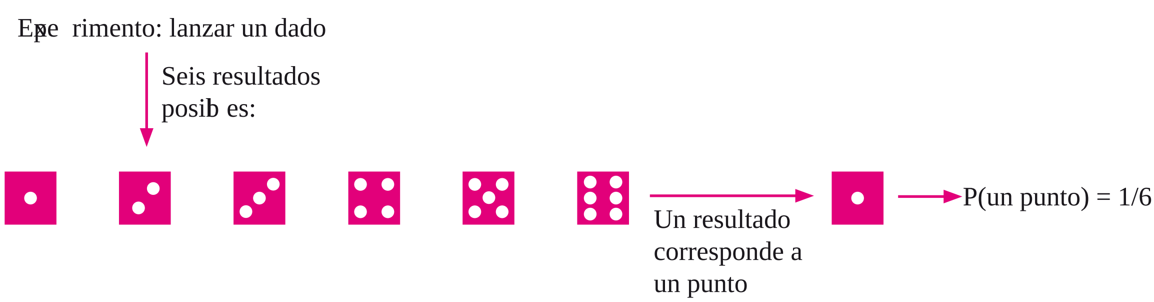
Qué hacer

a) Estudia con atención:

Asimismo, P (sello) = 1/2.

¿Cuál es valor de la suma: P (águila) + P (sello)?_

De manera semejante, al lanzar un dado, podemos razonar de la siguiente manera:



Actividad 1.4 a (Cont.)

b) Resuelve: Si 1, 2, 3, 4, 5 y 6, representan los sucesos: cae uno, dos, tres, cuatro, cinco y seis puntos respectivamente, determina:

P (1) = _ P (3) = _ P (5) = _

P (2) = _ P (4) = _ P (6) = _

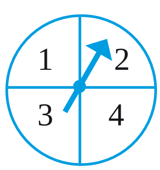
¿Cuál es el valor de la suma: P (1) + P (2) + P (3) + P (4) + P (5) + P (6) ?_

Además del razonamiento ***parte-todo***, se hace uso de un supuesto: al lanzar la moneda, los dos resultados posibles (águila y sello) son igualmente probables, y al lanzar un dado, los seis resultados son también igualmente probables. Los resultados que son igualmente probables, se llaman ***equiprobables.***

Para cumplir con el supuesto de equiprobabilidad, deben cunplirse algunas condiciones que dependen del contexto en el que se realiza el experimento. En el caso de experimentos con monedas o dados, la equiprobabilidad exige que dichos artefactos no estén "cargados", es decir sean totalmente simétricos en el sentido de estar perfectamente balanceados. A continuación analizarás otros contextos.

Contexto de ruletas

Imagina los siguientes tipos de ruletas (en cada caso, se garantiza el giro libre de la flecha). Los experimentos consisten en girar vigorosamente la flecha y observar en qué sector se detiene. Analiza lo que se afirma y contesta lo que se indica.

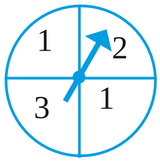
1) 

Se cumple la equiprobabilidad puesto que el todo (el círculo) está formado por cuatro sectores de igual área.

P(apuntar en cualquier sector) = 1/4.

Completa: P(1) = _, P(2) = _, P(3) = _, P(4) = _

P(1) + P(2) + P(3) + P(4) = _

2) 

Se cumple la equiprobabilidad puesto que el todo (el círculo) está formado por cuatro sectores de igual área.

P(apuntar en cualquier sector) = 1/4.

Completa: *P(1)* = _ *P(2)* = _ *P(3)* = _

P(1) + *P(2)* + *P(3)* = _

En esta ruleta aparece un suceso que <u>*no es elemental:*</u> el suceso "*la flecha apunta en 1*"

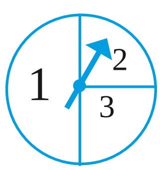
Sucesos elementales y sucesos compuestos

Un suceso es elemental, si no se puede descomponer en otros sucesos, y es compuesto si se puede descomponer en dos o más sucesos elementales.

Los sucesos: "*la flecha apunta en 2*" y "*la flecha apunta en 3*" son elementales. En cambio el suceso "*la flecha apunta en 1*" es compuesto puesto que está formado por dos sectores de área que equivalen a dos sucesos elementales.

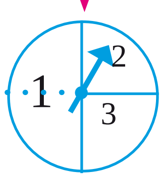
La probabilidad de un suceso compuesto es igual a la suma de las probabilidades de los sucesos elementales que lo componen.

P(1) = 1/4 + 1/4 = 2/4 = 1/2.

3) 

En esta ruleta, no se cumple la equiprobabilidad puesto que el todo (el círculo) está formado por tres sectores de diferente área.

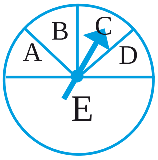
Para que se cumpla la equiprobabilidad, podemos presentar la ruleta con sectores iguales.



P(apuntar en cualquier sector) = 1/4.

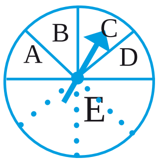
Completa: P(1) = _ P(2) = _ P(3) = _

P(1) + P(2) + P(3) = _

4) 

En esta ruleta, no se cumple la equiprobabilidad puesto que el todo (el círculo) está formado por cinco sectores de diferente área.

Para que se cumpla la equiprobabilidad, podemos presentar la ruleta con sectores iguales.



P(apuntar en cualquier sector) = 1/8.

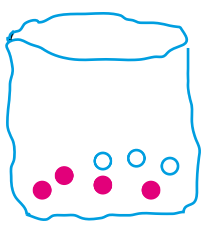
Completa: P(A) = _ P(B) = _ P(C) = _ P(D) = _
P(E) = _

P(A) + P(B) + P(C) + P(D) + P(E) = _

Contexto de urnas, bolsas o cajas

En estos casos, los experimentos consisten en seleccionar elementos de un conjuno (población). Para que se cumpla la equiprobabilidad, cada elemento debe seleccionarse al azar; para ello, antes de cada selección el contenido del conjunto debe mezclarse perfectamente y la selección debe hacerse sin ver los elementos.

Por ejemplo, sea una bolsa con siete canicas. El experimento consiste en extraer una canica al azar.



Se cumple la equiprobabilidad puesto que las extracciones se hacen al azar

Contesta:

1) P(extraer cualquier canica) =_
2) P(extraer una canica negra)= _
3) P(extraer una canica blanca) =_
4) El suceso "extraer una canica negra" , ¿es elemental o compuesto? ¿Por qué?_
5) El suceso "extraer una canica negra", ¿es elemental o compuesto? ¿Por qué?_
6) *P(negra) + P(blanca)* = _

_

La probabilidad asignada de esta manera, se llama probabilidad teórica o clásica.

Definición de probabilidad según el enfoque teórico o clásico

Se define la probabilidad teórica o clásica, como el número asignado para cuantificar la ocurrencia de un suceso de la siguiente manera: Si N es el número de sucesos elementales (partes) equiprobables, que forman una unidad (el todo), entonces la probabilidad de cada suceso elemental (parte) es igual a $\frac{1}{N}$. Y si un suceso consta de k sucesos elementales, su probabilidad será $\frac{k}{N}$.

Esta fórmula, generalmente se plantea de la siguiente manera:

$$\textit{Probabilidad de un suceso} = \frac{\textit{Número de resultados favorables al suceso}}{\textit{Número total de resultados posibles}} = \frac{k}{N}$$

Esta manera de asignar probabilidades, la enunció por primera vez el matemático Pierre Simon de Laplace, razón por la cual al enfoque teórico o clásico, también se le llama probabilidad Laplaciana.

Pierre Simon Laplace (1749-1827), astrónomo y matemático francés. Trabajó sobre la teoría de la probabilidad en su Teoría Analítica de las Probabilidades (1812) en la que enuncia la definición de probabilidad: «La probabilidad de un suceso A es el cociente entre el número de casos favorables al suceso y el número de casos posibles»

De esta definición surgen dos conceptos importantes: resultados favorables a un suceso y espacio muestral.

Espacio muestral y resultados favorables

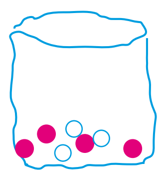
El espacio muestral es el conjunto de todos los posibles resultados de un experimento aleatorio.

El número de elementos del espacio muestral, constituye el total de resultados posibles que tiene el experimento.

Los resultados favorables a un suceso, son aquellos que tienen la propiedad o cualidad del suceso.

Ejemplos

a) Consideremos el experimento de extraer una canica de una bolsa que contiene cuatro rojas y 3 blancas.

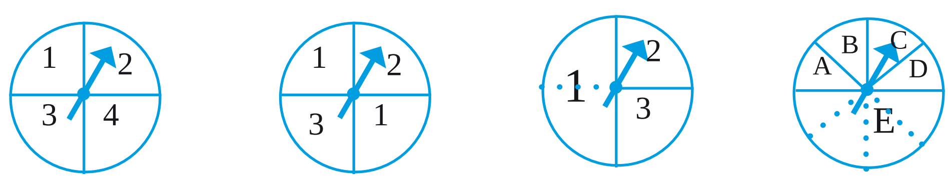


El espacio muestral está formado por siete elementos:

El suceso "*se extrae una canica roja*" tiene cuatro resultados favorables.

El suceso "*se extrae una canica blanca*" tiene tres resultados favorables.

b) Consideremos el experimento de girar la flecha de las distintas ruletas mostradas:



El espacio muestral está formado por cuatro elementos equiprobables.

El suceso "*la flecha apunta en 1*", tiene un resultado favorable.

El espacio muestral está formado por cuatro elementos equiprobables.

El suceso "*la flecha apunta en 1*", tiene <u>dos resultados favorables.</u>

El espacio muestral está formado por tres elementos <u>no equiprobables</u> los cuales se pueden convertir en <u>cuatro equiprobables.</u>

El suceso "*la flecha apunta en 1*", tiene dos resultados favorables equiprobables..

El espacio muestral está formado por cinco elementos <u>no equiprobables</u> los cuales se pueden convertir en <u>ocho equiprobables.</u>

El suceso "*la flecha apunta en E*", tiene cuatro resultados favorables equiprobables.

El espacio muestral en el lenguaje de conjuntos

Puesto que el espacio muestral es un conjunto, podemos representarlo utilizando las notaciones conjuntistas.

Así, al lanzar un dado, obtenemos el siguiente espacio muestral:

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

Los espacios muestrales como el anterior se llaman finitos, porque se pueden contar sus elementos. Para indicar el número de elementos que tiene *S*, utilizamos la notación ***n(S)***. Los espacios muestrales que corresponden a experimentos cuyos resultados pueden ser cualquier valor de una escala contínua, se llaman infinitos. Por ejemplo, la duración de una lámpara podría variar en el intervalo [0,2000] .

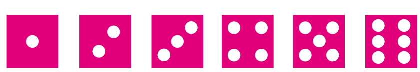
Antes de asignar probabilidades a los resultados de un experimento aleatorio, debemos describir todos los resultados posibles del experimento, es decir, debemos establecer su espacio muestral. Por desgracia un experimento puede tener más de un espacio muestral, dependiendo de lo que el observador decida registrar. Solamente deben cuidarse tres requisitos:

- Todo elemento del espacio muestral es un resultado potencial del experimento.
- Cualquier resultado que se observe al realizar el experimento, debe ser un elemento del espacio muestral.
- El resultado observado debe coincidir con un sólo elemento del espacio muestral.

Ejemplos

a. Suponga que se lanza un dado. Establece tres espacios muestrales.

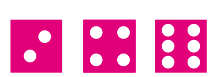
Espacio muestral 1. Observando que un dado tiene 6 caras con 1, 2, 3, 4, 5 y 6 puntos respectivamente, podemos listar:

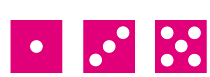
S = {  }

o simplemente: $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Espacio muestral 2. Si el observador registra que la cara mostrada tiene un número par o impar de puntos, podría listar:

$$S = \{\mathit{par}, \mathit{impar}\} = \{p, i\}$$

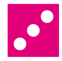
p es favorecido por: 

i es favorecido por: 

Ejemplo
(Cont.)

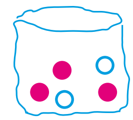
Espacio muestral 3. Si al observador le interesa la aparición de la cara con 3 puntos, podría listar:

$S = \{3, \text{no } 3\}$

3 es favorecido por: 

no **3** es favorecido por: 

b) Supón ahora, que de una bolsa que contiene 3 canicas negras y dos blancas, se tomará una sóla canica. Encuentra tres espacios muestrales.



Espacio muestral 1. Observando que los objetos son cinco canicas, podemos listar:

S = {● ● ● ○ ○}

O bien, $S = \{c_1, c_2, c_3, c_4, c_5\}$

Espacio muestral 2. Si queremos registrar el color de la canica extraída, podemos escribir:

$S = \{\textit{roja, blanca}\}$ o $S = \{r, b\}$

Espacio muestral 3. Si nos interesa la aparición del color rojo, escribiríamos:

$S = \{\textit{rojo, no rojo}\}$ o $S = \{r, \text{no } r\}$

Actividad 1.4 b

Resuelve:

1. De un grupo de personas de los cuales 25 son mujeres y 15 hombres, se va a seleccionar a una de ellas. Establece tres espacios muestrales.

Sucesos como subconjuntos del espacio muestral

Cada suceso será un subconjunto del espacio muestral formado por sus resultados favorables; por ejemplo,

A = "*obtener un número par*" = $\{2, 4, 6\}$

Recordemos que la probabilidad de un suceso es igual a la suma de las probabilidades de los sucesos elementales que lo componen.

Así:

$$P(par) = P(2) + P(4) + P(6) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

Actividad 1.4 C

Escribe los elementos que favorecen a cada suceso:

B = "número impar" = { }

C = "número primo" = { }

D = "múltiplo de 3" = { }

Asigna probabilidades a cada uno de los sucesos B, C y D:

P(B) = ___ P(C) = ___ P(D) = ___

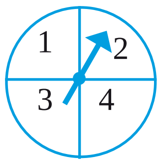
En el lenguaje de conjuntos, la regla de Laplace, puede establecerse de la siguiente manera:

Probabilidad de un suceso X cualquiera = $P(X) = \dfrac{\textit{Número de elementos de X}}{\textit{Número de elementos de S}} = \dfrac{n(X)}{n(S)}$

¡Atención! Para aplicar la fórmula anterior, ***n(X)*** y ***n(S)***, deben provenir de espacios muestrales equiprobables.

Analiza cuidadosamente los siguientes casos, que muestran la forma de proceder para transformar en espacio muestral equiprobable, uno que no lo es.

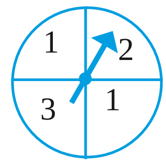
1)



$S_{\text{equiprobable}} = \{1, 2, 3, 4\}$

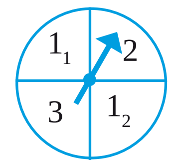
n(S) =4

2)



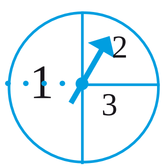
$S_{\text{no equiprobable}} = \{1, 2, 3\}$

$S_{\text{equiprobable}} = \{1_1, 1_2, 2, 3\}$



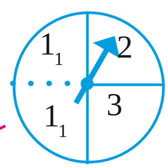
n(S) =4

3)



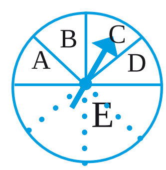
$S_{\text{no equiprobable}} = \{1, 2, 3\}$

$S_{\text{equiprobable}} = \{1_1, 1_2, 2, 3\}$

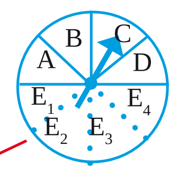


n(S) =4

4)



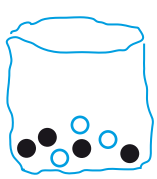
$S_{\text{no equiprobable}} = \{A, B, C, D, E\}$



$S_{\text{equiprobable}} = \{A, B, C, D, E_1, E_2, E_3, E_4\}$

n(S) =8

5)



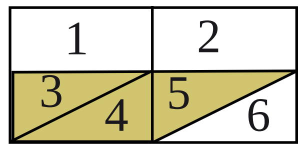
$S_{\text{no equiprobable}} = \{\text{negra, blanca}\} = \{n, b\}$

$S_{\text{equiprobable}} = \{n_1, n_2, n_3, n_4, b_1, b_2, b_3\}$

n(S) =7

Actividad 1.4 d

1. El dibujo de la derecha muestra un tiro al blanco. Si un dardo que se lanza al azar cae en la zona 1, diremos que ha ocurrido el suceso 1. La probabilidad de que ocurra el suceso 1 la representamos por *P(1)*. De manera semejante nos referimos a los sucesos 2, 3, 4, 5 y 6. Además consideremos el suceso “el dardo cae en zona coloreada” y representemos su probabilidad como *P(zona de color)*



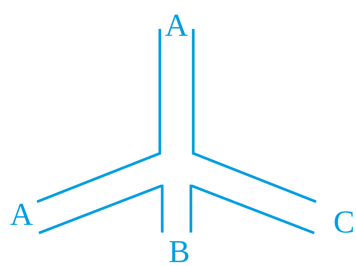
a) Clasifica estos sucesos en elementales o compuestos. Argumenta tu respuesta.

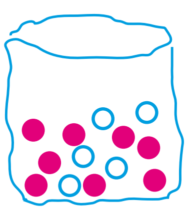
b) Determina:

P(1)= _ P(2)= _ P(3) = _ P(4) = _ P(5) = _ P(6) = _

P(zona de color) = _ P(zona blanca) = _

2. Un ratón sale de *A* y puede irse, con igual probabilidad, por cualquiera de las bifurcaciones que encuentra. Asigna un número a la probabilidad de llegar a *B*.





3. Una bolsa contiene 8 canicas rojas y 5 blancas. Si se extrae una canica al azar.

a) Establece dos espacios muestrales uno equiprobable y otro no equiprobable.

b) Sea **b** el suceso “*sale una canica blanca*” y **r** el suceso “*sale una canica roja*”. Determina:

- *P(b)*,
- *P(r)*,
- *P(b) + P(r)* = _

Relación entre probabilidad frecuentista y teórica

Una vez estudiados los distintos enfoques, es necesario contestar la siguiente pregunta: ¿Qué relación existe entre la probabilidad teórica y la frecuencial (empírica)?

Para contestar, recuerda que cuando estudiaste el comportamiento de las frecuencias relativas del suceso "*cae águila*" en el experimento de lanzar una moneda, se pudo apreciar que, conforme aumenta el número de lanzamientos, dicha frecuencia relativa tiende a estabilizarse alrededor de valores muy cercanos a 0.5. Y, cuando aplicaste el enfoque clásico, encontraste que la probabilidad de que "*caiga águila*" es: $\frac{1}{2} = 1.5$

De igual manera, en el lanzamiento de un dado, la frecuencia relativa del suceso "*cae un punto*", se estabiliza en valores cercanos a 0.166 y 0.17, y aplicando el enfoque clásico encontramos que la probabilidad de "*cae un punto*" es: $\frac{1}{6} = 0.166$.

Así pues, la probabilidad teórica, nos indica la proporción aproximada conque aparecerá el suceso a la larga. Se debe recalcar que las probabilidades teóricas sólo serán aproximadamente válidas para el experimento real. Este hecho, no debe sorprendernos, puesto que la asignación teórica, está basada en una idealización de la realidad. Esta idealización recibe el nombre de modelo. Por ejemplo, imaginamos que las monedas o los dados son completamente simétricas. Un modelo es adecuado, si a pesar de la simplificación que hace de la realidad, los resultados que proporciona son bastante aceptable para todos los propósitos prácticos. La probabilidad se encarga de encontrar modelos apropiados para describir los fenómenos aleatorios.

Otro aspecto que debe recordarse es que, la estabilización se presenta con las frecuencias relativas (o proporciones), y no con las absolutas. Por ejemplo, si n es el número de lanzamientos de una moneda, el número teórico de águilas (o sellos) es: $\frac{1}{2}$ (n).

Sin embargo, Kerrich por ejemplo, obtuvo en 10000 lanzamientos, 5067 águilas contra 4933 sellos, en vez de $\frac{1}{2}$ (10000) = 5000 águila (o sellos).

También, debemos recordar que, si el número de veces que se repite el experimento es muy pequeño, las frecuencias relativas son muy irregulares, y, en estos casos, no podemos asegurar nada acerca de los resultados esperados.

Propiedades de la probabilidad

En los apartados anteriores estudiaste tres modos diferentes de asignar probabilidades:

1) Si es posible y práctico repetir muchas veces el experimento o si contamos con información estadística sobre las frecuencias relativas de aparición de distintos sucesos, podemos utilizar el enfoque frecuencial de la probabilidad.

2) En el caso de espacios muestrales con un número finito de resultados equiprobables, calculamos las probabilidades usando el enfoque clásico o teórico.

3) En los demás casos, el único modo de asignar probabilidades a los sucesos es de modo subjetivo.

En todos los casos, las probabilidades deben cumplir las siguientes propiedades:

1. Una probabilidad es siempre un valor numérico entre cero y uno, incluyendo a éstos. Es decir, para todo suceso *A* se cumple que: $0 \leq P(A) \leq 1$

Propiedades relacionadas con la propiedad 1:
La probabilidad es 0, si el evento no puende ocurrir (suceso imposible).
La probabilidad es 1 si el evento siempre ocurre (***suceso seguro***).
En los demás casos, la probabilidad de un suceso es un número fraccionario entre 0 y 1.

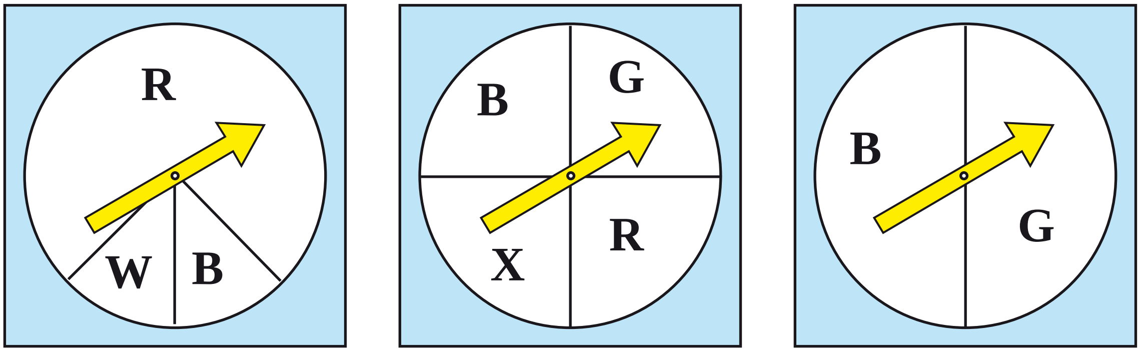
2. La suma de las probabilidades de todos los resultados de un experimento es igual a 1.

Esta propiedad es consecuencia de las condiciones que debe reunir todo espacio muestral: El espacio muestral debe incluir a todos los posibles resultados del experimento, y el resultado observado debe coincidir con un sólo elemento del espacio muestral.

3. La probabilidad de un suceso compuesto es la suma de las probabilidades de los sucesos elementales que lo componen.

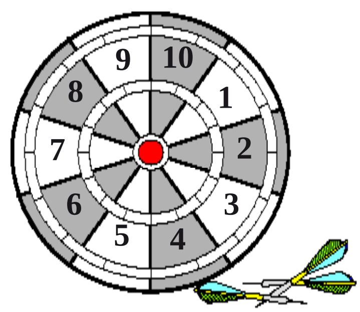
Ejercicio 14.

1. Escribe un espacio muestral para cada una de las flechas giratorias de las figuras de abajo. Indica si son equiprobables o no. En caso de que no sean equiprobables, determina uno equiprobable.



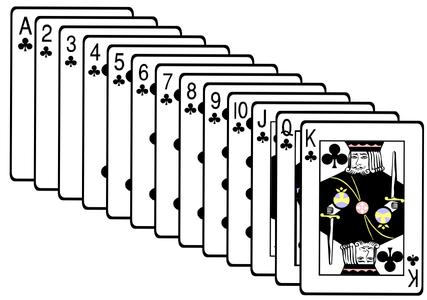
2. Una bolsa contiene 4 canicas rojas, 3 azules y 3 verdes. Se extrae una sola canica.
   a) Tabula un espacio muestral con tres resultados.
   b) Tabula un espacio muestral con diez resultados.
   c) Tabula un espacio muestral suponiendo que nos interesa el color rojo.

3. Si se tira un dardo a la rueda de la figura, encuentra las probabilidades de obtener:
   a) Tres puntos
   b) Número par
   c) Número menor que 4
   d) Número impar, mayor o igual que 7



4. Investiga la composición de una baraja española y contesta:
   a) Si se extrae una carta al azar, ¿cuál es la probabilidad de que sea un as?
   b) Se llaman figuras a las cartas As, Sota, Caballo y Rey. Calcular la probabilidad de sacar figura al extraer una carta de esta baraja.

Ejercicio 14 (Cont.)



5. Al extraer una carta de una baraja americana calcular:
   a) P(as de corazones)
   b) P(as)
   c) P(diamante)
   d) P(no diamante)
   e) P(as de tréboles)

6. En el experimento de lanzar un dado, calcula las siguientes probabilidades:
   a) Sacar un 4
   b) Sacar par
   c) No sacar 4
   d) Sacar 3 ó 4
   e) Sacar número primo.

7. Tenemos 20 canicas rojas y 2 negras. Extraemos una. ¿Cuál es la probabilidad de que sea roja? ¿Y de que sea negra?

8. Sea S = {a, b, c} el espacio muestral de cierto experimento aleatorio.
   Si $P(a) = 0.3$, $P(b) = 0.6$, ¿cuánto debe valer P(c)?

9. Encuentra los errores de cada una de las siguientes aseveraciones:

   a) Las probabilidades de que un vendedor de automóviles cierre 0, 1, 2, 3 o más operaciones en cualquier día de febrero son, respectivamente, 0.19, 0.38, 0.29 y 0.15.

   b) La probabilidad de que llueva mañana es de 0.40 y la de que no suceda es de 0.52

   c) Las probabilidades de que una impresora cometa 0, 1, 2, 3 , 4 o más errores en la impresión de un documento son, respectivamente, 0.19, 0.34, - 0.25, 0.43 y 0.29.

AUTOEVALUACIÓN (UNIDAD I)

1. Relaciona correctamente las dos columnas

a) Según este enfoque,

$$P(E) = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{\text{Resultados favorables a } E}{\text{Total de resultados}}$$

b) Probabilidad emitida en base a la experiencia. Por ejemplo: "si estudio es muy probable que apruebe"

c) $P(E) = 1$

d) $P(E) = 0$

e) La asignación de probabilidades mediante este enfoque, requiere que el experimento se repita muchas veces.

f) Cada resultado tiene distinta probabilidad de ocurrencia.

g) Parte de la matemática que trata de manejar con números la incertidumbre

( ) Probabilidad frecuentista

( ) Evento imposible

( ) Espacio muestral equiprobable

( ) Probabilidad

( ) Probabilidad clásica

( ) Evento seguro

( ) Espacio muestral no equiprobable

( ) Probabilidad subjetiva

2. Lee cuidadosamente las preguntas. Selecciona la mejor respuesta.

A. El enfoque laplaciano con respecto a la asignación de probabilidades consiste en:
   a) Asignar a cada resultado la mitad de la probabilidad del resultado anterior.
   b) No hace ninguna hipótesis a priori acerca de la probabilidad del resultado anterior.
   c) Asignar a cada resultado la misma probabilidad.
   d) Suponer que todos los resultados son iguales.

B. La equiprobabilidad requiere que:
   a) Sólo haya un número finito de resultados favorables.
   b) Cada resultado tenga la misma probabilidad de ocurrir.
   c) No se dé ningún resultado.
   d) Todos los resultados son iguales.

C. La frecuencia relativa de un suceso es:
   a) El número de veces que se observa.
   b) El número de veces que lo anotamos.
   c) El cociente del número de veces que ocurre dicho suceso entre el número de repeticiones del experimento.
   d) Un número irracional.

D. Los sucesos elementales son aquellos que:

a. Constan de un sólo resultado.
b. Son muy sencillos.
c. Se ven al principiop del curso.
d. No son muy importantes.

E. Al evento seguro se le asigna una probabilidad de:

a. 1.
b. 0.5
c. Igual a la de los demás.
d. 0.

3 Se emitió un documental sobre terremotos y la frecuencia con que éstos ocuren. El documental incluía un debate sobre la posibilidad de predecir los terremotos.

Un geólogo dijo: *En los próximos veinte años, la posibilidad de que ocurra un terremoto en la ciudad de Zed es de dos de tres.*

¿Cuál de las siguientes opciones refleja mejor el significado de la afirmación del geólogo?

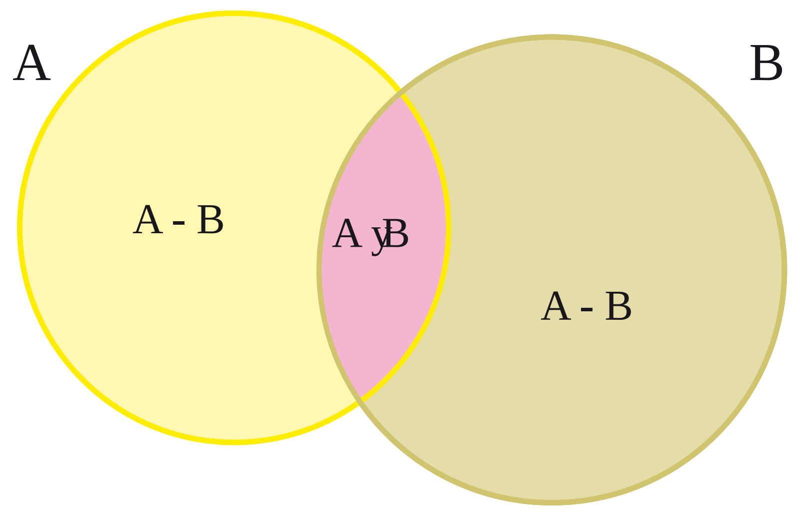
A) $\frac{2}{3} \times 20 = 13{,}3$ por lo que entre 13 y 14 años a partir de ahora habrá un terremoto en la Ciudad de Zed.

B) $\frac{2}{3}$ es más que $\frac{1}{2}$, por lo que se puede estar seguro de que habrá un terremoto en la Ciudad de Zed en algún momento en los próximos 20 años.

C) La posibilidad de que haya un terremoto en la Ciudad de Zed en algún momento en los próximos 20 años es mayor que la probabilidad de que no haya ningún terremoto.

D) No se puede decir lo qué sucederá, porque nadie puede estar seguro de cuándo tendrá lugar un terremoto.

Probabilidad de sucesos compuestos



2

UNIDAD

Lección 2 Elementos básicos de conjuntos:

Objetivo: Comprender la simbología básica de los conjuntos.
Identificar y representar en un diagrama de Venn las operaciones entre conjuntos y entre sucesos.

La probabilidad utiliza el lenguaje de los conjuntos para establecer muchos de sus conceptos y leyes. Por tal razón a continuación se hará un repaso de los conceptos y operaciones entre conjuntos que ya estudiaste en tu curso de matemáticas I.

Actividad 2.1 a

Qué hacer

Estudia con atención:

Un conjunto es una colección bien definida de objetos los cuales se llaman elementos.

Un conjunto puede expresarse de dos maneras:

a) **Por extensión**: nombrando todos y cada uno de los elementos que lo forman. Para escribirlo, se encierran los elementos entre llaves separados por comas.

Ejemplo: el conjunto formado por las vocales del alfabeto castellano puede escribirse,

$$V = \{a, e, i, o, u\}$$

y se lee: "*V* es el conjunto formado por las letras *a, e, i, o, u*".

Para indicar que un elemento "**a**" está en un conjunto "A" escribimos $\mathbf{a} \in \mathbf{A}$
Si un elemento "**b**" no pertenece al conjunto "A", se simboliza, $\mathbf{b} \notin \mathbf{A}$.

b) **Por comprensión**: nombrando una propiedad que cumplan todos los elementos del conjunto.

El conjunto de las vocales definido por comprensión, se escribe:

$$V = \{x/x \text{ es letra vocal}\}$$

y se lee: "V es el conjunto de los elementos x tal que x es letra vocal"

El símbolo / se lee "tal que".
También podemos escribir simplemente la propiedad entre las llaves

$$V = \{\text{letra vocal}\}$$

Ejemplos

Los siguientes conjuntos están dados por extensión. Escríbelos por comprensión:

a) O = {suma, resta, multiplicación, división}

b) B = {enero, febrero, marzo, ..., diciembre}

c) P = {2, 4, 6, 8, 10, 12, ...}

d) Q = {2, 3, 5, 7, 11, 13, 17,...}

Solución

a) Es el conjunto de las operaciones fundamentales de la aritmética.

O = {*x* / *x* es una operación fundamental de la aritmética}

Se lee: "A es el conjunto de todas las *x*, tal que *x* es una operación fundamental de la aritmética".

b) Es el conjunto de los meses del año.

B = {x / x es un mes del año}

Se lee: "B es el conjunto de todas las x tales que x es un mes del año".

c) Es el conjunto de los números naturales pares.

P = {x / x es un número natural divisible entre 2}

O bien:

P = {x / x es un número natural par}.

O en forma más compacta:

P = {x / x $\in$ N y x es par},

P = {x / x $\in$ N y es divisible entre 2},

P = {x / x = 2n, n $\in$ N}

d) Es el conjunto de los números primos.

Q = {x / x es un número primo}

A continuación recordaremos las definiciones y operaciones elementales entre conjuntos que se utilizan en el estudio de la probabilidad.

Conjuntos finito e infinitos

Un conjunto es finito si sus elementos se pueden contar.

El conjunto V = {*a, e, i, o, u*} es finito

En caso contrario, es decir, un conjunto en que no se pueden contar sus elementos se denomina conjunto infinito.

El conjunto de los números naturales, el de números pares, el de números enteros, el de los racionales, el de los reales, son todos conjuntos infinitos.

Cardinalidad de un conjunto

En un conjunto finito cualquiera *A*, se llama cardinalidad del conjunto al número de sus elementos.

La cardinalidad del conjunto *A* suele representarse por *n*(A).

La cardinalidad del conjunto *A* = {*a, e, i, o, u*} es *n*(A) = 5.

Conjunto vacío

Tratemos de enumerar los elementos del siguiente conjunto:

A = {*x/x* es una mujer que haya sido presidente de México hasta el año 2009}

Obsérvese que no existe persona que tenga esta propiedad. Por lo tanto, este conjunto A, no tiene elementos:

A = {   }

Este tipo de conjuntos sin elementos, se presenta frecuentemente en matemáticas; se llama **conjunto vacío** y se representa con el símbolo: ϕ.

Conjunto vacío, es un conjunto que no tiene elementos. El símbolo que lo representa es: ϕ

Subconjuntos

Un conjunto *A* se dice que es subconjunto del conjunto *B* cuando todo elemento de *A* es elemento de *B*.

Se representa : $A \subset B$

y se lee: "*A* es subconjunto de *B*" o "*A* está contenido en *B*" o "*A* está incluido en *B*"

Para representar que un conjunto no es subconjunto de otro, se utiliza el simbolo $\not\subset$.

$H \not\subset D$ significa que *H* no es subconjunto de *B*.

El conjunto vacío, ϕ, es subconjunto de cualquier conjunto.

Si *A* es un conjunto arbitrario, entonces $\phi \subset A$

Sea *A* un conjunto cualquiera, se cumple que $A \subset A$.

Ejemplos:

1. En los conjuntos A = {1, 2, 3, 4, 5}, B = {1, 2, 3, 4, 6, 7} el elemento 5 pertenece a A y no pertenece a B; por lo tanto **A no es subconjunto de B**. Esto se denota **A** $\not\subset$ **B** (Se lee: A no está contenido en B, o A no es subconjunto de B).
2. El conjunto A = {*x/x* es un paralelogramo} es un subconjunto del conjunto C = {cuadriláteros}

Conjunto universal

Se llama conjunto universal, al conjunto que contiene como subconjuntos, a todos los conjuntos que intervienen en el problema que se esté tratando.

Generalmente el conjunto universal se representa por la letra U.

Por ejemplo, si trabajamos con conjuntos de letras, un conjunto universal sería el conjunto de todo el abecedario. Si hablamos de los deportistas olímpicos, un conjunto universal podría ser el conjunto de deportistas de alto rendimiento o bien el conjunto de todos los deportistas, esto muestra que el conjunto universal no es único y su selección depende del proceso o problema que se aborde.

Ejemplo

Establecer un conjunto universal para los siguientes conjuntos:

A = {*x/x* es un alumno de primer año de la preparatoria Allende}
B = {*x/x* es un alumno de segundo año de la preparatoria Allende}
C = {*x/x* es un alumno de tercer año de la preparatoria Allende}

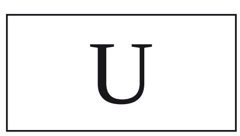
Conjunto universal: **U** = {*x/x* es un alumno de la preparatoria Allende}

O bien:

U = {*x/x* es un alumno de la UAS}

Diagramas de Venn

Al trabajar con conjuntos es ilustrativo representarlos en un diagrama, esto nos ayuda a ver con más objetividad la situación que se aborda. Generalmente se utilizan regiones del plano representadas por figuras cerradas. Por convención, se acostumbra a representar al conjunto universal **U** con un rectángulo.

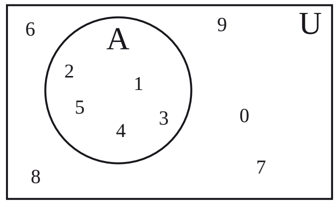


Cualquier conjunto, deberá quedar incluido dentro del área del rectángulo. Estos diagramas se llaman **diagramas de Venn**.

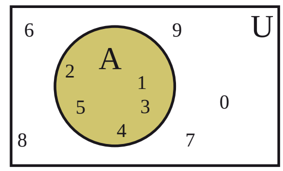
Ejemplo

Si U = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9} y A = {1, 2, 3, 4, 5}

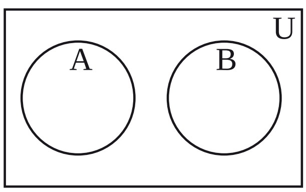
El diagrama de Venn es:



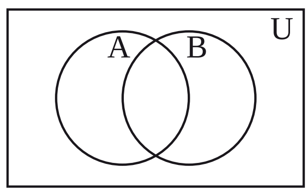
En estos diagramas, se utilizan colores o sombreados para destacar algún conjunto de interés. En el diagrama de la derecha se ha coloreado el conjunto A.



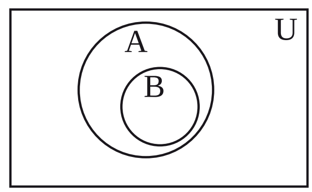
La representación de dos conjuntos presenta alguna de las siguientes opciones



Cuando A y B no tienen elementos comunes. A y B se llaman conjuntos mutuamente excluyentes, disjuntos o ajenos.



Cuando A y B tienen al menos un elemento común.



Cuando todos los elementos del conjunto B pertenecen al conjunto A.

Ejemplo

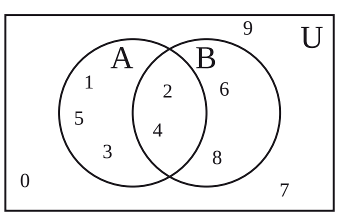
a) Los conjuntos:

U = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}

A = {1, 2, 3, 4, 5}

B = {2, 4, 6, 8}

quedan representados:



El diagrama ilustra que los elementos 2 y 4 pertenecen a ambos conjuntos.

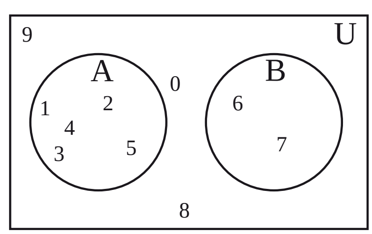
b) Los conjuntos:

U = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}

A = {1, 2, 3, 4, 5}

B = {6, 7}

quedan representados:



El diagrama ilustra que los conjuntos A y B no tienen elementos comunes. Son conjuntos **disjuntos, ajenos o mutuamente excluyentes.**

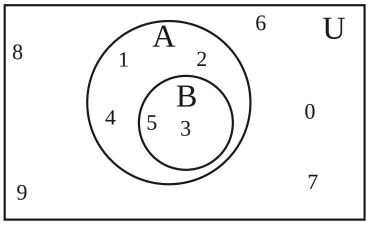
c) Los conjuntos:

U = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}

A = {1, 2, 3, 4, 5}

B = {3, 5}

quedan representados:



El diagrama ilustra que A contiene a B, o lo que es lo mismo, todo elemento de B es elemento de A.

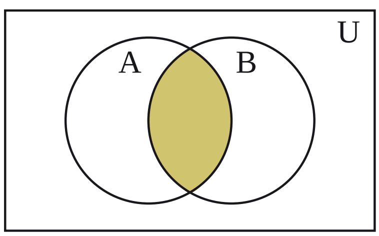
$$B \subset A$$

Intersección

Dados dos conjuntos A y B, la **intersección de A y B**, que se escribe **A ∩ B**, es el conjunto formado por todos aquellos elementos que son comunes a A y a B. En forma simbólica:

$$A \cap B = \{x / x \in A \text{ y } x \in B\}$$

En un diagrama de Venn:



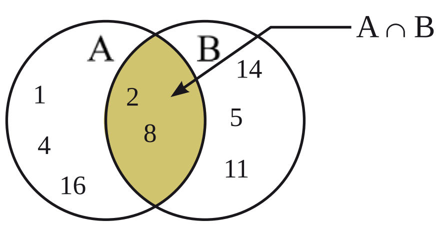
La región representa $A \cap B$

Ejemplo

Si A = {1, 2, 4, 8, 16} y B = {2, 5, 8, 11, 14}

$A \cap B = \{2, 8\}$

Para formar el diagrama de Venn, primero se localizan los elementos de la intersección y después se completa cada conjunto.



La intersección cumple con las siguientes propiedades

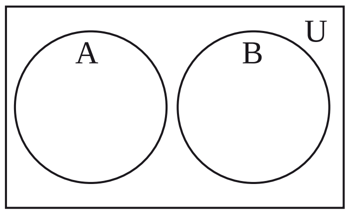
$$A \cap B = B \cap A$$

$$A \cap A = A$$

$$A \cap \phi = \phi$$

$$A \cap U = A$$

Si A ∩ B = ϕ, entonces A y B son conjuntos disjuntos o ajenos.



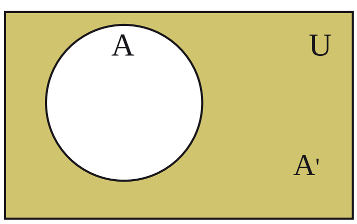
A ∩ B = ϕ

Complemento

Si tenemos un conjunto universal U y A un subconjunto de U, el conjunto formado por todos aquellos elementos de U que no pertenecen a A, se llama **complemento de A** y se denota como **A'** o bien como Ā. Simbólicamente:

A' = {x/ x ∈ U y x ∉ A} → Equivale a decir: ***no está*** en A

Visto en un diagrama de Venn:



La región representa A' → A' = ***No*** A.

Ejemplo

Sea U = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9} y A = {2, 3, 4, 9}

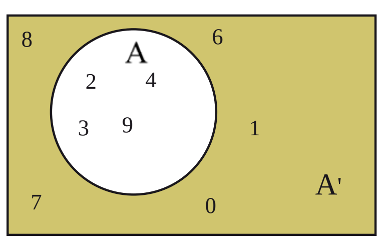
a) Determina el complemento de A.

Solución

a) Complemento de A: Está formado por los elementos que están en U y no pertenecen a A; estos elementos son: 0, 1, 5, 6, 7, 8. Entonces:

A' = {0, 1, 5, 6, 7, 8}

También leemos A' como "***no está*** en A".



La región representa A'

Las operaciones combinadas, $A \cap B'$, $A' \cap B$ y $A' \cap B'$

Estas operaciones cobran relevancia especial en el tratamiento de la probabilidad. Nos interesa de manera particular, la región que ocupan dentro de un diagrama de Venn. Utilizaremos un ejemplo para encontrar tales regiones.

Ejemplo

Dados: $U = \{x \mid x \text{ es un número dígito}\}$

$A = \{x \mid x \text{ es dígito múltiplo de } 2\}$

$B = \{x \mid x \text{ es dígito múltiplo de } 3\}$

Determina: a) $A \cap B$, b) $A \cap B'$, c) $A' \cap B$ y d) $A' \cap B'$

Solución

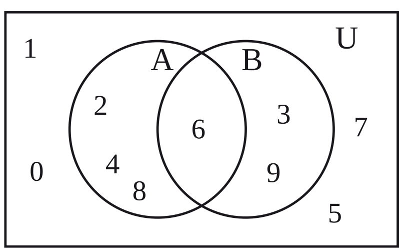
Primero formemos el diagrama de Venn. Para ello necesitamos expresar los conjuntos dados, por extensión

$U = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

$A = \{2, 4, 6, 8\}$

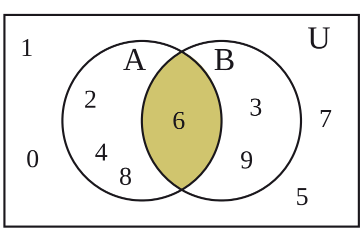
$B = \{3, 6, 9\}$

Para formar el diagrama de Venn primero se localizan los elementos comunes y después se completa cada conjunto



a) $A \cap B$

Está formado por los elementos que *están en A* **y** *en B* (múltiplos de 2 **y** múltiplos de 3)



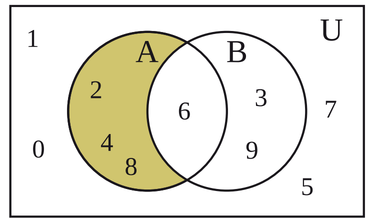
$A \cap B = \{6\}$

La región representa $A \cap B$

b) $A \cap B'$

Está formado por los elementos que **están** en A **y no están** en B (múltiplos de 2 **y no son** múltiplos de 3)

$A \cap B' = \{2, 4, 6, 8\} \cap \{0, 1, 2, 4, 5, 7, 8\} = \{2, 4, 8\}$

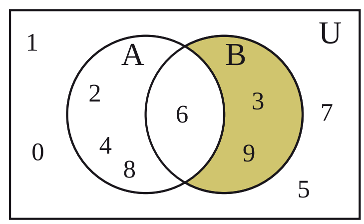


La región representa $A \cap B'$ (sí A y no B)

c) $A' \cap B$

Está formado por los elementos que **no están** en A **y sí están** en B (**no son** múltiplos de 2 **y son** múltiplos de 3)

$A' \cap B = \{0, 1, 3, 5, 7, 9\} \cap \{3, 6, 9\} = \{3, 9\}$

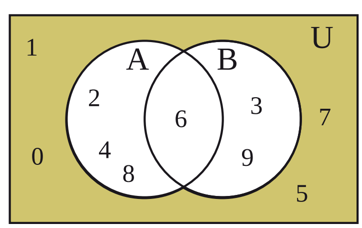


La región representa $A' \cap B$ (*no* A y sí B)

d) $A' \cap B'$

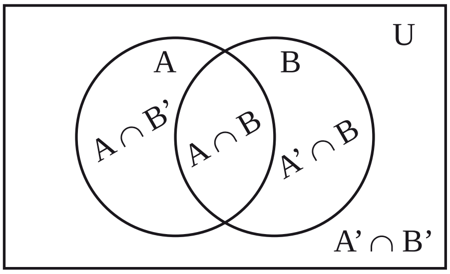
Está formado por los elementos que **no están** en A **y no están** en B (**no son** múltiplos de 2 **y no son** múltiplos de 3)

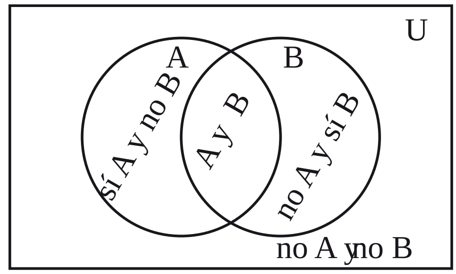
$A' \cap B' = \{0, 1, 3, 5, 7, 9\} \cap \{0, 1, 2, 4, 5, 7, 8\} = \{0, 1, 5, 7\}$



La región representa $A' \cap B'$ (no A y no B)

Resumen de regiones





Actividad 2.1 b

1. Sean los conjuntos:

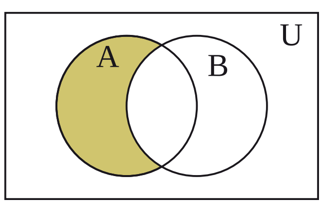
U = {x | x es número dígito}
A = {x | x es número dígito primo}
B = {x | x es número dígito impar}

Determina e interpreta
a) $A \cap B$
b) $A \cap B'$
c) $A' \cap B$
d) $A' \cap B'$

Diferencia

La diferencia del conjunto A y el conjunto B, se denota A – B y es el conjunto formado por los elementos que están en A pero no están en B.

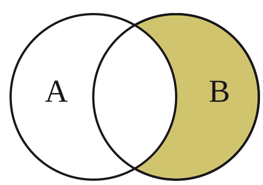
$$A - B = \{x \mid x \in A \text{ y } x \notin B\}$$



La región representa A – B

Asimismo,

$$B - A = \{ x \mid x \in B \text{ y } x \notin A\}$$



Actividad 2.1 c

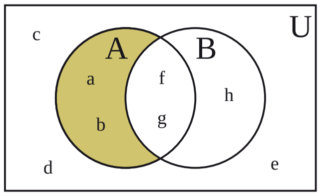
Observa el resumen de regiones correspondientes a la intersección de un conjunto con su complemento.

a) ¿Con qué región coincide $A - B$?
b) ¿Con qué región coincide $B - A$?

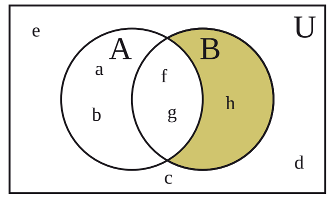
Ejemplo Sean los conjuntos: U = {a, b, c, d, e, f, g, h}, A = {a, b, f, g} y B = {f, g, h}

La diferencia A – B es: A – B = {a, b, f, g} – {f, g, h} = {a, b}

Asimismo: B – A = {f, g, h} – {a, b, f, g} = {h}



La región ▭ representa A – B

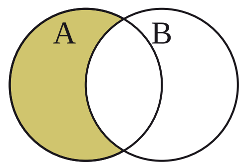


La región ▭ representa B – A

La operación "–" tiene un significado equivalente a una intersección.

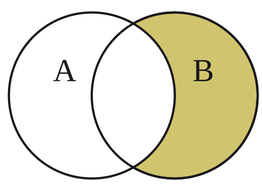
A – B significa "***sí*** A y ***no*** B"

$\boxed{A - B = A \cap B'}$



Asimismo B – A significa "***sí*** B y ***no*** A"

$\boxed{B - A = B \cap A'}$



Actividad 2.1 d

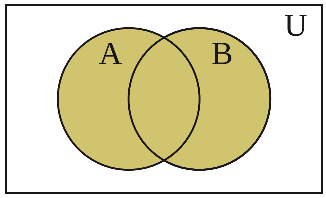
Con los datos del ejemplo anterior, comprueba que $A - B = A \cap B'$, $B - A = B \cap A'$. Para ello, determina los elementos de $A \cap B'$ y $B \cap A'$ y compáralos con los de A – B y B – A respectivamente (dos conjuntos son iguales si tienen los mismos elementos, sin importar el orden).

Unión

El conjunto de los elementos que pertenecen a A o a B o a los dos se llama **unión de A y B**; se le designa mediante **A ∪ B** y se define como:

$$\mathbf{A} \cup \mathbf{B} = \{x / x \in A \text{ o } x \in B \text{ o ambas cosas a la vez}\}$$

El conjunto A ∪ B está representado en la región sombreada del siguiente diagrama:



La unión cumple con las siguientes propiedades

$$A \cup B = B \cup A$$

$$A \cup A = A$$

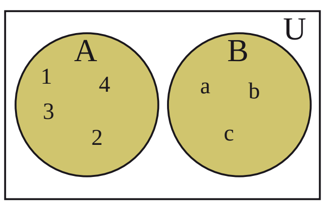
$$A \cup \phi = A$$

$$A \cup U = U$$

Ejemplos

1) Dados los conjuntos A = {1, 2, 3, 4} y B = {a, b, c} la unión de ambos será

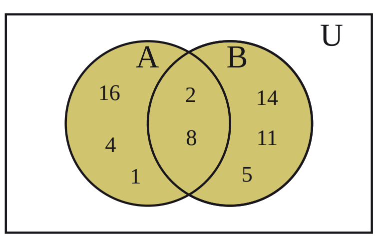
A ∪ B = {1, 2, 3, 4, a, b, c}



La región ▭ representa A ∪ B

2) Si A = {1, 2, 4, 8, 16} y B = {2, 5, 8, 11, 14} entonces

A ∪ B = {1, 2, 4, 5, 8, 11, 14, 16}   Los elementos comunes a ambos conjuntos no deben repetirse



La región ▭ representa A ∪ B

Leeremos ∪ como "o".

Ejemplos
(Cont.)

Por ejemplo, en los conjuntos ya estudiados

U = {x / x es un número dígito}

A = {x / x es dígito múltiplo de 2}

B = {x / x es dígito múltiplo de 3}

A ∪ B = {x / x es múltiplo de 2 **o** múltiplo de 3}

A ∪ B = {2, 4, 6, 8} ∪ {3, 6, 9}

= {2, 3, 4, 6, 8, 9} $\longrightarrow$ Son múltiplos de 2 **o** multiplos de 3

Actividad 2.1 e

1. Sean los conjuntos U = {x / x es número dígito}
A = {x / x es número dígito primo}
B = {x / x es número dígito impar}
Determina e interprete
a) A ∪ B
b) A ∪ B'
c) A' ∪ B
d) A' ∪ B'

Operacin esc n s ucese

Deb do a qe ex ste un paralelismo entre conjuntos y sucesos, podemos ex ender la terminolog a de los conjuntos, para describ r sucesos.

Primero, realiza la sigi ente actividad:

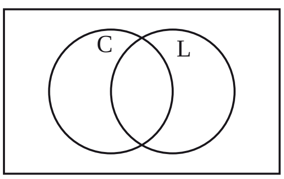
Actividad 2.1 f

Analiza las sigi entes situaciones y c ontesta lo indicado.

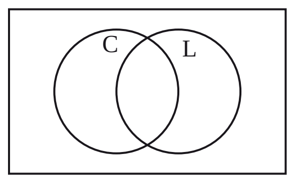
1) El señor Vega necesita recoger un paquete en la oficina de correos. Para realizar dicho trámite le piden como identificación credencial de elector ***o*** licencia de manejo.

¿Cuáles de las sigi entes opciones tiene el señr Veg ? (Señ la en un diag ama de Venn la zona correspondiente a cada posib lidad).

a) Puede llevar la credencial.

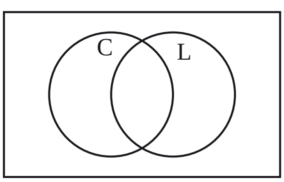


b) Puede llevar la credencial ún camente

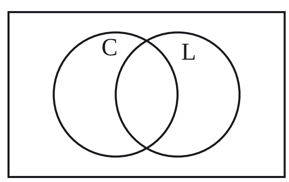


C indica credencial.
L indica licencia

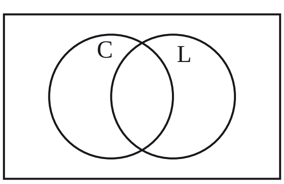
c) Puede llevar la licencia.



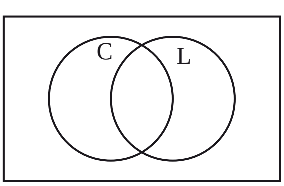
d) Puede llevar la licencia ún camente.



e) Puede llevar la credencial y l a licencia.



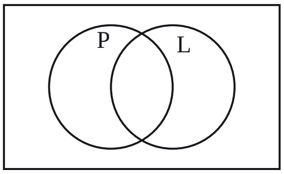
Somb ea la parte del diag ama qe "favorece" al señr Veg (licencia o credencial):



Plantea aqí tu respuesta:_
__
__

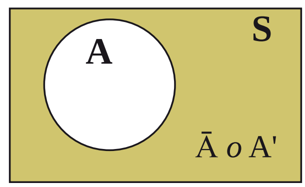
Actividad 2.1 f (Cont.)

2) Ahora, el señor Vega necesita comprar un automóvil en EEUU. Le piden como requisito pasaporte ***y*** licencia de manejo. ¿Cómo debe interpretarse el conectivo "*y*" al pedirle pasaporte ***y*** licencia? Señala en un diagrama la zona que favorece al señor Vega.

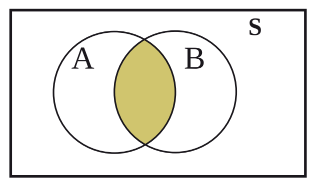


Ahora, procederemos a establecer la equivalencia entre conjuntos y sucesos (o eventos). Para ello, consideraremos como conjunto universal al espacio muestral correspondiente al experimento de interés.

El ***suceso complemento*** del suceso A, es el suceso constituido por todos los resultados de S que no están en A y se representa por Ā *o* A' . El complemento de A, equivale a la negación de A.



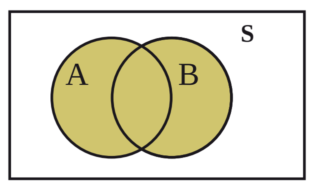
Intersección de dos sucesos A y B , es un suceso que ocurre si A ***y*** B se realizan simultáneamente (ambos). Esto se escribe : ***A*** ∩ B



Unión de dos sucesos A y B es un suceso que se realiza si A ***o*** B se realizan. Es decir, el suceso A ***o*** B, ocurre, si:

- Sucede A
- Sucede B
- Suceden ambos.

En términos de conjuntos se escribe : ***A*** ∪ B



A ***o*** B = ***A*** ∪ B significa:

- Al menos uno.
- Cualesquiera.

Actividad 2.1 g

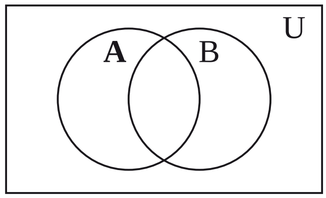
Contesta: ¿A qué operación entre sucesos corresponde cada una de las situaciones planteadas en la actividad (2.1 f)?_

Actividad 2.1 h

1) Sean los siguientes sucesos:

Suceso A = la gente de pelo castaño

Suceso B = la gente de ojos grises



a) Dibuja diagramas de Venn y sombrea los sucesos siguientes:

$A \cup B$	$A \cap B'$	$\bar{A}$
$A \cap B$	$A' \cap B$	$\bar{B}$

b) Interpreta con palabras cada uno de los sucesos combinados encontrados en a).

2. Hacer un diagrama de Venn en donde aparezca:

Universo: estudiante de la UAS:

Suceso P = estudiantes de preparatoria

Suceso I = estudiantes del Centro de Idiomas

Ahora, mostrar un diagrama que indique:

(a) Un estudiante está en P pero no en I

(b) Un estudiante no está en I

(c) Un estudiante no está en P

(d) Ni en P, ni en I

(e) En P, pero no en I

Ejercicios

1. Expresar los siguientes conjuntos, describiendo la propiedad de sus elementos (método de comprensión):

   1. A = {5, 10, 15, 20, 25, 30, 35}
   2. D = {7, 14, 21, 28}
   3. E = {Luna}
   4. F = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}

2. Expresar cada uno de los siguientes conjuntos enlistando sus elementos (método de extensión):

   1. L = {x / x es un planeta del sistema solar}
   2. M = {x / x es un número positivo múltiplo de 4 y menor que 20}
   4. Q = {x / x es dígito del sistema decimal}
   5. R = {x / x es un número entero y x + 2 = 0}
   6. S = {t / t es entero y $t^2 + 2t = 0$}

3. Dado el conjunto universal U= {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}, escribe cuatro subconjuntos que sean parte de él.

4. Sea el experimento de lanzar un dado. Considera como conjunto universal el conjunto de resultados posibles de este experimento y sean los siguientes sucesos:

   $A = \{x/x < 4\}$

   $B = \{x/x < 5\}$

   $C = \{x/x \text{ es par}\}$

   $D = \{x/x \text{ es impar}\}$

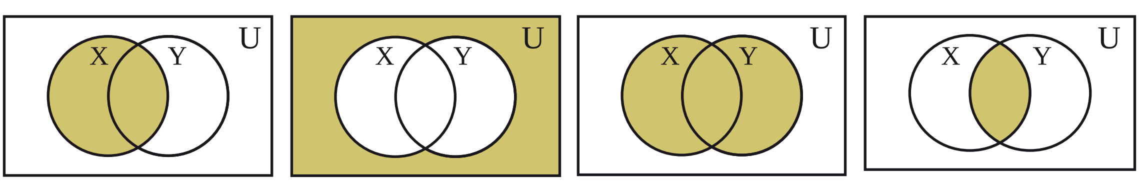
   Describe por extensión cada uno de los sucesos siguientes:

   a) $A \cup B$ b) $A \cap C$ c) $A \cap B$
   d) $(A \cup B)'$ e) $A \cap (B \cup C)$

5. Describe los sucesos que se representan mediante las zonas sombreadas de los cuatro diagramas de Venn de la figura, si:

   X indica que el señor López tiene credencial de elector y

   Y indica que la esposa del señor López tiene credencial de elector



Lección 2 Cálculo de probabilidades de sucesos compuestos. Uso de la regla de Laplace.

Objetivo: Determinar probabilidades condicionales utilizando el concepto de espacio muestral modificado.
Entender que los sucesos compuestos comprenden la realización de más de un suceso.

Los sucesos compuestos se forman al combinar dos o más eventos simples (o elementales). Los conectivos: "*y*", "*o*", se utilizan para combinar sucesos elementales. En esta lección asignarás probabilidades a los siguientes tipos de sucesos compuestos:

1. La probabilidad de que ocurra cualquiera de los sucesos *A o B*: *P*(*A o B*).
   En términos conjuntistas:
   $$P(A \text{ o } B) = P(A \cup B)$$
2. La probabilidad de que ocurra ambos sucesos *A y B*: *P(A y B)*.
   En términos conjuntistas:
   $$P(A \text{ y } B) = P(A \cap B)$$
3. La probabilidad de que ocurra un suceso únicamente: A y $\overline{B}$:
   $$P(A \text{ y } \overline{B}) = P(A \cap \overline{B})$$
4. La probabilidad de que ocurra el suceso A dado que ocurrió el suceso *B*: *P(A / B)*. Se lee: Probabilidad de *A* dado *B*.

Actividad 2.2 a

Qué hacer

Parte I

Estudia atentamente cada uno de los siguientes apartados:

Cuando tratamos con una situación incierta, esperamos que si se obtiene más información las probabilidades cambiarán. Alternativamente, podríamos decir que conforme se dispone de mayor información, se modifica el espacio muestral porque se excluyen algunos resultados. El siguiente ejemplo nos ilustrará lo antes planteado.

En un concurso participan tres personas, a cada una de ellas se les entrega una llave y sólo una de éstas encenderá un automóvil; cada persona prueba la llave y si no enciende se retira. José tiene la llave número 3. Consideremos las siguientes fases del concurso:

Actividad 2.2 a (Cont:)

- Al inicio del concurso, el espacio muestral consta de tres posibilidades:

$S = \{$ 

$\}$

$$P\,(\text{gane José}) = \tfrac{1}{3}$$

- A continuación la persona que tiene la llave 1 trata de encender el automóvil. Asumamos que éste no enciende. ¿Cuál es la probabilidad de que José gane?

  Ahora, el espacio muestral se ha modificado: $S_{modificado} = \{$ 

$\}$

$$P\,(\text{gane José, dado que el primero falló}) = \tfrac{1}{2}$$

- Sigue la segunda persona y tampoco enciende el carro:

$S_{modificado} = \{$ 

$\}$

$$P\,(\text{gane José, dado que falló el } 1^{o} \text{ y el } 2^{o}) = \tfrac{1}{1} = 1$$

Hemos calculado tres probabilidades para el mismo evento: "*gana José*".

Las últimas dos probabilidades contaron con información adicional, **son probabilidades condicionadas** (o condicionales).

> Probabilidad condicional es la probabilidad con información adicional

Para designar la probabilidad de un evento B, condicionada a otro evento A, escribimos:

$\boxed{P\,(B\,/\,A)}$ Se lee: "**probabilidad de B, dado que ocurrió A**"

En el ejemplo anterior:

$P\,(\text{gane José / falló el } 1^{o} \text{ y el } 2^{o}) = \tfrac{1}{2}$ Se lee: "*probabilidad de que gane José*, **dado que** *falló el 1°, es igual a* 1/2"

Asimismo,

$$P\,(\text{gane José / falló el } 1^{o} \text{ y el } 2^{o}) = 1$$

> El símbolo **P(B/A)** denota la probabilidad condicional de que el suceso B ocurra dada la información o condición de que el suceso A ocurre.

Actividad 2.2 a (Cont.)

Similarmente:

P(A/B) denota la probabilidad condicional de que el suceso A ocurra dada la información o condición de qe B ocurre.

Los sigi entes ejemplos nos familiarizarán con este nuevo símbl o:

Ejemplos

1. Considera los sucesos:

   Ll: *“Lluvia”*
   N: *“Nub s”*

   ♦ Simbl iza el sigi ente h cb: "*la p obb lidad de lluvia dado qe by nub s es igual a 0* "
   Respuesta: *P(Ll / N) = 0*

   ♦ Con estos mismos datos, interpreta la epr esión:
   “La prob b lidad de nub s, dado qe h y lluvia es 1. Si llueve es segr o qe h ynub es”.
   Respuesta: *P(N / Ll) = 1*

2. Si lanzas una moneda al aire una vez, ¿qué significa *P*(*águila / sello*) = 0?

   Respuesta: *“La probabilidad de águila dado sello es cero. En un lanzamiento, no se pe de ob ener águila si ya sab mos qe cayó sello”*.

3. Si se tira un dardo a la rueda de la figura, encuentra la prob b lidad de ob ener un número menor qe 4, dado qe se ob uvo un nm ero par.

Respuesta:

Si y se sab qe el dardo cay en un nm ero par, el espacio muestral y no consta de 10 resultados; abr a, el espacio muestral incluy a aqe llos resultados qe sean nm eros pares.

$$S_{\text{modificado}} = \{2, 4, 6, 8, 10\}$$

De aqí , nos interesan los resultados favorab es al evento: *se ob iene un nm ero menro qe 4*

Resultados favorables modificados = {2, 4}

Entonces: *P* (*menor qe 4* / *es pr*) = $\frac{2}{5}$

Actividad 2.2 a (Cont.)

Parte II

En la lección (2.1), al tratar con conjuntos, dentro de cada zona del diagrama de Venn repartíamos todos los elementos del conjunto universal.

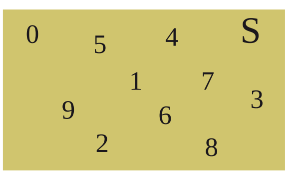
Por ejemplo, considera el experimento de elegir al azar un número dígito. Sean los sucesos:

a) I: se elige un número impar.
b) P: se elige un número primo.

Para construir el diagrama de Venn, enlistaremos cada elemento tanto del conjunto universal como de los sucesos indicados. Recordemos que al tratar con sucesos, el espacio muestral es el conjunto universal. Entonces:

Experimento: elegir un número dígito $\xrightarrow{\text{Resultados posibles}}$ $S = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

Resultados posibles presentados en un diagrama de venn.



Estos elementos los repartimos con base en los sucesos I y P.

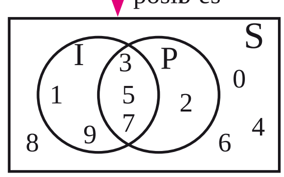
Primero, enlistamos los elementos de cada suceso

$I = \{1, 3, 5, 7, 9\}$
$P = \{2, 3, 5, 7\}$

A continuación determinamos $I \cap P$

$I \cap P = \{1, 3, 5, 7, 9\} \cap \{2, 3, 5, 7\}$
$= \{3, 5, 7\}$

Repartimos los resultados posibles



Para el cálculo de probabilidades, estamos interesados en la cardinalidad de cada zona del diagrama. Entonces, *en vez de repartir los elementos, se reparten dichas cardinalidades*, tal y como se muestra a continuación:

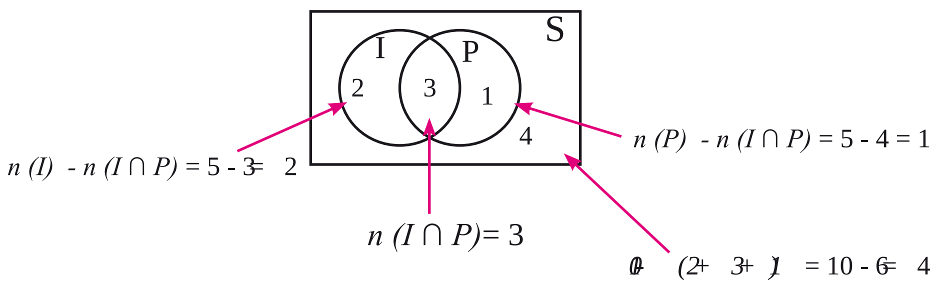
Actividad 2.2 a (Cont.)

En el ejemplo que estamos estudiando, tenemos que:

$n(S) = 10$
$n(I) = 5$
$n(P) = 4$
$n(I \cap P) = 3$

$\boldsymbol{n(S)} = 10$

Repartimos el 10, a partir de:
$n(I \cap P) = 3$



Estamos ya en condiciones de calcular probabilidades de sucesos compuestos aplicando la regla de Laplace.

Aplicación de la regla de Laplace

Puesto que conocemos las cardinalidades de los sucesos, simplemente aplicamos la fórmula de Laplace: $P(A) = \dfrac{n(A)}{n(S)}$

Ejemplo

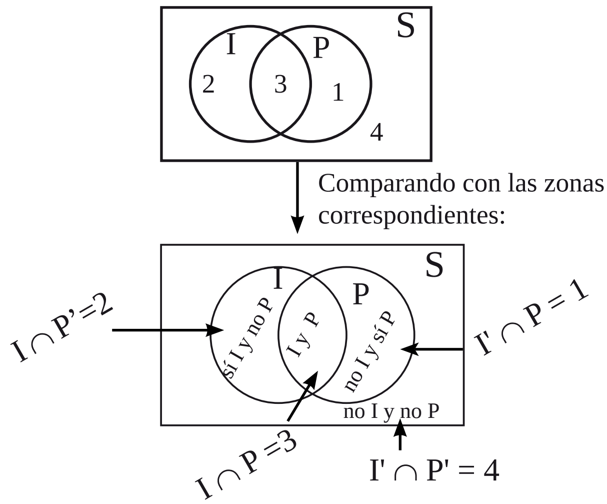
En el experimento de seleccionar un dígito al azar, calcular la probabilidad de seleccionar:

a) Un número impar.
b) Un número primo.
c) Un número impar que no sea primo.
d) Un número primo que no sea impar.
e) Un número que no sea ni impar, ni primo.
f) Un número que sea impar y primo.
g) Un número que sea impar o primo.
h) Un número que no sea impar.
i) Un número primo, si se sabe que, el número seleccionado es impar.

Ejemplo
(Cont.)

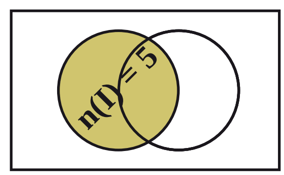
Solución

El experimento y los sucesos involucrados son los mismos que acabamos de analizar. Por tanto, retomamos el diagrama de Venn que tiene cardinalidades.



a) P (número impar) = P(I):

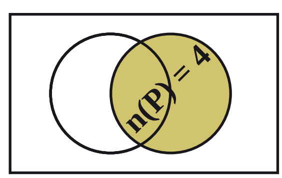
***n* (*S*)** = 10



$$P(I) = \frac{n(I)}{n(S)} = \frac{5}{10} = 0.5$$

b) P (número primo) = *P(P)*:

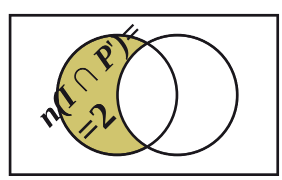
***n* (*S*)** = 10



$$P(P) = \frac{n(P)}{n(S)} = \frac{4}{10} = 0.4$$

c) P (impar que no sea primo) = *P*(I ∩ P'):

***n* (*S*)** = 10

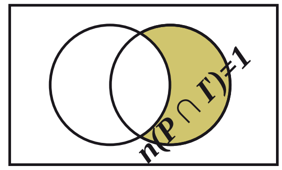


$$P(\mathrm{I} \cap P') = \frac{n(I \cap P')}{n(S)} = \frac{2}{10} = 0.2$$

Ejemplo
(Cont.)

d) P (primo que no sea impar) = $P(P \cap I')$:

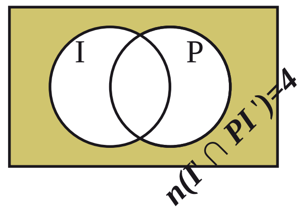
n (S) = 10



$$P\,(P \cap I') = \frac{n(P \cap I')}{n(S)} = \frac{1}{10} = 0.1$$

e) P (ni impar, ni primo) = $P(I' \cap P')$:

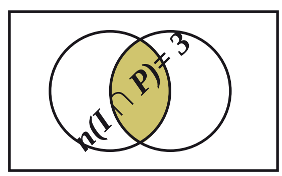
n (S) = 10



$$P\,(I' \cap P') = \frac{n(I' \cap P')}{n(S)} = \frac{4}{10} = 0.4$$

f) P (impar y primo) = $P(I \cap P)$:

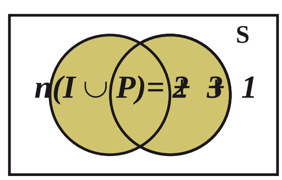
n (S) = 10



$$P\,(I \cap P) = \frac{n(I \cap P)}{n(S)} = \frac{3}{10} = 0.3$$

g) P (impar o primo) = $P(I \cup P)$:

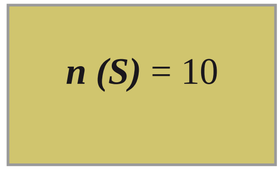
n (S) = 10

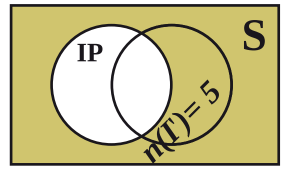


$$P\,(I \cup P) = \frac{n(I \cup P)}{n(S)} = \frac{2 + 3 + 1}{10} = \frac{6}{10} = 0.3$$

Ejemplo
(Cont.)

h) P (no impar) = *P(I ')*:



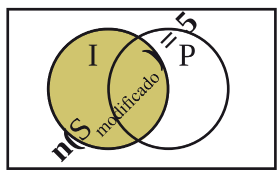


$$P\,(I') = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$$

i) P (Primo, dado que es impar) = P(P / I):

Si ya se sabe que el número es impar, *el espacio muestral ya no consta de toda la zona correspondiente al espacio muestral original*. Ahora, el espacio muestral incluye a aquellos resultados que sean números impares.

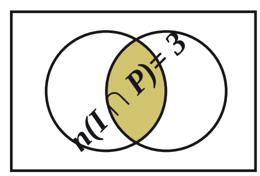
$S_{modificado} = \{1, 3, 5, 7, 9\}$



De aquí, nos interesan los resultados favorables al evento: *se obtiene un número primo.*

Resultados favorables modificados = {3, 5, 7}

Coincide con la intersección



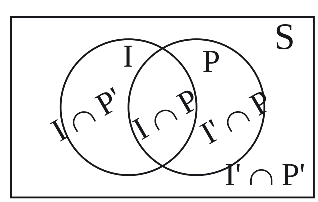
Entonces:

$$P\,(P\,/\,I) = \frac{n(P \cap I)}{n(S_{modificado})} = \frac{3}{5}$$

Actividad 2.2 b

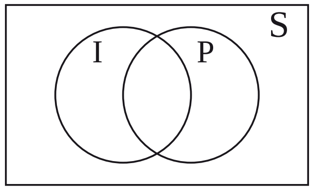
a) Recuerda que P(S) = 1. Ahora, puesto que el espacio muestral S se ha dividido de tal manera que : S = {I ∩ P', I ∩ P, I' ∩ P, I' ∩ P'}, debe cumplirse que :

$$P(S) = P(I \cap P') + P(I \cap P) + P(I' \cap P) + P(I' \cap P') = 1$$



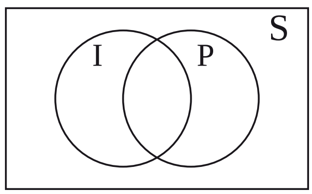
Actividad 2.2 b

b) El diagrama de Venn con dos conjuntos que tienen elementos en común, presenta 4 regiones. Utilizando los datos del ejemplo que estamos estudiando, anota en cada región la probabilidad que le corresponde.



¿Cuánto suman las probabilidades de las cuatro regiones?_

c) Ahora, anota las probabilidades de cada región expresadas en porcentaje.



¿Cuánto suman las probabilidades de las cuatro regiones?_

d) Utilizando estos datos, calcula las probabilidades de los siguientes sucesos:

1) P(*no P*) = _
2) P(*I* / *P*) = _

Ejercicio 2

1. En una entrevista efectuada por teléfono se encontró que 77 personas prefieren un producto A, 44 un producto B y 13 tanto A como B. ¿Cuántas personas prefieren por lo menos uno de estos productos?

2. Al entrevistar a 100 familias, se observó que 75 de ellas tenían suscripción al periódico El Debate, 55 al Noroeste y 10 a ninguno de ellos. ¿Cuántas familias están suscritas a ambos?

3. De 120 estudiantes, 60 estudian idioma francés, 50 estudian ruso y 20 estudian ruso y francés. Si escoge un estudiante aleatoriamente, hallar la probabilidad de que:
   a. Estudie francés y ruso
   b. Estudie francés o ruso
   c. No estudie ni francés, ni ruso.
   d. Estudie francés si se sabe que estudió ruso.
   e. Estudie ruso si se sabe que estudió francés.

4. Entre los 200 empleados de un departamento hay 150 graduados, 60 del total dedican por lo menos parte de su tiempo a trabajos de estadística y 40 de los 150 graduados dedican por lo menos parte de su tiempo a trabajos de estadística. Si se toma al azar uno de estos empleados:
   a) ¿Cuál es la probabilidad de que no sea graduado y no trabaje en estadística?
   b) ¿Cuál es la probabilidad de que trabaje en estadística si se sabe que es graduado?

5. En cierta ciudad, el 40% de la población tiene el cabello castaño; el 20% tiene los ojos negros y el 5% tiene los ojos negros y el cabello castaño. Se escoge una persona al azar, halle la probabilidad de que:
   a. Tenga el cabello castaño o los ojos negros
   b. Tenga el cabello castaño pero no los ojos negros
   c. No tenga el cabello castaño, ni los ojos negros.
   d. Tenga los ojos negros dado que tiene el cabello castaño.

6. Al tirar un dado, calcule la probabilidad de que:
   a. No se obtenga el 6
   b. No salga ni 1, ni 6
   c. Que salga el 1 o el 3

7. De 100 empleados de una compañía, 70 son casados, 80 son graduados y 60 son ambas cosas. Calcule la probabilidad de que si se selecciona una persona al azar de dicho grupo, ésta sea:
   a. casada y no graduada
   b. no casada
   c. soltera y no graduada

Lección 2.3 La regla del complemento

Objetivo: Entender y ser capaz de aplicar la regla del complemento

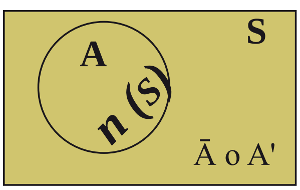
En la lección (2.2), calculaste probabilidades de sucesos compuestos aplicando la regla de Laplace. Ahora, estableceremos algunas reglas de probabilidades que son aplicables para este tipo de sucesos. Antes, estudiaremos la regla del complemento y continuaremos con la regla de la adición, regla de la probabilidad condicional y regla del producto de probabilidades.

Actividad 2.3a

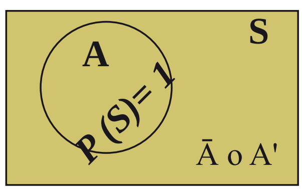
Qué hacer

Estudia atentamente:

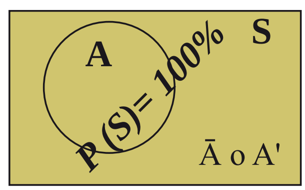
En un diagrama de Venn, todo el rectángulo representa el universo de posibilidades que tiene el experimento aleatorio en cuestión. Es decir, el diagrama de Venn representa el "*todo*". Este "*todo*" o universo, puede representarse de tres maneras equivalentes, a saber:



El número total de resultados posibles es $n(S)$.



La suma de probabilidades de todos los resultados de S es 1.

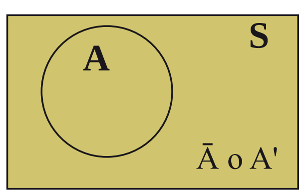


La suma de probabilidades de todos los resultados de S es 100%.

Si consideramos un experimento con un sólo suceso llamado A, entonces, un espacio muestral puede estar formado por dicho suceso y su complemento:

$$S = \{A, \bar{A}\}$$

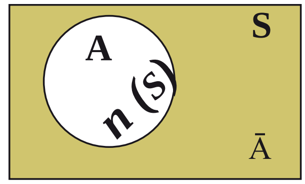
Representado en un diagrama:



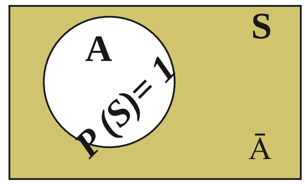
Actividad 2.3a (Cont.)

Podemos establecer que:

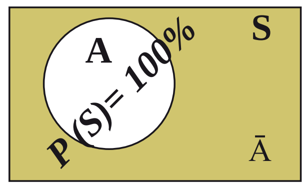
$n(A) + n(\bar{A}) = n(S)$



$P(A) + P(\bar{A}) = 1$



$P(A) + P(\bar{A}) = 100\%$



Eligiendo la segunda expresión se concluye que:

$$\boxed{P(\bar{A}) = 1 - P(A)}$$

Esta regla puede enunciarse así: Si A es un suceso, la probabilidad de la *no ocurrencia de A*, denotada como $P(\bar{A})$ es igual a: 1 menos la probabilidad de ocurrencia de A.

Más adelante, aplicaremos esta fórmula cuando sea más fácil o más práctico calcular $P(\bar{A})$ en vez de *P(A)*. Ésto sucede, cuando se pregunta por la probabilidad de "*por lo menos uno*" o "*al menos uno*". Por el momento, la aplicaremos simplemente para calcular la probabilidad del no ocurrencia de un suceso.

Ejemplos

1) Al lanzar un dado, ¿cuál es la probabilidad de obtener un número *distinto de tres*?

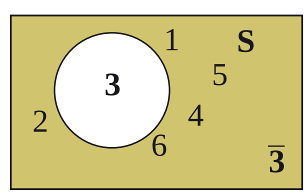
Solución

Como ya sabemos el, espacio muestral es:

$$S = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$$

Distino de 3, es equivalente a "*no cae 3*".

Además, "*no cae 3*" es complemento de "*cae 3*".



Si representamos con $\bar{3}$ al suceso "*no cae 3*", tenemos que:

$$P(\bar{3}) = 1 - P(3) = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$$

Ejemplos

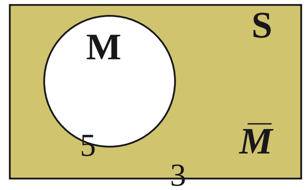
2) En una reunión del consejo técnico de una escuela, formado por 8 integrantes, asistieron 5 mujeres, 4 profesores y el director. ¿Cuál es la probabilidad de seleccionar al azar:

a. ¿A un hombre?

b. ¿A un integrante que no sea profesor

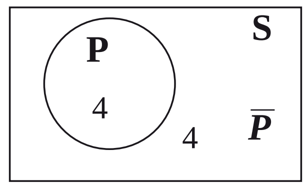
c. ¿A un integrante que no sea el director?

Solución



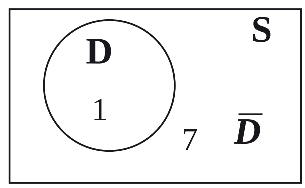
a. Seleccionar a un "*hombre*" es un suceso complementario de seleccionar a una *mujer*.

$$P(hombre) = P(\bar{M}) = 1 - P(M) = 1 - 5/8 = 3/8$$



b. Seleccionar a un "*no profesor*" es un suceso complementario de seleccionar a un *profesor.*

$$P(no\ profesor) = P(\bar{P}) = 1 - P(P) = 1 - 4/8 = 4/8 = 1/2$$



c. Seleccionar a un "*no director*" es un suceso complementario de seleccionar a un *director.*

$$P(no\ director) = P(\bar{P}) = 1 - P(P) = 1 - 1/8 = 7/8$$

Ejercicio 2

1. En un lote de 20 televisores hay 3 defectuosos.
   a. Si D representa el suceso "*se secciona un televisor defectuoso*", ¿qué representa $\bar{D}$?
   b. ¿Cuál es la probabilidad de seleccionar al azar un televisor *no defectuoso*?

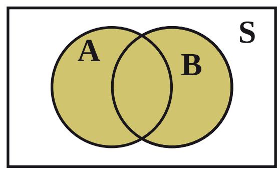
2. En un departamento de almacenes, existen 40 empleados: un supervisor, 6 almacenistas y 33 auxiliares. Determina la probabilidad de seleccionar al azar a un empleado que:
   a. No sea el supervisor.
   b. No sea almacenista
   c. No sea auxiliar.

3. Al extraer una carta de una baraja americana calcular:
   a. $P(no\ as)$
   b. $P(no\ diamante)$

Lección 2.4 Cálculo de probabilidades de sucesos compuestos. Uso de la regla de la adición de probabilidades.

Objetivos: Calcular probabilidades de sucesos compuestos usando la regla de la adición.
Entender, describir y determinar sucesos mutuamente excluyentes.

En esta lección, desarrollaremos una fórmula para calcular probabilidades del suceso *A* **o** *B* = $A \cup B$. Recuerda que este suceso es favorecido por la siguiente región sombreada:



Recuerda también que, el suceso *A* **o** *B* = $A \cup B$, *ocurre* si:

- Sucede A
- Sucede B
- Suceden ambos.

Entonces, A ***o*** B = $A \cup B$ se aplica cuando se pida la probabilidad de que ocurra:

- Al menos uno,
- Alguno de los dos.
- Cualesquiera.

Actividad 2.4 a

Qué hacer

Aplicando lo que ya conoces sobre sucesos compuestos, resuelve:

De los estudiantes de nuevo ingreso a la universidad el año pasado, el 12% reprobó inglés, 8% reprobó matemáticas y el 6% reprobó inglés y matemáticas. Se elige un alumno al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que haya reprobado inglés o matemáticas?

Las siguientes preguntas pueden servirte de ayuda.

- ♦ ¿En qué consiste el experimento?_
- ♦ ¿De qué sucesos se trata?_
- ♦ ¿Qué datos presenta el problema?_
- ♦ ¿Cuál es la incógnita?_

Tal y como lo estudiaste en la lección (2.2), este tipo de problemas, pueden resolverse con la ayuda de diagramas de Venn, aplicando el siguiente procedimiento:

1. Describe el experimento identificando los eventos involucrados y asígnales una letra mayúscula.
2. Identifica los datos y la incógnita.
3. Construye un diagrama de Venn (recuerda que si conocemos el valor correspondiente a la intersección ésta se localiza primero y posteriormente se completan las distintas regiones).
4. Identifica las regiones que favorecen al evento de interés y aplica la fórmula de la probabilidad clásica.

A continuación aplicaremos este procedimiento para resolver el problema planteado en la activisdad (2.4 a)

Primero: Describe el experimento, identificando los eventos involucrados. Este experimento consiste en elegir un alumno; hay dos eventos involucrados:

Reprobó inglés, reprobó matemáticas

Sea: M el evento: “reprobó matemáticas” e

I el evento: “reprobó inglés”

Segundo: Identifica los datos y la incógnita

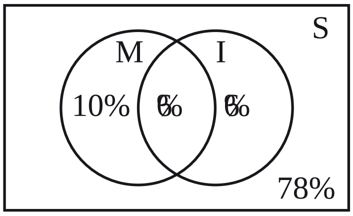
$P(M) = 16\%$

$P(I) = 12\%$

$P(M \cap I) = 6\%$

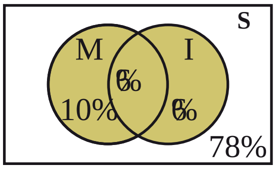
La incógnita es: $P(M \text{ o } I) = P(M \cup I)$

Tercero: Dibuja el diagrama de Venn



Cuarto: Evento de interés: $M \text{ o } I = M \cup I$

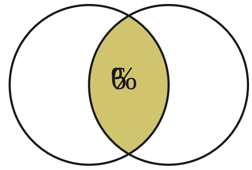
$P(M \text{ o } I) = P(M \cup I) = 10\% + 6\% + 6\% = 22\%$



Regla de la adición de probabilidades

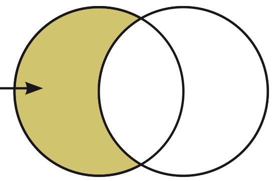
La manera de dibujar el diagrama de Venn en el último ejemplo, nos permitirá deducir una regla para la adición de probabilidades:

1.- Se localiza $P(A \cap B)$



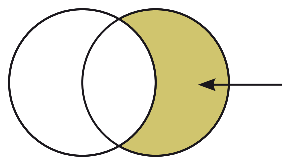
2.- Se localiza la parte izquierda de A evaluando: $P(A) - P(A \cap B)$

$P(A) - P(A \cap B)$



16% − 6% = 10%

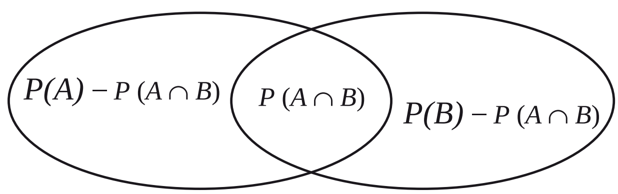
3.- Se localiza la parte derecha de B evaluando: $P(B) - P(A \cap B)$



$P(B) - P(A \cap B)$

12% − 6% = 6%

Resumiendo, estas regiones pueden marcarse del siguiente modo:



De aquí : $P(A \cup B) = P(A) - \cancel{P(A \cap B)} + \cancel{P(A \cap B)} + P(B) - P(A \cap B)$

$$\boxed{P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)}$$

Esta es la regla de la adición de probabilidades.

La fórmula de la adición de probabilidades, se aplica en los siguientes casos:

- Probabilidad de que suceda A o B.
- Probabilidad de que suceda al menos uno.
- Probabilidad de que suceda cualesquiera de ellos.

Debemos entender que estas tres expresiones se refieren a la misma situación matemática:

A o B equivale a $A \cup B$

La aplicación de la regla de adición, nos permite simplificar el procedimiento de cálculo.

Ejemplo La prob bilidad de qe el eqi po A g ne su primer jueg de b sq etbl es 1/2, y la probab lidad de qe g ne su segndo jueg es 1/3 ¿Cuál es la prob b lidad de qe g ne por lo menos uno de sus primeros dos juegos, si la prob b lidad de qe g ne ambs es 1/6?

Solución

Eventos involucrados:

A g na el primer jueg. S ea P este evento.
A g na el segndo j ueg. S ea S este evento.

Se pide: prob b lidad de qe g ne por lo menos uno de sus primeros dos juegs .

$$P\ (P\ o\ S) = P\ (P \cup S) = ?$$

Datos:

$$P\ (P) = \frac{1}{2}$$

$$P\ (S) = \frac{1}{3}$$

$$P\ (P\ y\ S) = \frac{1}{6}$$

Aplicando la fórmula de la adición:

$$P\ (P \cup S) = P\ (P) + P(S) - P\ (P \cap S)$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6}$$

$$= \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

Actividad 2.4 b

Resuelve:

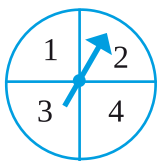
1. En una clase de 50 alumnos de primer añ, 0 estudiaron Word, 15 Ex el y 5 estudiaron ambs prog amas. ¿Cuántos alumnos de primer añ estudiaron alg prog ama de computación?

2. Los nuevos juegs de TV vídeo qe pueden ser adaptados al aparato televisor tienen sonido e imag n. Se h estimado que la prob b lidad de qe el sonido sea defectuoso es de 0.03 qe la prob b lidad de qe uno u otro salg n defectuosos (sonido o imag n) es de 0.04, pero la prob b lidad de qe ambs salg n defectuosos es de sólo 0.01. ¿Cuál es la prob b lidad de qe la imag n salg defectuosa?

Sucesos o eventos mutuamente excluyentes.

La regla de la adición sufre un cambio cuando tratamos con eventos mutuamente excluyentes. A continuación desarrollaremos este concepto.

Al afirmar que la probabilidad de un suceso compuesto es igual a la suma de las probabilidades de los resultados que lo componen, estamos usando el hecho de que, tales resultados, se excluyen mutuamente en el sentido de que *si ocurre uno, no ocurre ningún otro.*



Por ejemplo, al girar la flecha de la ruleta anexa, la probabilidad de *obtener un número par*, puede verse como la ocurrencia del suceso compuesto:

"Se detiene en 2 ó *se detiene en 4"*

Si llamamos *P* al suceso se obtiene un número par, *D* se detiene en 2 y *C* se detiene en 4, entonces:

P(se obtiene un par) = *P(P)* = *P(D* **ó** *C)* = *P(D* ∪ *C)*

Aplicando la regla de la adición:

$$P(P) = P(D) + P(C) - P(D \cap C)$$

P(se obtiene un par) = *P(P)* = *P(D* **ó** *C)* = *P(D* ∪ *C)*

Con lo que ya sabemos obtenemos: *P(D)* = 1/4, *P(C)* = 1/4. Pero, ¿cuánto vale *P(D∩C?* En otras palabras, ¿cuál es la probabilidad de que ocurran *D y C? o ¿Cuál es la probabilidad de obtener un dos y un cuatro simultáneamente?* Razonamos de la siguiente manera:

Si la flecha se detiene en 2, no puede detenerse al mismo tiempo en 4.

Entonces: $P(D \cap C) = 0$

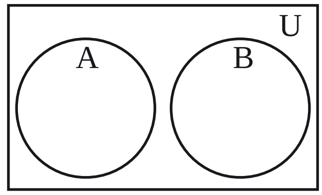
Sustituyendo en la fórmula de la adición:

$$\begin{aligned} P(P) &= P(D) + P(C) - P(D \cap C) \\ &= 1/4 + 1/4 + 0 \\ &= 2/4 \\ &= 1/2. \end{aligned}$$

Los sucesos D y C se llaman mutuamente excluyentes.

Sucesos o eventos mutuamente excluyentes, son aquellos definidos de tal manera que la ocurrencia de un suceso imposibilita la ocurrencia del otro suceso. Es decir, si sucede uno de ellos, el otro no puede ocurrir.

¿Cómo interpretar ésto en un diagrama de Venn?



$\boxed{\text{Si } A \cap B = \phi \text{ entonces A y B son mutuamente excluyentes.}}$

Si A y B son eventos mutuamente excluyentes, la fórmula de la adición se simplificará, porque:

$$P\,(A \cap B) = \frac{n(A \cap B)}{n(S)} = \frac{0}{\text{n}(S)} = 0$$

Por lo tanto:

$$\boxed{P(A \cup B) = P(A) + P(B)}$$

Fórmula de la adición para suceso mutuamente excluyentes.

En problemas prácticos, diremos que $A \cap B = \phi$ si concluimos que, si sucede A, no sucederá B. Nunca suceden A y B al mismo tiempo.

Ejemplo Se lanza un dado, ¿cuál es la probabilidad de que salgan 3 ó 5 puntos?

Solución

El evento de interés, es una composición de dos eventos:
salen 3 puntos o salen 5 puntos.

Sean: A: el evento "salen 3 puntos"
B: el evento "salen 5 puntos"

Se pide: $P(A \text{ o } B)$

$$P(A) = P\,(\text{sale un } 3) = \frac{1}{6}$$

$$P(B) = P\,(\text{sale un } 5) = \frac{1}{6}$$

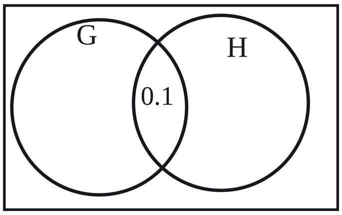
$$P(A \text{ o } B) = P\,(A) + P(B) - P\,(A \cap B)$$

¿$P\,(A \cap B) = 0$? Si salen 3 puntos, no pueden salir al mismo tiempo 5 puntos. A y B son mutuamente excluyentes.

Por lo tanto: $P(A \text{ o } B) = P(3 \text{ ó } 5) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

Ejercicio 24

1. *Si P(G)* = 0.5, *P(H)* = 0.4 y *P(G* y *H*) = 0.1:
   a. Completa el diagrama de Venn:



   b. Determina: $P(G \cap H)$.
   c. Determina: $P(G \cup H)$.
   d. ¿Son mutuamente excluyentes los sucesos G y H? Explique su respuesta.

2. Describe con tus propias palabras qué significa que dos sucesos sean mutuamente excluyentes.

3. De 120 estudiantes, 60 estudian idioma francés, 50 estudian ruso y 20 estudian ruso y francés. Si escoge un estudiante aleatoriamente, halla la probabilidad de que:
   a. Estudie francés y ruso
   b. Estudie francés o ruso

4. Entre los 200 empleados de un departamento hay 150 graduados, 60 del total consagran por lo menos parte de su tiempo a trabajos de estadística y 40 de los 150 graduados dedican por lo menos parte de su tiempo a trabajos de estadística. Si se toma al azar uno de estos empleados, ¿cuál es la probabilidad de que sea graduado o trabaje en estadística?

5. En cierta ciudad, el 40% de la población tiene el cabello castaño; el 20% tiene los ojos negros y el 5% tiene los ojos negros y el cabello castaño. Se escoge una persona al azar, halle la probabilidad de que: tenga el cabello castaño o los ojos negros

6. Al tirar un dado, calcule la probabilidad de que:
   a. Que salga el 1 ó el 3
   b. Que salga par o menor que 4.
   c. Que salga el 1 ó el 3

Lección 2.3

Cálculo de probabilidades de sucesos compuestos. La regla de la probabilidad condicional y regla de multiplicación.

Objetivos: Calcular probabilidades condicionadas.
Calcular probabilidades de sucesos compuestos usando la regla de la multiplicación.
Calcular probabilidades de sucesos compuestos usando la regla de la multiplicación para sucesos independientes.

En la lección (2.2), se introdujo el concepto de probabilidad condicional. También se utilizó el espacio muestral modificado para calcular algunas probabilidades condicionales. Ahora, estudiaremos una fórmula para calcular probabilidades condicionales. Esta regla, aparentemente no tiene ventaja sobre el método que utiliza espacios muestrales modificados, sin embargo, nos permite avanzar hacia otras cuestiones de interés como la regla de multiplicación, la cual estudiarás más adelante. Primero, debes recordar la notación de la probabilidad condicional. Para ello, realiza la siguiente actividad:

Actividad 2.5 a

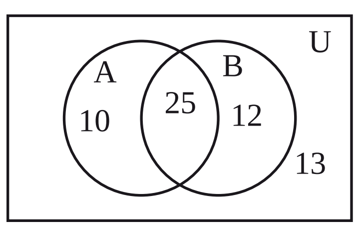
Qué hacer

a) Lee atentamente:

En un grupo de tercer año de preparatoria hay 60 estudiantes: 35 asisten regularmente, 37 están aprobados, 25 asisten regularmente y están aprobados.

b) Ahora, analiza el diagrama de Venn que corresponde a esta información:

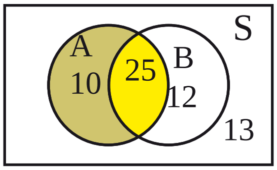
Sean: A: el suceso "*asiste regularmente*".
B: el suceso "*está aprobado*".



c) Lee las siguientes notaciones de probabilidades condicionadas y determina sus valores. Utiliza el concepto de espacio modificado.

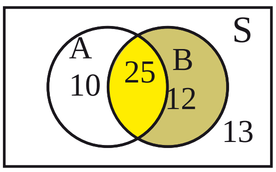
Actividad 2.5 a (Cont.)

1. *P(B/A)* Proba b lidad de qe esté aproba do, dado qe asista regl armente._

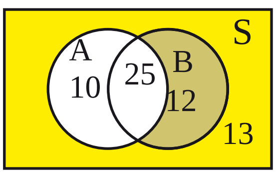


A: el suceso "*asiste regularmente*".
B: el suceso "*está ap obado* ".

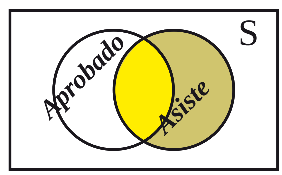
2. *P*(*A/B*) Proba b lidad de qe asista regl armente, dado qe está aproba do_



3 *P*(*B* / Ā) Probabilidad de que esté aprobado, dado que no asiste regularmente___



d) Los enunciados que se refieren a probabilidades condicionales, se pueden presentar de distintas maneras. Analiza los enunciados eqi valentes a la sigi ente proba b lidad condicional:



P(Ap obado/ asiste regularmente) = 71%

*S*e puede leer de las sigi entes maneras:

- Proba b lidad de qe esté aproba do, dado qe asiste regl armente es de 71%.
- De los qe asisten regl armente, el 71% está aprobado.
- Si asiste regl armente, hay 71% de proba b lidad de qe esté aproba do.
- La proba b lidad de qe uno cualqi era de los qe asisten regl armente, esté aproba do es de 71%.
- El 71% de los qe asisten regl armente, está aprobado.
- La proba b lidad de qe esté aproba do, uno cualqi era de los qe asisten reg - larmente es 71%.
- De aqe llos qe asisten regl armente, el 71% está aproba do.

e) Analiza detenidamente el sigi ente esqe ma y relaciónalo con cada uno de los enunciados anteriores.

P (*Ap obado* / *asiste regularmente*)

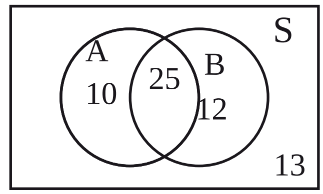
Consecuencia — Condición o universo reducido

Fórmula de la probabilidad conicional (o condicionada)

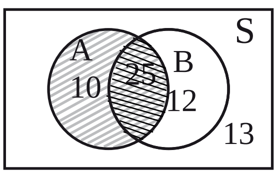
Utilizaremos el ejemplo de la actividad (2.5 a) para obtener la fórmula de la probabilidad condicional.

En un grupo de tercer año de preparatoria hay 60 estudiantes: 35 asisten regularmente, 37 están aprobados, 25 asisten regularmente y están aprobados. ¿Cuál es la probabilidad de que esté aprobado, dado que asiste regularmente?

Sean: A: el suceso "*asiste regularmente*".
B: el suceso "*está aprobado*".



Recordemos que, decir: "*esté aprobado dado que asiste regularmente, reduce el espacio muestral original de 60 estudiantes a 35 que son los que asisten regularmente*". De estos 35, 25 están aprobados.



La región rayada: es el pacio muestral reducido o modificado ($S_{modificado}$)

De esta región, la zona: favorece al suceso "*está aprobado*".

Entonces, la probabilidad de que esté aprobado, dado que asista regularmente, es:

$$P(B/A) = \frac{n(A \cap B)}{n(S_{modificado})} = \frac{25}{35} = \frac{5}{7}$$

La fórmula de la probabilidad condicional, se obtiene a partir de la expresión:

$P(B/A) = \dfrac{n(A \cap B)}{n(S_{modificado})}$ al realizar los siguientes pasos:

En primer lugar, observamos que: $n(S_{modificado}) = n(A)$

Por tanto, $$P(B/A) = \frac{n\,B \cap A)}{n(A)}$$

Dividiendo esta última expresión entre $n(S)$:

$$P(B/A) = \frac{n\,B \cap A)}{n(A)} = \frac{\dfrac{P(B \cap A)}{n(S)}}{\dfrac{n(A)}{n(S)}} = \frac{P(B \cap A)}{P(A)}$$

Ésta es la fórmula de la probabilidad condicional:

$$P\,(B\,/\,A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)}$$

De manera similar, si queremos encontrar *P(A/B)*, escribimos:

$$P\,(A\,/\,B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Estudia con mucha atención los siguientes ejemplos:

Ejemplos

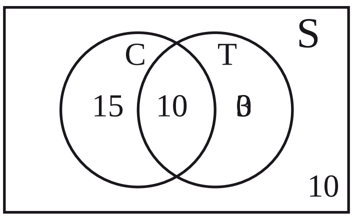
a) En una oficina hay 65 empleados, de los cuales 25 son casados y 40 están titulados; además, 10 son casados y están titulados. Si se selecciona un empleado al azar, ¿cuál es la probabilidad de que sea titulado uno cualquiera de los casados?

Solución

Para resolver el problema, debes identificar el universo o población, y sucesos involucrados.

Población: 65 empleados

Sucesos involucrados: Casados C: 25, por lo tanto, $n(C) = 25$
Titulados T: 40, por lo tanto, $n(T) = 40$
10 son casados y están titulados: C y T : 10
$n\,(C \cap T) = 10$



$$P\,(C) = \frac{25}{65} = \frac{5}{13}$$

$$P\,(T) = \frac{40}{65} = \frac{8}{13}$$

$$P\,(T \cap C) = \frac{10}{65} = \frac{2}{13}$$

Se pide:

P(titulado, uno cualquiera de los casados):

$$P\,(T\,/\,C) = \frac{P(T \cap C)}{P(C)} = \frac{2/13}{5/13} = \frac{2}{5}$$

Ejemplos
(Cont.)

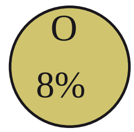
b) En una escuela, el 20% de los alumnos tiene vista defectuosa, el 8% tiene oído defectuoso y el 4% tiene vista y oído defectuoso. ¿Cuál es la probabilidad de que un niño tenga oído defectuoso si sabemos que tiene vista defectuosa?

Solución

...el 20% de los alumnos tiene vista defectuosa:

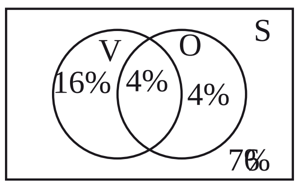
V: *vista defectuosa*

El 8% tiene oído defectuoso:



O: oído *defectuoso*

y el 4% tiene vista y oído defectuoso:



V y O : *vista y oído defectuoso*

Probabilidad de que un alumno tenga oído defectuoso, si sabemos que tiene vista defectuosa: $P(O / V)$

Aplicando la fórmula de la probabilidad condicional:

$$P\,(O / V) = \frac{P(O \cap V)}{P(V)} = \frac{4\%}{20\%} = \frac{1}{5}$$

Actividad 2.5 b

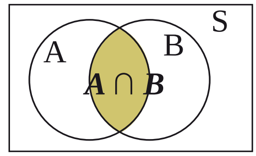
Utilizando los datos del ejemplo (b) anterior, determina:

1) La probabilidad de que un alumno tenga vista defectuosa, si sabemos que tiene oído defectuoso.
2) La probabilidad de que un alumno tenga oído defectuoso, si sabemos que no tiene vista defectuosa.
3) La probabilidad de que un alumno tenga vista defectuosa, si sabemos que no tiene oído defectuoso.

Regla de multiplicación de probabilidades

La ocurrencia conjunta de dos o más sucesos, se presenta con la ocurrencia simultánea de dichos sucesos.

A y *B* = *A*∩*B* significa que ocurren ambos sucesos simultáneamente.



> Observa que, mientras *A* representa a un suceso simple, *A*∩*B* es un suceso conjunto. Un suceso conjunto, compuesto por *A* y *B*, significa que tanto el suceso *A* como el *B* tienen que ocurrir en forma simultánea.
> La probabilidad *P(A)* se llama **probabilidad simple** y la probabilidad *P(A∩B)* se llama **probabilidad conjunta**

Estableceremos ahora, una regla para calcular *P (A ∩ B)*. Para ello, simplemente despejaremos *P (A ∩ B)* de la fórmula de la probabilidad condicional:

$$P(B/A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)}$$

$$P(A)P(B/A) = P(B \cap A)$$

Si consideramos que $B \cap A = A \cap B$, puede escribirse también:

$$P(A)P(B/A) = P(A \cap B)$$

Finalmente:

$$\boxed{P(A \cap B) = P(A)\, P(B / A)}$$

Ahora bien, si lo que conocemos es *P(A/B)*, debemos usar la forma:

$$\boxed{P(B \cap A) = P(B)\, P(A / B)}$$

Actividad 2.5 c

En cada caso, llena el espacio en blanco para completar la fórmula::

a) *P(O ∩ A) = P(O)*____

b) *P(B ∩ A) = P(A)* ____

c) *P(P ∩ Q) = P(P)*_____

d) *P(P∩ Q) = P(Q)*_____

Ejemplos

1. Una oficina tiene dos teléfonos A y B. La probabilidad de que el teléfono A esté ocupado es de 0.6 y la probabilidad de que el teléfono B lo esté es 0.50. Supon además que cuando el teléfono A está ocupado, la probabilidad de que el B también lo esté es 0.80. ¿Cuál es la probabilidad de que ambos teléfonos estén ocupados?

Solución

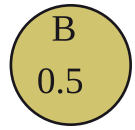
.....La probabilidad de que el teléfono A este ocupado es 0.6 ⟶ *P(A)* = 0.6

A
0.6

A: el teléfono *A* está ocupado.

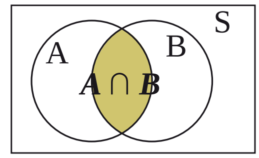
Ejemplos
(Cont.)

.....La probabilidad de que el teléfono B este ocupado es 0.5 ⟶ $P(B) = 0.5$



B: el teléfono *B* está ocupado.

....Cuando el teléfono A está ocupado, la probabilidad de que B también lo esté es 0.80. ⟶ $P(B/A) = 0.80$



Se pide: P (Ambos estén ocupados) = $P(A \cap B)$

$$P(A \cap B) = (0.6)(0.8) = 0.48$$

Por la regla de multiplicación: $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B/A)$

Sustituyendo: $P(A \cap B) = (0.6)(0.8) = 0.48$

2. Si llueve antes de una semana de haber sembrado, hay 0.95 de probabilidades de que una cierta clase de semilla de lechuga germine. Si hay una probabilidad de 0.70 de que llueva la semana próxima, ¿cuál es la probabilidad de que llueva y haya germinación?

Solución

Sucesos señalados: *Ll: "Llueve"*
G: "Germina"

Si llueve hay 0.95 de probabilidades de que germine. ⟶ $P(G/Ll) = 0.95$

....Probabilidad de que llueva es 0.70 ⟶ $P(Ll) = 0.70$

Se pide: "*probabilidad de que llueva y haya germinación*"

$$P(Ll \ y \ G) = P(Ll \cap G) = P(Ll)P(G/Ll)$$

Entonces: $P(Ll \cap G) = (0.7)(0.95) = 0.665.$

3 El 30 % de la población de un cierto país del tercer mundo tiene una deficiencia de vitamina D. De aquellas personas que tienen deficiencia de vitamina D, el 10% tiene síntomas de la enfermedad llamada raquitismo. ¿Cuál es la probabilidad de que una persona escogida al azar de la población tenga una deficiencia de vitamina D y tenga raquitismo?

Solución

Identifiquemos los eventos mencionados:
"Tiene deficiencia de vitamina D": *D*
"Tiene síntomas de raquitismo": *R*

.....El 30%...tiene deficiencias de vitamina D. ⟶ $P(D) = 0.3$

Ejemplos (Cont.)

.....De aquellas personas que tienen deficiencia de vitamina D, el 10% tiene ... raquitismo. ⟶ *P(raquitismo / deficiencias de vitamina D).*

$P(R / D) = 10\%$.

Se pide: "Probabilidad de que una persona escogida al azar de la población, tenga una deficiencia de vitamina D y tenga raquitismo"

En símbolos: $P(D \cap R) = P(D) \cdot P(R / D)$

Por lo tanto: $P(D \cap R) = P(D) \cdot P(R / D) = (0.3)(0.1) = 0.03 = 3\%$

Sucesos independientes

Analicemos la siguiente situación:

"Durante una prueba de duración de dos lotes de focos producidos por fábricas diferentes, se ha comprobado que la probabilidad de que un foco de la 1ra. fábrica dure 1000 horas encendido, es de 0.84. Asimismo, la probabilidad respectiva de un foco de la 2da. fábrica, es 0.78. Se quiere saber, ¿cuál es la probabilidad de que el foco de la 2da. fábrica dure encendido 1000 horas, si el foco de la 1ra. fábrica tuvo esa duración?".

Solución

Sean los siguientes sucesos:

A: "*El foco de la 1ra. fábrica dura 1000 horas*".
B: "*El foco de la 2da. fábrica dura 1000 horas*".

Entonces, evidentemente tenemos que:

$P(A) = 0.84$
$P(B) = 0.78$

Se nos pide determinar: $P(B/A)$. Es decir, necesitamos la probabilidad de que el foco tomado de la segunda fábrica dure 1000 horas, cuando esta misma duración la haya presentado un foco de la primera fábrica.

Ahora bien, es evidente que la probabilidad del evento B, no depende de la realización del evento A. Esto último lo concluimos por el hecho de que podemos proceder simultáneamente a las dos pruebas y de que los focos proceden de fábricas diferentes, fabricados por máquinas distintas.

Prácticamente, esto significa que la probabilidad de que un foco de la 2da. fábrica dure 1000 horas, no depende de la duración del foco tomado de la 1ra. fábrica. Concluimos que la probabilidad del resultado B no se modifica por el hecho de que añadamos a las condiciones generales, la condición de realización del evento A, esto significa que:

$$\boxed{P(B) = P(B / A)}$$

En tal caso, decimos simplemente que **el evento B es independiente del A**.

Resumiendo: Dos eventos son independientes si la ocurrencia o no ocurrencia de uno, no afecta la ocurrencia o no ocurrencia del otro.

La independencia de dos eventos A y B se expresa matemáticamente como:

$$\boxed{P(A / B) = P(A)}$$

Si B no depende de A, A no dependerá tampoco de B.

Si $P(B / A) = P(B)$ tendremos también que $P(A / B) = P(A)$.

Es decir, la independencia de los eventos, es una propiedad recíproca.

Para eventos independientes, la regla de multiplicación

$P(A \cap B) = P(A)\, P(B/A)$ se simplifica:

$$P(A \cap B) = P(A)\, P(B)$$

La regla de multiplicación para eventos independientes, admite sin dificultad la generalización en el caso de que se busque la probabilidad, no de dos, sino de tres, cuatro o más sucesos independientes entre sí.

Sean por ejemplo, tres sucesos A, B y C respectivamente independientes (es decir, que la probabilidad de cada uno de ellos sea independiente de la realización o no realización de los otros dos).

Siendo los sucesos A, B y C respectivamente independientes, de la regla:

$$P(A \cap B) = P(A)\, P(B)$$

se deduce que : $P(A \text{ y } B \text{ y } C) = P(A \text{ y } B)\, P(B)$

entonces: $P(A \text{ y } B \text{ y } C) = P(A)\, P(B)\, P(C)$

o bien: $\boxed{P(A \cap B \cap C) = P(A)\, P(B)\, P(C)}$

Ejemplo

Un estudiante que cursa matemáticas, español e inglés, estima que sus probabilidades de obtener 10 en estos cursos son 1/10, 3/10 y 7/10 respectivamente. Si supone que las calificaciones pueden ser consideradas como eventos independientes, ¿cuál es la probabilidad de obtener:

(a) 10 en todas

(b) ningún 10?

Solución

(a) M: “10 en matemáticas” $\rightarrow$ $P(M) = 1/10$

E: “10 en español” $\rightarrow$ $P(E) = 3/10$

I: “10 en inglés” $\rightarrow$ $P(I) = 7/10$

Se pide:

$$P(M \cap E \cap I) = P(M)\, P(E)\, P(I) = \left(\frac{1}{10}\right)\left(\frac{3}{10}\right)\left(\frac{7}{10}\right) = \frac{21}{1000} = 0.021$$

(b) Si M es el evento “10 en matemáticas”.

M' será el evento “no obtuvo 10 en matemáticas”.

Análogamente: E' es el evento “no obtuvo 10 en español”.

I' es el evento “no obtuvo 10 en inglés”.

No olvides que: $P(M \cap E \cap I)$ representa a $P(M$ y E e $I)$ e indica la probabilidad de que ocurran los tres sucesos simultáneamente.

Ejemplo

(Cont.)

El evento ningún 10 es $M' \cap E' \cap I'$

Para aplicar la regla de multiplicación aceptaremos lo siguiente: Si A y B son independientes, entonces las parejas:

A y B '
A' y B
A' y B '

también son independientes (¡piénsalo!)

Igualmente para tres eventos A, B y C independientes, se cumple que A', B' y C ' son independientes.

Por lo tanto: $P(M' \cap E' \cap I') = P(M')\,P(E')\,P(I')$

$$= \left(1-\frac{1}{10}\right)\left(1-\frac{3}{10}\right)\left(1-\frac{7}{10}\right)$$

$$= \left(\frac{9}{10}\right)\left(\frac{7}{10}\right)\left(\frac{3}{10}\right)$$

$$= 0.189$$

Actividad 2.5 d

Analiza detenidamente las siguientes observaciones acerca de las relaciones que existen entre sucesos mutuamente exluyentes y sucesos independientes:

1. La independencia y los sucesos mutuamente exluyentes son dos conceptos muy diferentes:
   a. El que dos sucesos sean mutuamente exluyentes significa que los dos sucesos no pueden ocurrir al mismo tiempo.
   b. El que dos sucesos sean independientes significa que la ocurrencia o no de un suceso, no afecta la probabilidad del otro.

2. Dos sucesos no pueden ser a la vez mutuamente exluyentes e independientes. En consecuencia:
   a. Si dos sucesos son independientes, entonces no son mutuamente exluyentes. Ésto puede deducirse del siguiente hecho: Si *A* y *B* son independientes, entonces $P(A \cap B) = P(A)P(B)$, y, debido a que $P(A)$ y $P(B)$ son diferentes de cero, $P(A \cap B)$ es diferente de cero.
   b. Si dos sucesos son mutuamente exluyentes, entonces no son independientes.

Ejercicio 32

1. En una escuela todos los alumnos están tomando clases de matemáticas e inglés. La probabilidad de que un alumno escogido al azar repruebe matemáticas es 0.15, la probabilidad de que repruebe inglés es 0.05 y la probabilidad de que repruebe ambas es 0.04.
   a) Si sabemos que un alumno está reprobado en inglés, ¿cuál es la probabilidad de que repruebe matemáticas?
   b) Si sabemos que un alumno está reprobado en matemáticas, ¿cuál es la probabilidad de que repruebe inglés?

2. Se lanza un dado al aire, ¿cuál es la probabilidad de obtener un 3 sabiendo que ha salido un número impar?

3 . El despertador de José no funciona muy bien, pues el 20% de las veces no suena. Cuando suena, José llega tarde a clase con una probabilidad de 0.2, pero si no suena, la probabilidad de que llegue tarde a clase es 0.9. ¿Cuál es la probabilidad de que haya sonado el despertador, si sabemos que José ha llegado tarde a clase?

4. Supongamos que de todas las personas que compran cierta computadora, 70% incluye un programa que le permite hacer gráficas estadísticas, 40% incluye un programa que le permite editar fórmulas matemáticas y 30% incluye ambos tipos de programas. Si se selecciona al azar un comprador, ¿cuál es la probabilidad de que haya comprado un programa para graficar dado que compró uno para editar fórmulas?

5. Cierto proceso de fabricación produce 4% de artículos defectuosos. Por experiencia se sabe que el 25% de los artículos defectuosos producidos se le pasan al inspector. Los artículos estándar nunca son rechazados por el inspector. ¿Cuál es la probabilidad de que si usted compra uno de esos artículos sea uno de los defectuosos?

6. Explica con tus propias palabras qué significa que dos sucesos sean independientes.

7. ¿Por qué las propiedades "mutuamente excluyentes" e "independientes" son muy distintas?

8. Si *P(A)* = 0.5 y *P(B)* = 0.3 y *A* y *B* son independientes, ¿cuál es la probabilidad de cada uno de los siguientes sucesos?
   a. $P(A \cap B)$ b. $P(B / A)$ c. $P(A / B)$.

9. Si P(A) = 0.4, P(B) = 0.3 y P(A∩B) = 0.15.
   a. P(A / B) =_ b. P(B / A) =_ c. ¿Son independientes A y B?

10. De una baraja normal se extrae una carta. Sean *A* el evento "*la carta es una figura*" (un jack, una reina o un rey), *B* la ocurrencia de una "*carta roja*" y C representa "*la carta es un corazón*". Determina si los siguientes pares de sucesos son independientes o dependientes:
    a. *A* y *B* b. *A* y *C*. c. *B* y *C*.

AUTOEVALUACIÓN(UNIDADI I)

Considera los siguientes conjuntos para responder los reactivos del 1 al 3

U = {a, b, c, d, e, f, g, h, i, j} C = {c, d, e, f} E = {g, h, i, j}
A = {a, b, c, d} D = {h, i, j}
B = {b, c, d, e}

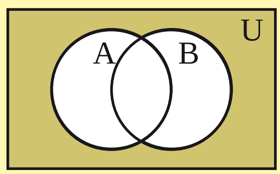
1. El conjunto {h, i, j} es:
   a. (A ∪ B)'
   b. (B ∪ C)'
   c. D ∩ E
   d. D ∪ E

2. El conjunto {a, b} es:
   a. A ∩ B'
   b. C ∩ A'
   c. A ∩ C'
   e. B ∩ C'

3 El conjunto A' ∩ C' es igual a:
   a. {g, h, i, j}
   b. {f, g, h, i, j}
   c. {g, h, i}
   d. {a, b, e, f}

4. Si M y N son mutuamente excluyentes, entonces:
   a. M ∪ N = M
   b. M ∪ N = M ∩ N
   c. M ∩ N = ϕ
   d. M ∪ N = U

5. ¿Qué operación representa el área sombreada?
   a. A ∩ B
   b. A ∪ B
   c. A' ∩ B
   d. A' ∩ B'



6 En una clase de 50 alumnos de primer año, 30 estudiaron Word, 15 Excel y 5 estudiaron ambos programas. Si se selecciona un alumno al azar, determina la probabilidad de elegir uno que:
   a. Estudió Word.
   b. No estudió Excel
   c. Estudió algún programa de computación.
   d. Estudió Word pero no Excel.
   e. No estudió ningún programa.
   f. Estudió Excel si se sabe que estudió Word.

7. Contesta correctamente:
   a. Sea el evento A: “llueve hoy”, con probabilidad conocida $P(A)$. La fórmula para calcular la probabilidad de que “no llueva hoy” es:_
   b. Sea el espacio muestral $S = \{1, 2, 3\}$. ¿Cuánto vale $P(1) + P(2) + P(3)$?_
   c. Sean los eventos A, B. La fórmula para calcular la probabilidad de que ocurran cualesquiera de ellos es:_
   d. La fórmula para calcular la probabilidad de que ocurra A dado que ocurrió B es:_

AUTOEVALUACIÓN (UNIDAD II) (Cont.)

8. Si $P(A) = 0.6$, $P(B/A) = 0.7$ y $P(B) = 0.6$, calcula:

   a) $P(B')$ b) $P(A \text{ o } B)$ c) $P(A/B)$ d) $P(A \text{ y } B)$

9. Se arroja un solo dado, la probabilidad de que salga un número mayor que 5 es:

   a) 2/3 b) 1/3 c) 1/6 d) 1/2

10. Se saca un solo naipe de la baraja americana. Calcula la probabilidad de que el naipe sea de color rojo?

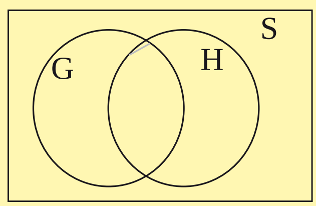
    a) 1/52 b) 4/52 c) 1/2 d) 1

11. Lanza un dado “honesto”. Sea A: “el dado muestra un número menor que 4” y B: “el dado muestra un número impar”. Calcula las probabilidades:

    a) P(A/B) b) P(B/A).

12. Si P(G) = 0.5, P(H) = 0.4 y P(G ∩ H) = 0.1,

    a. Distribuye correctamente estas cantidades en un diagrama de Venn.

    b. Encuentra P(G / H).

    c. Encuentra P(H / G).

    d. Encuentra P($\overline{H}$)

    e. Encuentra P(G o H).

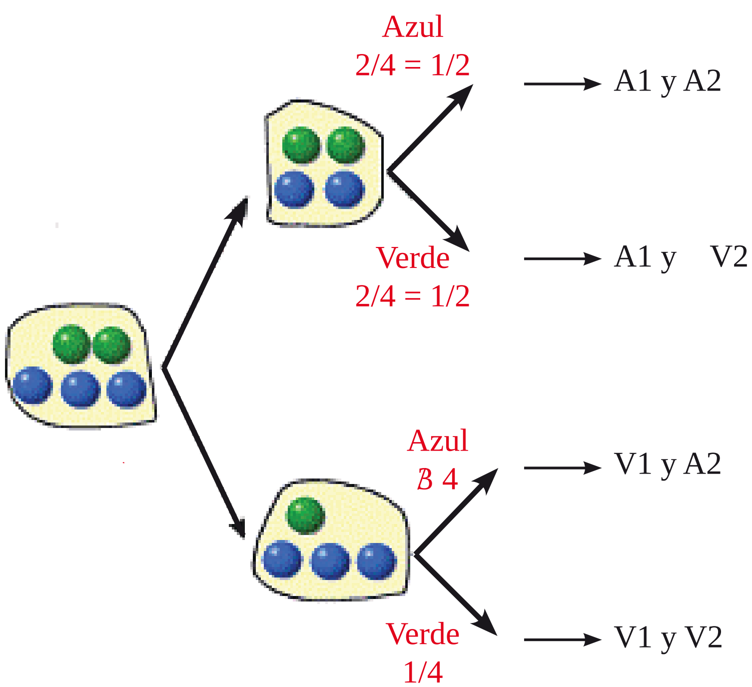
    f. Encuentra P(G o $\overline{H}$)

    g. ¿Son mutuamente excluyentes los sucesos G y H? Explica tu respuesta.

    h. ¿Son independientes los sucesos G y H? Explica tu respuesta.

13. A partir de algunos estudios estadísticos, se ha estimado que en cierta intervención quirúrgica, la probabilidad de que existan complicaciones con la anestesia es 0.02; la probabilidad de complicaciones durante la misma intervención es 0.03 y la probabilidad de complicaciones en el posoperatorio es 0.02. ¿Cuál es la probabilidad de que, en una intervención, no exista ninguna de estas complicaciones?

Probabilidad de Experimentos compuestos



3

UNIDAD

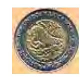
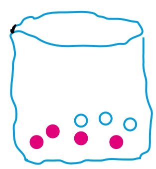
Lección 3

Cálculo de probabilidades de experimentos compuestos. Con mediante el diagrama de árbol y tabla de probabilidades (regla de multiplicación). Parte I: Experimentos repetidos a partir de un objeto generador.

Objetivos: Calcular probabilidades en experimentos compuestos con ayuda del diagrama de árbol y tabla de probabilidades. Experimentos repetidos a partir de un objeto generador.

En las lecciones precedentes, todos las situaciones correspondieron a ***experimentos simples***, es decir, experimentos que se realizan en una sóla etapa.

Por ejemplo:

- Lanzamiento de una moneda:  Un posible resultado: 
- Lanzamiento de un dado: Un posible resultado: 
- Extracción de un objeto:  Un posible resultado: ●

Sin embargo, por lo general, los problemas de probabilidad involucran dos o más etapas. Cada etapa puede considerarse como un experimento, pero cada resultado estará formado por una pareja, una triada, etcétera.

Por ejemplo, si se lanzan *dos* monedas, *un resultado* posible es: (a, s)

(a, s) o simplemente as → *Nos indica que cayó águila en el primer lanzamiento, y sello en el segundo.*

Si se lanzan tres dados *un resultado* posible es: (1, 3, 3)

(1, 3, 3) o simplemente 133 → *Nos indica que cayó uno en el primer lanzamiento, tres en el segundo y otro tres en el tercero.*

Atención: Lanzar una moneda dos veces, proporciona los mismos resultados que lanzar simultáneamente dos monedas. Sólo es necesario poder distinguir cada una de las monedas. De igual manera, podemos lanzar simultáneamente dos o más dados y distinguirlos mediante un color.

Trabajar con los resultados de un experimento compuesto, requiere de un entrenamiento especial, el cual empezarás con la siguiente actividad.

Actividad 31a

Qué hacer

Analiza cada una de las siguientes situaciones. Contesta lo indicado.

Ariana y Carlos juegan a lanzar dos monedas a la vez y van anotando los resultados. Ariana dice: *"si salen dos águilas, yo gano"*, mientras que Carlos dice: *"yo gano si sale una águila y un sello"*. Observa los resultados obtenidos en 50 lanzamientos.

Dos águilas	*aa*	~~////~~ ~~////~~ ///
Dos sellos	*ss*	~~////~~ ////
Una águila y un sello	*as*	~~////~~ ~~////~~ ~~////~~ ~~////~~ ~~////~~ ///

- ¿Cuántas veces ha ganado Ariana?_
- ¿Cuántas veces ha ganado Carlos?_
- ¿Cuántas veces no ha ganado ninguno? _

Ariana ha pedido la revancha y han vuelto a lanzar las monedas otras 50 veces. Estos son los resultados.

Dos águilas	*aa*	~~////~~ ~~////~~ //
Dos sellos	*ss*	~~////~~ ~~////~~ ////
Una águila y un sello	*as*	~~////~~ ~~////~~ ~~////~~ ~~////~~ ////

- ¿Cuántas veces ha ganado ahora cada uno?_
- ¿Y si juntas los resultados de las dos partidas?_ _
- ¿Qué es más fácil en el experimento anterior: obtener dos águilas u obtener una águila y un sello?_ _
- Únete a un compañero o compañera y repite el experimento de Ariana y Carlos. Comparen sus resultados con los de las tablas anteriores. ¿Crees que es una casualidad que haya ganado las dos partidas Carlos? ¿Por qué?_
_

A continuación aplicaremos nuestro conocimiento probabilístico para explicar lo sucedido en la actividad anterior. Antes, debes proporcionar una respuesta a la siguiente pregunta:

¿Cuál es el conjunto de todos los resultados posibles al lanzar dos monedas al aire?_

El diagrama de árbol

El diagrama de árbol, es una técnica de enumeración sistemática de cada uno de los resultados de un experimento compuesto. Por tanto, con la ayuda de esta herramienta, podemos determinar tanto el total de resultados posibles *n(S)* de un experimento, como el número de resultados favorables *n(A)* a cualquier suceso *A* de interés. De este modo podremos aplicar la fórmula de Laplace:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$$

El procedimiento a seguir, lo explicaremos a través de ejemplos.

Distinguiremos entre dos tipos de experimentos: experimentos que consisten en accionar "*un objeto generador*", y experimentos de *muestreo o selección de una población.*

Parte I. Experimentos a partir de un objeto generador.

Ejemplo 1

Al lanzar simultáneamente dos monedas (o una moneda dos veces en forma consecutiva), ¿es más fácil obtener una águila y un sello, o dos águilas?

Solución

Primer paso: Descripción del experimento

- El experimento consiste en el lanzamiento de dos monedas simultáneamente (o una moneda dos veces en forma consecutiva). Se trata de un *experimento compuesto* de *dos* experimentos simples, o de *dos* etapas.
- Hay un "*objeto generador": la moneda*, con dos opciones: *a* o *s*.
- Primer experimento o primer etapa: Lanzar la primera moneda.
- Opciones: $\{a, s\}$
- Segundo experimento o segunda etapa: Lanzar la segunda moneda. Opciones: $\{a, s\}$
- Algunos resultados: *as, aa, ss. ¿Son todos?*
- *Los resultados son de la forma:* $N_1 N_2$

N_1 puede tomar dos valores: (a o s) N_2 puede tomar dos valores: (a o s)

Las opciones del objeto generador, se escriben en columnas:

a

s

Segundo paso: Establecer el espacio muestral.

¡Haz un diagrama de árbol!

Analiza la forma de razonar para construir este diagrama de árbol:

En el primer lanzamiento, puede caer *a* o s.

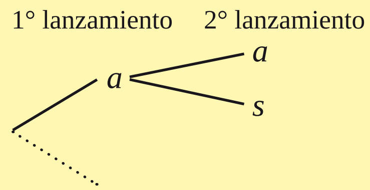
a

s

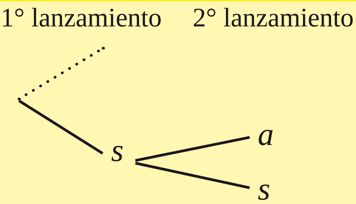
Ejemplo 1

(Cont.)

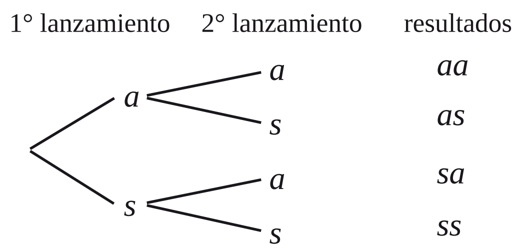
Si en el 1° cayó a, en el 2° puede caer a o s



Si en el 1° cayó s, en el 2° también puede caer a o s



El diagrama de árbol para el experimento de lanzar dos monedas es:



Cada resultado es una pareja o dupla que indica la ocurrencia simultánea o conjunta de dos sucesos.

aa equivale a $a \cap a$, y significa: “*cae a en el 1to. y cae a en el 2do.*

Observa que:

- 1er. lanz. tiene “2 opciones”
- 2do. lanz. tiene “2 opciones”
- $n(S) = 2 \times 2 = 4$

Entonces, el espacio muestral es:

$$S = \{aa, as, sa, ss\}$$

¿Resultados equiprobables?

Si la moneda es “honesta”, los resultados a y s en cada lanzamiento, son igualmente probables. Por lo tanto, los resultados son equiprobables.

Por lo tanto: $n(S) = 4$

Tercer paso. Resultados favorables y cálculo de probabilidades.

Sucesos de interés:

A: “*una águila y un sello*”.

B: “*dos águilas*”

$A = \{as, sa\} \longrightarrow n(A) = 2$

$B = \{aa\} \longrightarrow n(A) = 1$

Cuarto. Aplicar la regla de Laplace:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{1}{4}$$

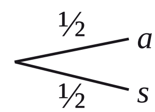
Así pues, a la larga, es más fácil obtener una águila y un sello, que dos águilas.

El árbol de probabilidades

Otra herramienta que nos ayuda a asignar probabilidades, es el árbol de probabilidades. Entenderemos por *árbol de probabilidades*, al diagrama de árbol que presenta las probabilidades correspondientes en cada una de sus ramas.

A continuación construiremos el árbol de probabilidades para el caso del lanzamiento de dos monedas.

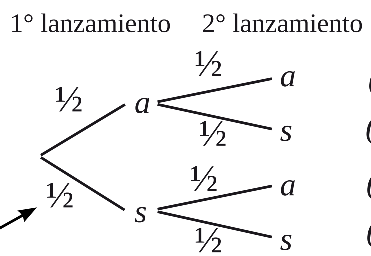
En el primer lanzamiento, la probabilidad de cada resultado posible es ½.



El resultado de la segunda moneda no depende de lo que salió en la primera, es decir ***los lanzamientos son independientes.*** Así observamos que:

- Los resultados del segundo lanzamiento serían los mismos, si no se hubiera llevado a cabo el primero.
- En consecuencia, los resultados del segundo experimento tienen la misma probabilidad, sin importar el resultado del primero. Es decir, la probabilidad de obtener águila en el segundo lanzamiento es un ½ y esto no depende del resultado del primero.

Entonces, el árbol de probabilidades para el lanzamiento de dos monedas es:



Probabilidad de cada resultados

$(\frac{1}{2})(\frac{1}{2}) = \frac{1}{4}$

$(\frac{1}{2})(\frac{1}{2}) = \frac{1}{4}$

$(\frac{1}{2})(\frac{1}{2}) = \frac{1}{4}$

$(\frac{1}{2})(\frac{1}{2}) = \frac{1}{4}$

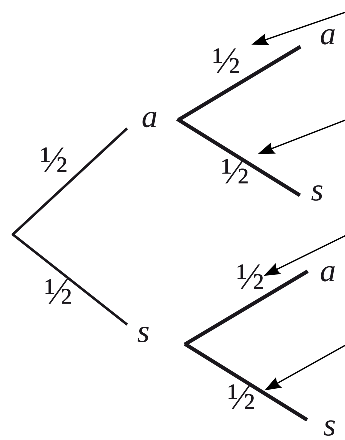
Otro razonamiento:

Puesto que la mitad de las veces obtenemos águila en el 1er lanzamiento y de esta mitad, la mitad de las veces obtenemos águila en el 2do., la probabilidad de obtener dos águilas es la mitad de un medio, esto es un cuarto.

Observa que en cada bifurcación, *la suma de las probabilidades, ha de ser 1*

También observa que todas las ramas tienen la misma probabilidad, es decir, éste es un árbol de probabilidades *equiprobable.*

Al construir un árbol de probabilidades debemos tener muy en cuenta la siguiente observación:



Aquí anotamos la probabilidad de obtener águila en el 2do. lanzamiento, dado que cayó águila en el 1ro: (*P(a en el 2do./ cayó a en el 1ro.*).

Aquí anotamos la probabilidad de obtener sello en el 2do. lanzamiento, dado que cayó águila en el 1ro: (*P(s en el 2do./ cayó a en el 1ro.*).

Aquí anotamos la probabilidad de obtener águila en el 2do. lanzamiento, dado que cayó sello en el 1ro: (*P(a en el 2do./ cayó s en el 1ro.*).

Aquí anotamos la probabilidad de obtener sello en el 2do. lanzamiento, dado que cayó sello en el 1ro: (*P(s en el 2do./ cayó s en el 1ro.*).

Sin embargo, debido a la independencia entre los dos lanzamientos, las probabilidades de las segundas ramas, se mantienen iguales a las primeras.

¿Cómo asignar probabilidades a sucesos, con la ayuda de un árbol de probabilidades? Aplicamos la regla del producto con base en la siguiente explicación:

- Cada resultado, es un suceso compuesto que consiste en la ocurrencia simultánea de los sucesos implicados. Por ejemplo, el resultado *aa*, es un suceso compuesto que nos indica:

Cayó a en el 1° **y** *a* en el 2°

Entonces: $P(aa) = P(a_{primero} \cap a_{segundo}) = P(a_{primero})\, P(a_{segundo} / a_{primero})$

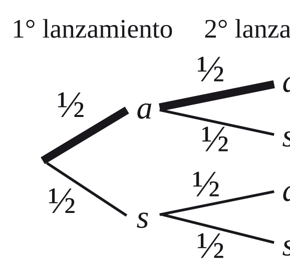
Sin embargo, <u>*puesto que hay independencia*</u> se cumple que:

$$P(aa) = \mathrm{P}(a_{primero} \cap a_{segundo}) = \mathrm{P}(a_{primero})\, P(a_{segundo})$$

Por costumbre escribimos: $\boxed{P(aa) = \mathrm{P}(a)\, P(a)}$

Para determinar la probabilidad de algún suceso, primero localizamos la trayectoria (o las trayectorias) que favorece al suceso y obtenemos su probabilidad, y, finalmente, cuado sea el caso, sumamos todas las probabilidades de las trayectorias favorables.

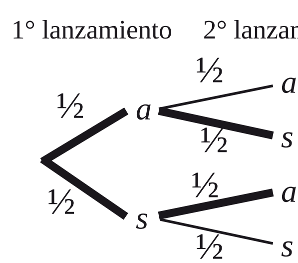
A continuación, se indican con segmentos gruesos la trayectoria que favorece al suceso *dos águilas.*



$P(aa) = (½)(½) = ¼$

P(*dos águilas*) = P(*aa*)= ¼

El suceso *una águila* y *un sello*, es favorecido por dos trayectorias:



$P(as) = (½)(½) = ¼$

$P(sa) = (½)(½) = ¼$

P(un águila y un sello) = *P*(*as*) + *P*(*as*)
= ¼ + ¼ = ½

Actividad 31 b

1. Contesta:
   a. En el experimento de lanzar dos monedas, ¿qué significa la notación *as*?
   b. En el experimento de lanzar dos monedas, ¿qué significa que el segundo lanzamiento sea independiente del primero?

2. Resuelve:

a. En un juego de "*disparejo*" se lanzan tres monedas al aire (o tres veces consecutivas una moneda); la persona *A* gana si caen cara distintas y *B* gana si caen caras iguales. ¿Quien tiene más posibilidades de ganar? Argumenta tu respuesta calculando probabilidades de dos maneras: mediante un diagrama de árbol y la regla de Laplace, y utilizando un árbol de probabilidades.

b Una familia desea tener cuatro hijos. Suponiendo que en cada nacimiento existe la misma probabilidad de tener niño o niña, ¿cuál es la probabilidad de tener 2 niños y dos niñas? Utilizando tu intuición, conjetura una respuesta y después verifícala calculando probabilidades

Ejemplo 2 Se lanza una moneda "honesta" cuatro veces en forma consecutiva. ¿Cuál es la probabilidad de obtener:

a) cuatro águilas
b) dos águilas y dos sellos
c) un águila
d) tres sellos consecutivos
e) tres águilas o tres sellos?

Solución

Primero. Descripción del experimento.

- Lanzamiento de una moneda cuatro veces en forma consecutiva.
- Es un experimento de cuatro etapas.
- Algunos resultados:

a a s s
s s a s
a a a s

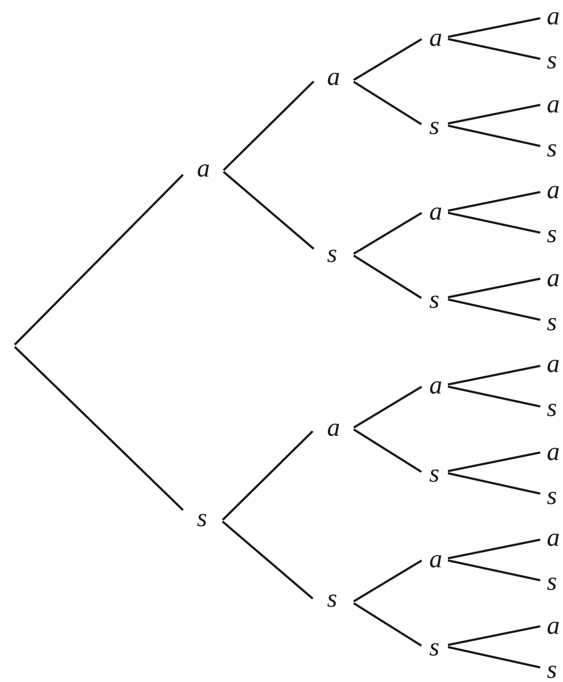
Son resultados de la forma: $N_1 N_2 N_3 N_4$

¿Cuántos serán en total?_

N_1 puede ser *a* o *s*.
N_2 puede ser *a* o *s*.
N_3 puede ser *a* o *s*.
N_4 puede ser *a* o *s*.

Segundo. Establece el espacio muestral. ¡Haz un diagrama!

Ejemplo 2
(Cont.)



Observa que :

- 1er. lanz. tiene "2 opciones"
- 2do. lanz. tiene "2 opciones"
- 3er. lanz. tiene "2 opciones"
- 4to. lanz. tiene "2 opciones"
- $n(S) = 2\times2\times2\times2 = 16$

S $=\{aaaa, aaas, aasa, aass, asaa, asas, assa, asss, saaa, saas, sasa, sass, ssaa, ssas, sssa, ssss\}$

¿Resultados equiprobables? Sí, puesto que se dice que la moneda es honesta.

Entonces. $n(S) = 16$

Tercero. Resultados favorables y cálculo de probabilidades.

a) Suceso: "**caen cuatro águilas**". Sea A_1 este suceso.

$$A_1 = \{ aaaa \} \longrightarrow n(A_1) = 1$$

Por lo tanto: $P(A_1) = \dfrac{n(A_1)}{n(S)} = \dfrac{1}{16}$

b) Suceso: "**Dos águilas y dos sellos**". Sea A_2 este suceso:

$$A_2 = \{aass, asas, assa, saas, sasa, ssaa\} \longrightarrow n(A_2) = 6$$

Por lo tanto: $P(A_2) = \dfrac{n(A_2)}{n(S)} = \dfrac{6}{16} = \dfrac{3}{8}$

c) Evento: "**un águila**".

$$A_3 = \{asss, sass, ssas, sssa\} \longrightarrow n(A_3) = 4$$

$$P(A_3) = \dfrac{n(A_3)}{n(S)} = \dfrac{4}{16} = \dfrac{1}{4}$$

Ejemplo 2
(Cont.)

d) Evento: "**tres sellos consecutivos**".

$$A_4 = \{asss,\ sssa\} \longrightarrow n(A_4) = 2$$

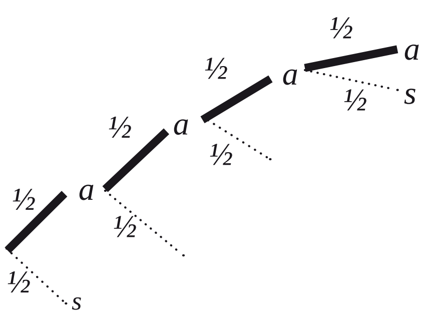
$$P(A_4) = \frac{n(A_4)}{n(S)} = \frac{2}{16} = \frac{1}{8}$$

e) Evento: "**tres águilas o tres sellos**"

$$A_5 = \{\underbrace{aaas,\ aasa,\ asaa,\ saaa}_{3\ \text{águilas}},\ \underbrace{asss,\ sass,\ ssas,\ sssa}_{3\ \text{sellos}}\} \longrightarrow n(A_5) = 8$$

$$P(A_5) = \frac{n(A_5)}{n(S)} = \frac{8}{16} = \frac{1}{2}$$

Observación. Cuando los resultados de cada etapa son equiprobables, el conteo de resultados es suficiente para calcular probabilidades según la fórmula de Laplace. Por tanto, en estos casos, no es necesario un árbol de probabilidades. Este árbol, simplemente nos ratificaría el conteo hecho. Por ejemplo, apliquemos la regla del producto para el suceso "*caen cuatro águilas*":



Puesto que cada lanzamiento es independiente del anterior, se cumple que:

$$P(aaaa) = P(a)\times P(a)\times P(a)\times P(a) =$$
$$= (½)(½)(½)(½) = 1/16$$

Actividad 31

Utiliza un árbol de probabilidades y la regla del producto, para verificar las probabilidades de los sucesos A_2, A_3, A_4 y A_5 descritos en el ejemplo 2.

Ejemplo 3 Se tiran dos dados y se registra el número de puntos que muestra cada uno. Determina la probabilidad de los siguientes sucesos:

a) A: “El primer dado muestra 2 puntos, y el segundo 3”.
b) B: “Los dados muestran el mismo número”.
c) C: “Aparece un número par en cada dado”.
d) D: “La suma de los dos números es mayor que 7”.

Solución

Primero. Descripción del experimento.

- Lanzamiento de dos dados. Se trata de un experimento compuesto de dos etapas. Hay un “*objeto generador: el dado*”, con seis opciones: 1, 2, 3, 4, 5, 6
- Primer experimento o primer etapa: Lanzar el primer dado. Opciones: $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
- Segundo experimento o segunda etapa: Lanzar el segundo dado. Opciones: $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

> Cada resultado es una *pareja o dupla que indica la ocurrencia simultánea o conjunta de dos sucesos*.
>
> ***11*** representa a $1 \cap 1$, *y* significa: “*cae 1 en el 1ro. y cae 1 en el 2do.*
>
> ***16*** representa a $1 \cap 6$, *y* significa: “*cae 1 en el 1ro. y cae 6 en el 2do.*

Algunos resultados:
11
16
6
56
3
46
. . .

¿Cuántos son?

Los resultados son de la forma: $N_1 N_2$

N_1 puede tomar 6 valores: 1, 2, 3, 4, 5 ó 6
N_2 puede tomar 6 valores: 1, 2, 3, 4, 5 ó 6

Segundo. Establece el espacio muestral. ¡Haz un diagrama!

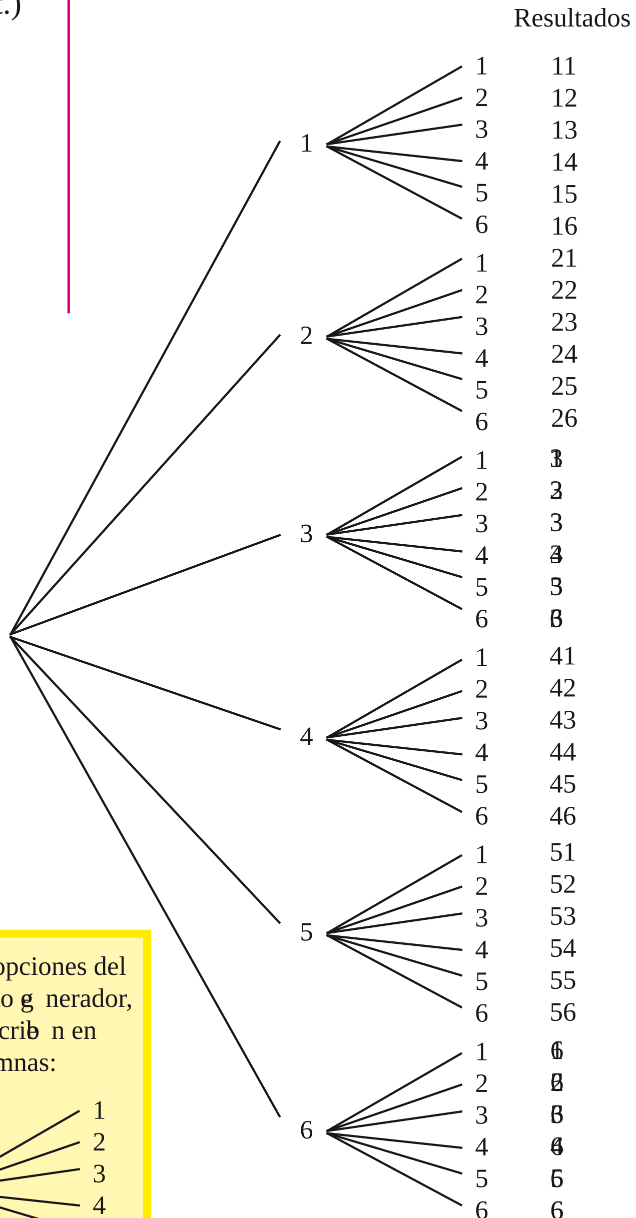
Antes de hacer el diagrama de árbol, considera la siguiente alternativa para enlistar todos los posibles resultados:

2do. lanzamiento →

1er. lanzamiento →

	⚀	⚁	⚂	⚃	⚄	⚅
⚀	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
⚁	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
⚂	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
⚃	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
⚄	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
⚅	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

Ejemplo 3
(Cont.)



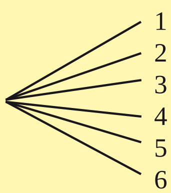
$$S = \left\{ \begin{matrix} (1,1) & (1,2) & (1,3) & (1,4) & (1,5) & (1,6) \\ (2,1) & (2,2) & (2,3) & (2,4) & (2,5) & (2,6) \\ (3,1) & (3,2) & (3,3) & (3,4) & (3,5) & (3,6) \\ (4,1) & (4,2) & (4,3) & (4,4) & (4,5) & (4,6) \\ (5,1) & (5,2) & (5,3) & (5,4) & (5,5) & (5,6) \\ (6,1) & (6,2) & (6,3) & (6,4) & (6,5) & (6,6) \end{matrix} \right\}$$

¿Resultados equiprobables?

Si el dado es “honesto”, en cada lanzamiento tendremos resultados equiprobables.

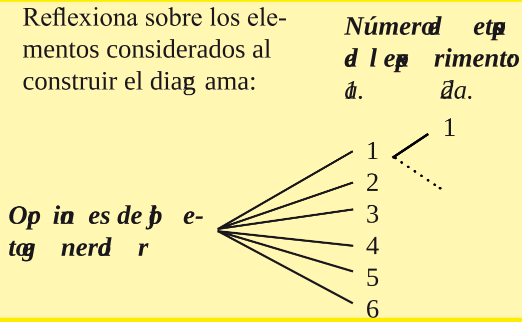
$n(S) = 6 \times 6 = 36$

Las opciones del objeto generador, se escriben en columnas:



Observa que:
- 1er. lanz. tiene “6 opciones”
- 2do. lanz. tiene “6 opciones”
- $n(S) = 6 \times 6 = 36$

Reflexiona sobre los elementos considerados al construir el diagrama:



Ejemplo 3
(Cont.)

Tercero. Resultados favorables y cálculo de probabilidades.

a) Suceso A: “El primer dado muestra 2 puntos, y el segundo 3”

$A = \{(2,3)\} \xrightarrow[\text{Obten}]{} A = \{23\} \longrightarrow n(A) = 1$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{1}{36}$$

b) Suceso B: “Los dados muestran el mismo número”.

$B = \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5), (6,6)\} \xrightarrow[\text{Obten}]{} B = \{11, 22, 33, 44, 55, 66\}$

$n(B) = 6$

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

c) Evento C: “**número par en cada dado**”

$C = \{(2,2), (2,4), (2,6), (4,2), (4,4), (4,6), (6,2), (6,4), (6,6)\}$

Obten

$C = \{22, 24, 26, 42, 44, 46, 62, 64, 66\}$

$n(C) = 9$

$$P(C) = \frac{n(C)}{n(S)} = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$$

$$P(B) = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$$

d) Evento D: “**suma mayor que 7**”

$D = \{26, 35, 36, 44, 45, 46, 53, 54, 55, 56, 62, 63, 64, 65, 66\}$

$n(D) = 15$

$$P(D) = \frac{n(D)}{n(S)} = \frac{15}{36}$$

Observa la región del arreglo rectangular de S que corresponde a una suma mayor que 7.

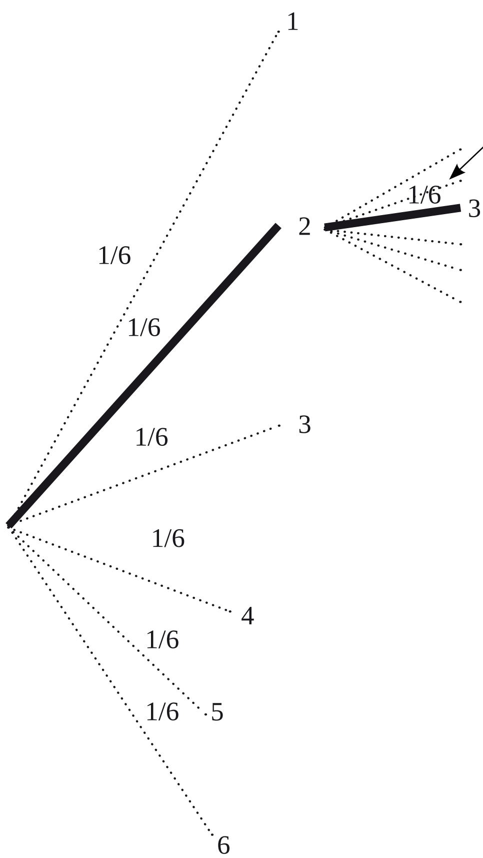
$$S = \left\{\begin{array}{cccccc} (1,1) & (1,2) & (1,3) & (1,4) & (1,5) & (1,6) \\ (2,1) & (2,2) & (2,3) & (2,4) & (2,5) & (2,6) \\ (3,1) & (3,2) & (3,3) & (3,4) & (3,5) & (3,6) \\ (4,1) & (4,2) & (4,3) & (4,4) & (4,5) & (4,6) \\ (5,1) & (5,2) & (5,3) & (5,4) & (5,5) & (5,6) \\ (6,1) & (6,2) & (6,3) & (6,4) & (6,5) & (6,6) \end{array}\right\}$$

Actividad 3.1 d

Determina las siguientes probabilidades. Utiliza el arreglo rectangular para localizar la región correspondiente. a los resultados favorables en cada caso.

a. P(*suma igual a* 7)
b. P(*suma menor o igual que* 6).
c. P(*suma mayor que 7 y menor que* 12)

Observación. Una vez más trabajamos con un espacio muestral equiprobable, por lo que no es necesario utilizar un árbol de probabilidades. Sin embargo, en muchos problemas deberás utilizar esta herramienta, por lo que, a manera de ejemplo, la aplicaremos para calcular la probabilidad de que al lanzar dos dados, aparezca un dos en el primero y un tres en el segundo.

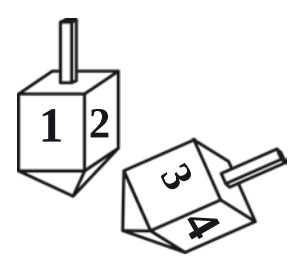


Aquí anotamos la probabilidad de obtener un 3 en el 2do. lanzamiento, dado que cayó un 2 en el 1ro: (*P(3 en el 2do. / cayó 2 en el 1ro.*), pero, debido a la independencia se cumple que:

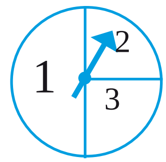
$$P(2\cap 3) = P(2)\times P(3 \text{ en el 2do.} / 2 \text{ en el 1ro.})$$
$$= P(2)\times P(3) = (1/6)(1/6) = 1/36$$

Actividad 3.1e

1. Convierte el diagrama de árbol del ejemplo 3 en un árbol de probabilidades. Utiliza el árbol de probabilidades y la regla del producto para calcular las probabilidades de los sucesos *B*, *C* y *D* de dicho ejemplo.
2. Una perinola tiene cuatro lados, marcados con 1, 2, 3 y 4. Cuando se hace girar, se detendrá con uno de los lados hacia arriba. Simula girar la perinola dos veces y registra los resultados en cada ocasión.
   a. Traza un diagrama de árbol e incluye todos los resultados posibles de este experimento.
   b. Calcula las probabilidades de los siguientes sucesos:
   A: "Se obtiene el número 43".
   B: "Las dos perinolas muestran el mismo número".
   C: "Aparece un número par en cada perinola".
   D: "La suma de los dos números es mayor que 6".
   E: "aparece un 1 y un 2".



Ejemplo 4 Un juego de una feria consiste en hacer girar dos veces la ruleta que se muestra a continuación.



Determina la probabilidad de los siguientes sucesos:

- A: "Se obtiene el número 12".
- B: "Se obtiene el mismo número cada vez".

Solución

Primero. Descripción del experimento.

- Giro de una ruleta dos veces. Se trata de un experimento compuesto de dos etapas. Hay un "*objeto generador: la ruleta*", con tres opciones: 1, 2 y 3
- Primer experimento o primera etapa:
  Girar la ruleta. Opciones: $\{1, 2, 3\}$.
- Segundo experimento o segunda etapa: Volver a girar la ruleta.
  Opciones: $\{1, 2, 3\}$.

Algunos resultados: 11
14
34
43
3
. . . ¿*Cuántos son*?

Los resultados son de la forma: $N_1 N_2$

N_1 puede tomar 3 valores: 1, 2, 3
N_2 puede tomar 3 valores: 1, 2, 3

Segundo. Establece el espacio muestral. ¡Haz un diagrama!

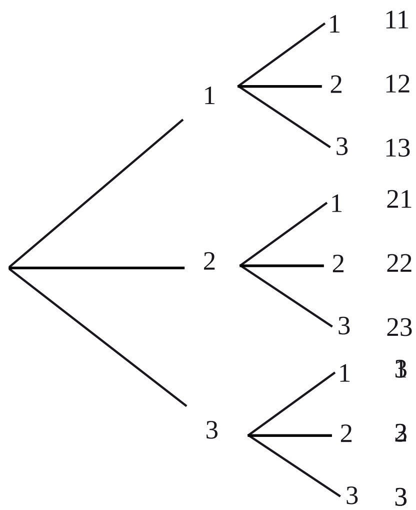
Antes de hacer el diagrama de árbol, considera la alternativa del arreglo rectangular para enlistar todos los posibles resultados:

2do. giro →

1er. giro →

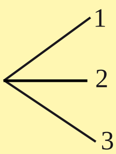
	1	2	3
1	(1,1)	(1,2)	(1,3)
2	(2,1)	(2,2)	(2,3)
3	(3,1)	(3,2)	(3,3)

Ejemplo 4
(Cont.)



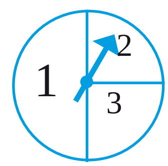
$$S = \left\{ \begin{matrix} (1,1) & (1,2) & (1,3) \\ (2,1) & (2,2) & (2,3) \\ (3,1) & (3,2) & (3,3) \end{matrix} \right\}$$

Las opciones del *objeto generador*, se escriben en columnas:



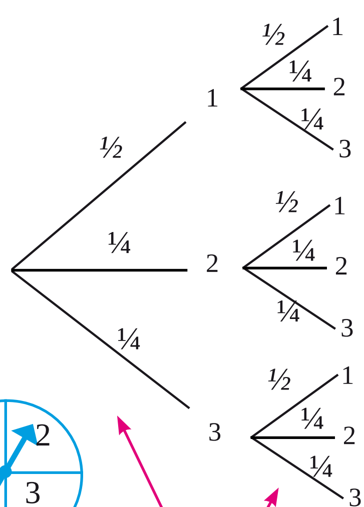
y en la parte superior el número de etapas del experimento.

¿Resultados equiprobables? ***¡NO!***
La zona marcada con el 1, tiene mayor área, es decir, tiene más posibilidades que las otras dos.



No podemos aplicar la regla de Laplace. Por tanto, debemos convertir el diagrama de árbol en un ***árbol de probabilidades.***

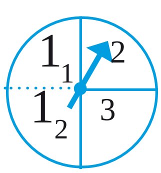
Debido a la independencia se cumple que:



11	$P(1 \cap 1) = P(1) \times P(1) = (1/2)(1/2) = 1/4$
12	$P(1 \cap 2) = P(1) \times P(2) = (1/2)(1/4) = 1/8$
13	$P(1 \cap 3) = P(1) \times P(3) = (1/2)(1/4) = 1/8$
21	$P(2 \cap 1) = P(2) \times P(1) = (1/4)(1/2) = 1/8$
22	$P(2 \cap 2) = P(2) \times P(2) = (1/4)(1/4) = 1/16$
23	$P(2 \cap 3) = P(2) \times P(3) = (1/4)(1/4) = 1/16$
31	$P(3 \cap 1) = P(3) \times P(1) = (1/4)(1/2) = 1/8$
32	$P(3 \cap 2) = P(3) \times P(2) = (1/4)(1/4) = 1/16$
33	$P(3 \cap 3) = P(3) \times P(3) = (1/4)(1/4) = 1/16$

¡Atención! En la solución del objetivo no podemos aplicar la regla de Laplace, pero ésta, si se utiliza para asignar probabilidades a cada rama del árbol. Recuerda que primero debemos dividir el todo (el área completa) en cuatro partes iguales. de tan manera que:

- *P*(1) = ½
- *P*(2) = ¼
- *P*(3) = ¼



Observa que en cada bifurcación la suma de probabilidades es 1.

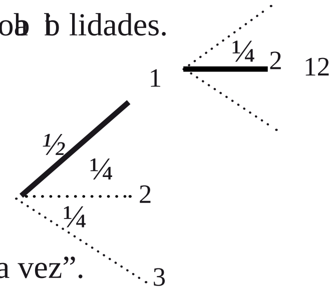
Ejemplo 4
(Cont.)

Tercero. Resultados favorables y cálculo de probabilidades.

a) Suceso A: "Se obtiene el número 12".

$$A=\{(1,2)\} \xrightarrow[\text{Obtén}]{} A=\{12\}$$

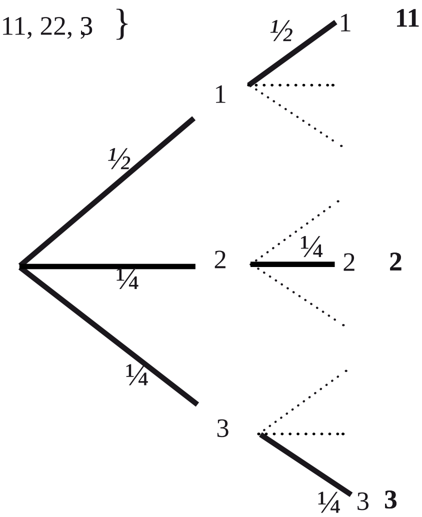
$$P(A)=P(1)\times P(2)=(\tfrac{1}{2})(\tfrac{1}{4})=\tfrac{1}{8}$$



b) Suceso B: "Se obtiene el mismo número cada vez".

$$B=\{(1,1),(2,2),(3,3)\} \xrightarrow[\text{Obtén}]{} B=\{11,22,33\}$$

$$P(B)=P(11)+P(22)+P(33)$$
$$=(\tfrac{1}{2})(\tfrac{1}{2})+(\tfrac{1}{4})(\tfrac{1}{4})+(\tfrac{1}{4})(\tfrac{1}{4})$$
$$=\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{16}+\tfrac{1}{16}$$
$$=\frac{4+1+1}{16}=\frac{6}{16}=\frac{3}{8}$$



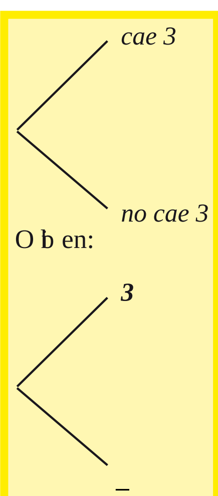
Actividad 31

Considera el experimento del ejemplo 4, para determinar las siguientes probabilidades.

a. P(*aparece un número par cada vez*)

b. P(*se obtiene una suma par*).

Experimentos dicotómicos



Definiremos *experimentos dicotómicos*, como aquellos cuyo suceso de interés *sólo tiene dos opciones*. Por ejemplo, el lanzamiento de una moneda y observar lo que muestra su cara hacia arriba, es dicotómico puesto que sólo tiene dos opciones: *águila* o *sello.*

Si utilizamos el concepto de *sucesos contrarios* o *complementarios*, podremos resolver una gran gama de problemas de probabilidad, a través de la técnica de los experimentos dicotómicos. Por ejemplo, el lanzamiento de un dado y observar los puntos que muestra su cara superior, no es dicotómico puesto que tiene seis opciones. Pero, si en este experimento estamos interesados en *observar si en la cara superior aparece un 3*, las posibles opciones pueden ser $\{$**cae 3, no cae 3**$\}$. Éste, sí es, un experimento dicotómico". A continuación estudiaremos algunos ejemplos.

Ejemplo 5 Se lanza un dado tres veces seguidas; determina la probabilidad de los siguientes sucesos:

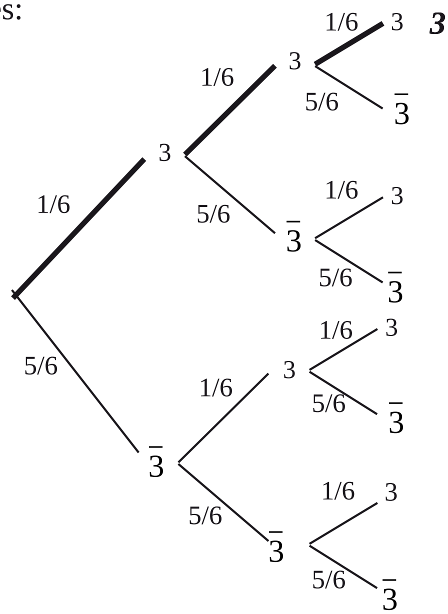
a) A: "Caen tres puntos en cada lanzamiento".

b) B : "Cae un número par en cada lanzamiento".

Solución

a) Son tres lanzamientos consecutivos.

Puesto que nos interesa el suceso "*cae 3*", podemos establecer que los resultados posibles en cada etapa son: $\{3, \overline{3}\}$ y el árbol de probabilidades es:



Resultado que favorece al suceso "*caen tres puntos* en cada lanzamiento".

3 equivale a $3 \cap 3 \cap 3$, *y* significa: "*cae 3 en el 1.º, cae 3 en el 2.º y cae 3 en el 3.º*".

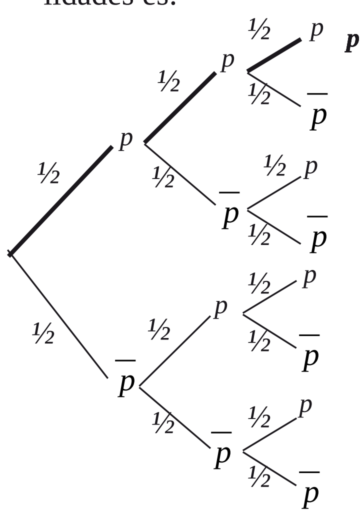
Recuerda que, al lanzar un dado, se cumple que:

- $P(3) = 1/6$
- $P(\overline{3}) = 5/6$

Entonces: $P(333) = P(3)\,P(3)\,P(3) = (1/6)(1/6)(1/6)(1/6) = 1/216$

b) Son tres lanzamientos consecutivos.

Puesto que nos interesa el suceso "*cae par*", podemos establecer que los resultados posibles en cada etapa son: $\{p, \overline{p}\}$ y el árbol de probabilidades es:



Resultado que favorece al suceso "*cae par* en cada lanzamiento".

p equivale a $p \cap p \cap p$, *y* significa: "*cae p en el 1.º, cae p en el 2.º y cae p en el 3.º*".

Entonces: $P(ppp) = P(p)\,P(p)\,P(p) =$
$= (½)(½)(½) = ⅛$.

Ejemplo 6 En el diagrama que se da a continuación aparece la hoja de respuestas a una prueba breve. Como puedes ver, la prueba consta de tres preguntas de opción múltiple.

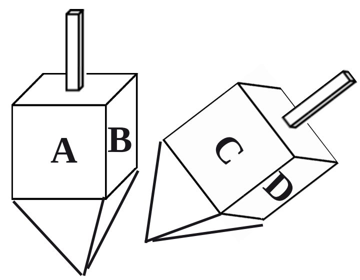
	A	B	C	D
1.	( )	( )	( )	( )
2.	( )	( )	( )	( )
3	( )	( )	( )	( )

a) ¿Cuál es la probabilidad de responder correctamente por adivinación a las tres preguntas? (cada pregunta sólo tiene una respuesta correcta).

b) ¿Cuál es la probabilidad de adivinar la respuesta correcta a exactamente dos preguntas?

Solución

Descripción del experimento. Si bien este experimento no es propiamente producido por un *objeto generador*, cae fácilmente dentro de ellos. Para ello, nos podemos imaginar una perinola con cuatro caras, en cada una de las cuales aparece una de las letras *A*, *B*, *C* y *D*. Para cada pregunta, una de estas caras estará marcada con la respuesta correcta.



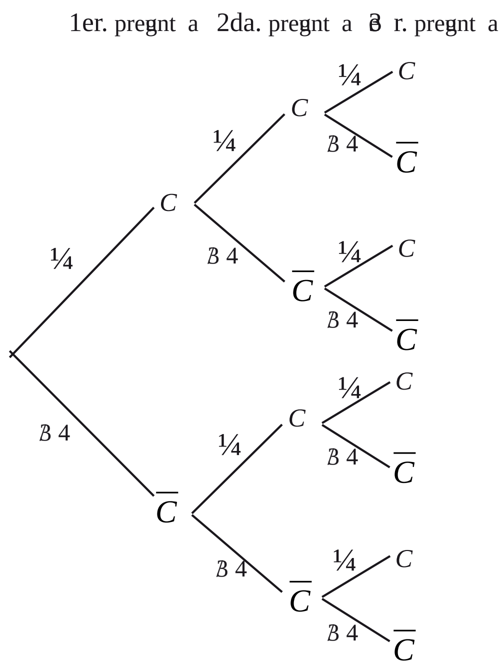
Puesto que se deben contestar tres preguntas, el experimento equivale a tres giros consecutivos. Además, puesto que nos interesa el suceso "*correcta*", podemos establecer que los resultados posibles en cada etapa son:
$\{C, \overline{C}\}$ y el árbol de probabilidades es:

C: indica respuesta correcta.

$\overline{C}$: indica respuesta incorrecta.

Puesto que cada pregunta tiene cuatro opciones, de la cual sólo una es correcta, la probabilidad de contestarla correctamente por adivinación, es ¼ y de contestarla incorrectamentes es 3/4.

A	B	C	D
( )	( )	( )	( )



Una vez más estamos ante un experimento que presenta independencia.

a) Responder correctamente a las tres preguntas es favorecido por CCC.

Entonces: $P(tres\ correctas) = P(CCC) = P(C)P(C)P(C) =$

$$= (1/4)(1/4)(1/4) = 1/64$$

b) Responder correctamente a dos preguntas exactamente es favorecido por: $CC\overline{C}$, $C\overline{C}C$ y $\overline{C}CC$.

Entonces:

$$P(dos\ correctas) = P(CC\overline{C}) + P(C\overline{C}C) + P(\overline{C}CC) =$$

$$= P(C)P(C)P(\overline{C}) + P(C)P(\overline{C})P(C) + P(\overline{C})P(C)P(C)$$

$$= (1/4)(1/4)(3/4) + (1/4)(3/4)(1/4) + (3/4)(1/4)(1/4)$$

$$= \frac{3}{64} + \frac{3}{64} + \frac{3}{64} = \frac{9}{64}$$

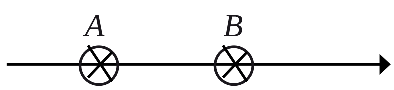
Actividad 31

1. Considera el experimento del ejemplo 5, para determinar las siguientes probabilidades.
   a. P(*caen tres unos*)
   b. P(*caen dos seises*).

2. Considera el experimento del ejemplo 6, para determinar las siguientes probabilidades.
   a. P(*al menos dos correctas*)
   b. P(*ninguna correcta*).

Ejemplo 7

La siguiente figura muestra un circuito en serie formado por dos lámparas. Para que haya paso de corriente en el circuito deben funcionar correctamente tanto *A* como *B* por lo que si falla una, o las dos, el circuito es defectuoso.



Supongamos que el 10% de las lámparas utilizadas en este circuito son defectuosas. ¿Cuál es la probabilidad de que el circuito funcione correctamente?

Solución

a) Se trata de verificar dos lámparas, por lo que es un experimento de dos etapas. Puesto que nos interesa el funcionamiento de cada una de ellas, podemos definir los siguientes sucesos:

A: "*la lámpara A es buena*".
$\overline{A}$: "*la lámpara A es defectuosa*".
B: "*la lámpara B es buena*".
$\overline{B}$: "*la lámpara B es defectuosa*.

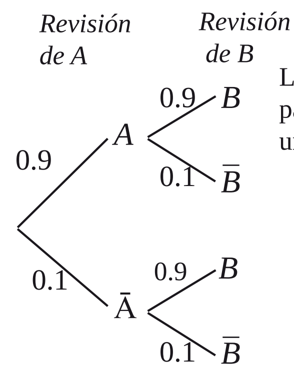
Ejemplo 7
(Cont.)

En la primera etapa los posibles resultados son: $\{A, \bar{A}\}$
En la segunda etapa los posibles resultados son: $\{B, \bar{B}\}$
Puesto que ya sabemos que $P(\bar{A}) = 0.1$ y $P(\bar{B}) = 0.1$, tenemos que:

> El enunciado dice que *el 10% de las lámparas son defectuosas*. Es decir:
> $P(\bar{A}) = 10\% = 0.1$
> $P(\bar{B}) = 10\% = 0.1$

$$
\begin{aligned}
P(A) &= 1 - P(\bar{A}) \\
&= 1 - 0.1 = 0.9 \\
P(B) &= 1 - P(\bar{B}) \\
&= 1 - 0.1 = 0.9
\end{aligned}
$$

Y el árbol de probabilidades es:



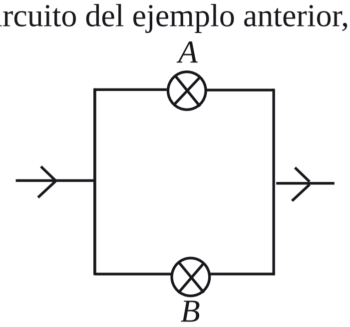
La revisión de las lámparas es independiente una de otra.

Para que el circuito funcione correctamente, deben funcionar las dos lámparas.
Entonces, el resultado favorable al suceso "*el circuito funciona bien*" es: *AB*.

Por lo tanto, $P(\textit{el circuito funcione bien}) = P(AB)$
$= (0.9)(0.9) = 0.81$

Actividad 3.1 g

Ahora, considera el circuito del ejemplo anterior, en paralelo.

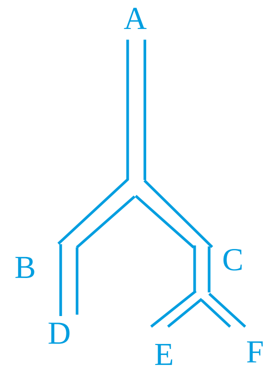


Para que el circuito funcione correctamente, basta que funcione *A* o que funcione *B*, esto es, que al menos una lámpara sea buena.

A. ¿Cuál es la probabilidad de que este circuito funcione?
B. ¿Es este circuito más o menos fiable que el anterior? Argumenta.

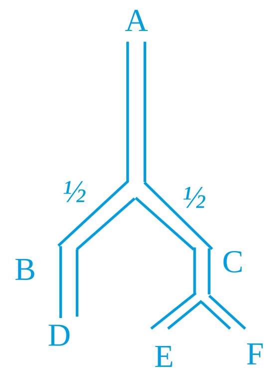
Ejemplo 8

La figura anexa, muestra un canal con bifurcaciones. Si se deja caer una bola por la abertura *A*, ésta puede deslizarse hasta caer en *B* o bien seguir por la derecha hasta ir a *C*. Determina la probabilidad de que la bola salga por *D*, *E* y por *F*.



Solución

De manera natural, la figura es un diagrama de árbol, y, para asignar probabilidades, razonamos de la siguiente manera:



- Al soltar la bola en *A*, tiene igual probabilidad de ir por *B* y por *C*.

  $P(B) = ½$ y $P(C) = ½$

- Todas las bolas que pasan por *B* caen en *D*. Por lo tanto,

  $P(D) = P(B) = ½$

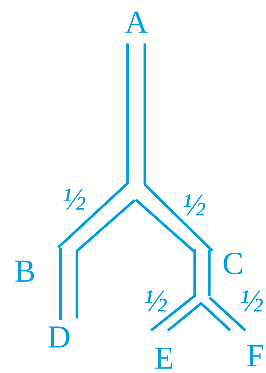
- Las bolas que pasan por *C* tienen igual probabilidad de ir hacia *E* que hacia *F*.

  Aplicando la regla de multiplicación obtenemos:

  $P(E) = ½ \times ½ = ¼$

  $P(F) = ½ \times ½ = ¼$

  Calcula. $P(D) + P(E) + P(F) =$ _



Otro razonamiento: La probabilidad de ir a *E* es, la mitad de la probabilidad de llegar a *C*. Entonces:

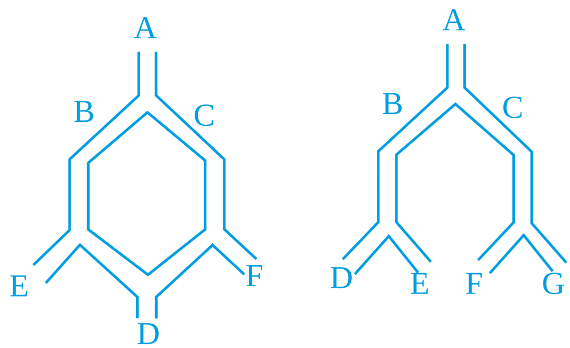
$P(E) = ½ \times ½ = ¼$

Asimismo, La probabilidad de ir a F es, la mitad de la probabilidad de llegar a C:

$P(F) = ½ \times ½ = ¼$

Actividad 31 h

Imagina que las siguientes figuras representan a dos máquinas de juego. Se gana un premio si una bola que se suelta en A cae en D.

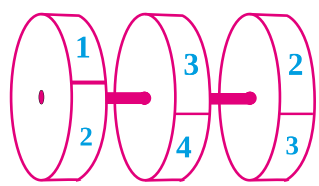


a. ¿En qué máquina jugarías?_

b. Para argumentar tu respuesta a la pregunta anterior, calcula la probabilidad de que la bola caiga en *D* en cada caso.

Ejercicio 3

1. Un juego para niños consiste en formar números pequeños haciendo girar tres ruedas, cada una con los dígitos del 1 al 4.



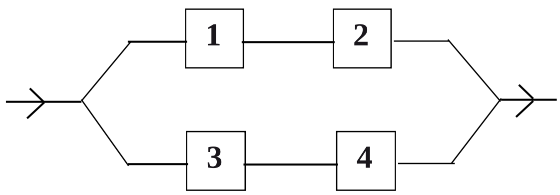
a) Utiliza un diagrama de árbol para mostrar el total de números que se pueden formar.
b) Determina la probabilidad de obtener al menos un 4.
c) Determina la probabilidad de obtener dos 3

2. Los miembros de un club de computadoras utilizan dos letras seguidas de tres números para formar códigos de identificación. Ellos usan las letras C e I y los números 2, 3 y 4. Permiten la repetición de letras, pero no de números. Por ejemplo CI-234, CCC-324. ¿Cuántos miembros puede haber antes de que tengan que cambiar su método de construir códigos?

3. Una prueba de "verdadero-falso" consta de cinco preguntas. Un estudiante marca al azar su respuesta. Calcula la probabilidad de obtener:
a) tres aciertos y dos errores.
b) al menos cuatro aciertos.

Ejercicio 3 (Cont.)

4. Un sistema consta de cuatro componentes, como se ilustra en la figura.



Todo el sistema funcionará si el subsistema 1-2 funciona o si el subsistema 3-4 funciona (porque los dos subsistemas están conectados en paralelo). Como los dos componentes de cada subsistema están conectados en serie, un subsistema funcionará sólo si ambos componentes de cada subsistema funcionan. Si los componentes funcionan o fallan de modo independiente uno de otro y si cada uno funciona con probabilidad 0.85, ¿cuál es la probabilidad de que todo el sistema funcione (coeficiente de confiabilidad del sistema)?

5. Si un jugador de básquetbol sabe por experiencia que anotará, aproximadamente 75% de los tiros libres que lance a la canasta, calcula la probabilidad de que en una serie de cuatro tiros enceste al menos dos.

6. Se lanzan dos dados, ¿cuál es la probabilidad de que las caras superiores:
   a) sumen seis?
   b) su producto sea sies?
   c) el valor absoluto de la diferencia sea uno?

6. Supongo que se lanza un dado ordinario cinco veces. determina la probabilidad de que exactamente en tres de esos cinco lanzamientos salga el seis.

7. Si la probabilidad de que un bebé que va a nacer sea varón es de 1/2, calcula la probabilidad de que los cinco hijos de un matrimonio sean dos varones y tres mujeres.

Lección 32

Cálculo de probabilidades en experimentos compuestos. Conteo mediante el diagrama de árbol y tablas de probabilidad (regla de la multiplicación). Parte I: Experimentos de muestreo

Objetivo: Calcular probabilidades en experimentos compuestos con ayuda del diagrama de árbol y árbol de probabilidades. Experimentos de muestreo.

Estamos ahora interesados en problemas de muestreo. Recordemos que los problemas de muestreo consisten en seleccionar varios componentes de una población y analizar alguna cualidad en tales componentes. Dentro de estos problemas, de interés específico resultan los experimentos relacionados con extracciones aleatorias de bolas de una urna, personas de una población, etcétera.

En estos experimentos a diferencia de los anteriores, no existe un objeto generador de resultados, por lo que debemos precisar la población de interés y el tamaño de la muestra (por ejemplo una muestra de tamaño dos está formada por dos elementos y en general una muestra de tamaño *n* es aquella para la que se han seleccionado *n* elementos de la población)

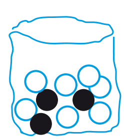
Actividad 32 a

Qué hacer

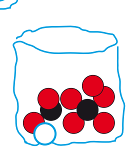
Analiza la situación planteada a continuación, y con base en tu intuición toma una decisión, y una vez estudiada esta lección, argumenta tu respuesta mediante valores de probabilidades.

Un juego consiste en dos bolsas, cada una con 10 bolas entre blancas (B), negras (N) y rojas.

Bolsa 1: 7 blancas y 3 negras



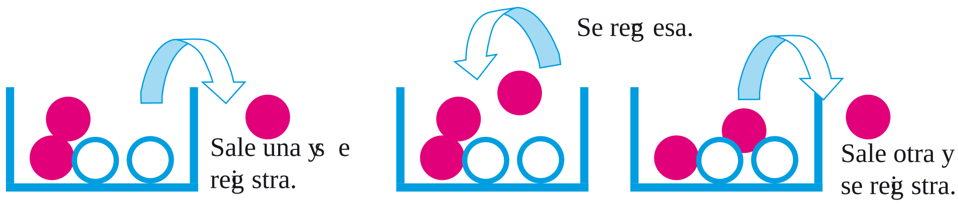
Bolsa 2: 1 blanca, 2 negras y 7 rojas.



Tiramos un dado. Si sale 1 ó 2, extraemos una bola de la bolsa 1. Si sale 3, 4, 5 ó 6 extraemos una bola de la bolsa 2. Si sale bola roja ganamos el juego. ¿Qué es más fácil, ganar o perder?

Dos tipos de muestreo:

Muestreo con reemplazamiento. En este muestreo cada elemento seleccionado se regresa a la población antes de elegir al siguiente elemento.



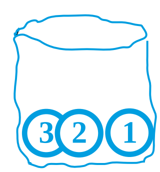
Muestreo sin reemplazamiento. En este caso, los elementos seleccionados no se regresan a la población.

En los siguientes ejemplos estudiarás problemas de probabilidad de experimentos de muestreo.

Parte II: Experimentos de muestreo

Ejemplo 1 Una bolsa contiene tres bolas numeradas del 1 al 3. Se extraen con los ojos cerrados, sucesivamente y sin reemplazamiento dos bolas, y se observa el número que muestran. ¿Cuál es la probabilidad de obtener:

a) Los números 1, 2 en ese orden.
b) Los números 1, 2 en cualquier orden.
c) Una suma de puntos mayor que 3



Solución

Primero. Descripción del experimento.

- Extracción sin reemplazo y de manera sucesiva de dos bolas de una bolsa. Se trata de un experimento compuesto de dos etapas. Hay una población que llamaremos ***población de interés*** la cual está formada por los elementos: $\{1, 2, 3\}$.
- Primer experimento o primer etapa: Se extrae una bola y ***se registra su número***. Opciones: $\{1, 2, 3\}$.
- Segundo experimento o segunda etapa: Sin regresar la bola seleccionada, se extrae otra bola y se registra su número. Opciones: $\{1,2\ 3\}$ ***con excepción de la que ya se extrajo en la primera elección***.

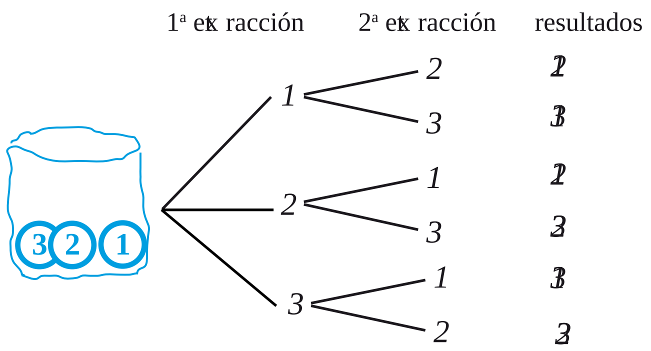
Ejemplo 1
(Cont.)

Algunos resultados: 12
13
23
. . . ¿*Cuántos son*?

Los resultados son de la forma: $N_1\, N_2$

N_1 puede tomar 3 valores: 1, 2, 3
N_2 puede tomar 2 valores: 1, 2, 3 con excepción del seleccionado en la 1ª extracción.

Segundo. Establece el espacio muestral. ¡Haz un diagrama!



Cada resultado es una *pareja o dupla.*

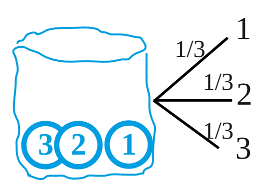
12 equivale a *1∩2, y* significa: "*se selecciona 1 en la 1a. y se selecciona 2 en la 2a dado que en la 1a. se seleccionó 1*"

Entonces, el espacio muestral es: $S = \{12, 13, 21, 23, 31, 32\}$

Tercero. Resultados favorables y cálculo de probabilidades.

¿El espacio muestral $S = \{12, 13, 21, 23, 31, 32\}$ es equiprobable?
Analiza la composición de la bolsa. Cada número tiene la misma probabilidad de ser seleccionado.

Por tanto, el espacio muetral es equiprobable.
Entonces, podemos usar la regla de Laplace.
Con $n(S) = 6$



a) Suceso A: Obtener "*Los números 1,2 en ese orden*".

A = {12} ⟶ $n(A) = 1$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{1}{6}$$

b) Suceso B: Obtener "*Los números 1,2 en cualquier orden*".

A = {12, 21} ⟶ $n(A) = 2$

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

Ejemplo 1
(Cont.)

c) Suceso C: Ob ener "*Una suma de pnt os mayor qe 3*".

$$C = \{3333 \qquad\qquad \} \longrightarrow n(A) = 4$$

$$P(C) = \frac{n(C)}{n(S)} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

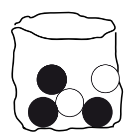
Actividad 32 b

1. Resuelve el ejemplo 1, considerando qe eix ste reemplazamiento.

Ejemplo 2

De una bl sa qe contiene 3 canicas neg as y 2 b ancas, se ex raen con los ojos cerrados, sucesivamente y con reemplazamiento tres canicas, y se ob erva el color. Determina la prob b lidad de ob ener:

a) Las tres del mismo color.
b) Las tres negras.
c) Ex ctamente dos neg as.



Solución

Primero. Descripción del exp e rimento.

- Extracción con reemplazo y de manera sucesiva de tres canicas de una bl sa. Se trata de un exp e rimento compuesto de tres etapas. Hay una ***p -b a ió interés*** la cual está formada por los elementos: {●●●○○}
- Primer experimento o primer etapa: Se extrae una canica y ***se reg stra su cb o*** . Opciones: {*negra, b anca*}.
- Segundo experimento o segunda etapa: Se regresa la canica seleccionada, se ex rae otra canica y s e reg stra su color. Opciones: {*negra, b anca* }.
- Tercer experimento o tercera etapa: Se regresa la canica seleccionada, se ex rae otra canica y s e reg stra su color. Opciones: {*negra, b anca*}.

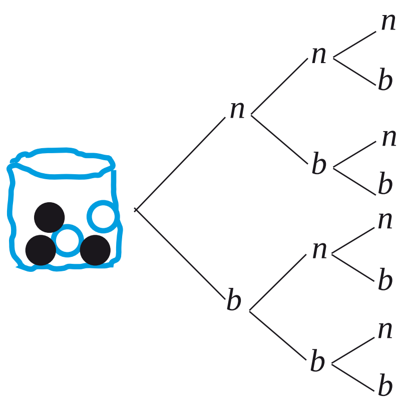
Alg nos resultados: *nb*
bn
nnn
· · · ¿*Cuántos son*?

Ejempl3
(Cont.)

Los resultados son de la forma: $N_1\ N_2 N_3$

N_1 puede tomar 2 valores: n, b.
N_2 puede tomar 2 valores: n, b
N_3 puede tomar 2 valores: n, b

Seg ndo. Estab ece el espacio muestral. ¡Haz un diag ama!

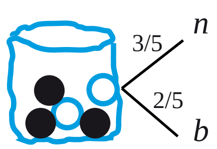


Cada resultado es una *triada.*

Entonces, el espacio muestral es:

$S = \{nnn, nnb, nbn, nbb, bnb, bbb, b \quad \}$

Tercero. Resultados favorab es y c álculo de prob b lidades.



¿El espacio muestral es eqi prob b e? Analiza la composición de la bl sa. ***Cd b o*** tiene distinta prob b lidad de ser seleccionado.

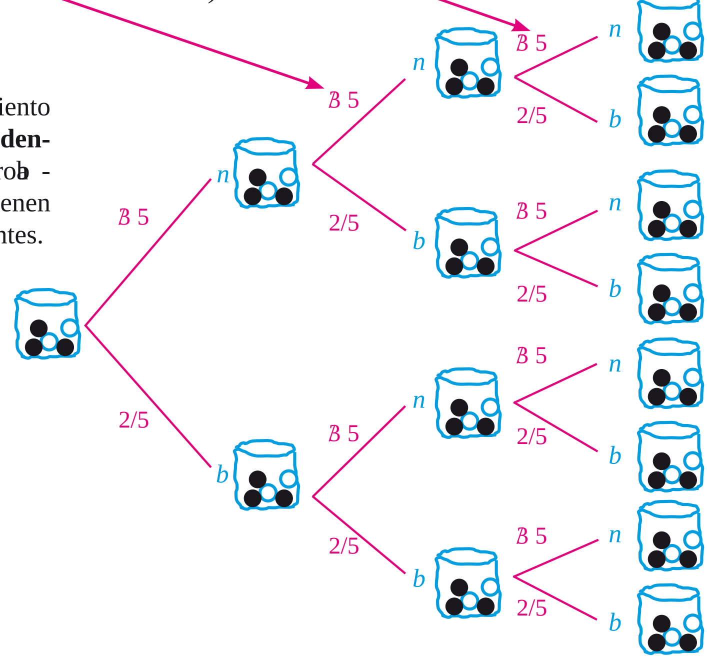
Por tanto, no podemos usar la reg a de Laplace. Entonces, usaremos el árbl de prob b lidades y la reg a de multiplicación.

Aqí anotamos la prob b lidad de ob ener ***n*** en la 2da. ex racción, dado qe ob uvimos ***n*** la 1ra.: (*P(n en la 2a./ ob uvimos n en la 1)* .

Sin emb rg, puesto qe ex ste reemplazamiento antes de cada ex racción, se presenta **independencia** entre dichas ex arcciones. Por tanto, las prob - b lidades de las dos primeras ramas se mantienen iga les en las posiciones respectivas sub igi entes.

Así, *P(nnn) = P(n en la 3 a./ ob uvimos n en la 1.y n en la 2a)* = *P(n)P(n)P(n).*

P(n en la 3 a./ ob uvimos n en la 1.y n en la 2a) .



Ejemplo 2
(Cont.)

a) Suceso A: Obtener "*Las tres del mismo color*":

$$A = \{nnn, bbb\}$$

$$\begin{aligned} P(\text{tres del mismo color}) &= P(nnn) + P(bbb) \\ &= P(n)P(n)P(n) + P(b)P(b)P(b) \\ &= (3/5)\times(3/5)\times(3/5) + (2/5)(2/5)(2/5) \\ &= 35/125 \end{aligned}$$

b) Suceso B: Obtener "*Las tres negras*":

$$B = \{nnn\}$$

$$\begin{aligned} P(\text{tres negras}) &= P(nnn) \\ &= P(n)P(n)P(n) \\ &= (3/5)\times(3/5)\times(3/5) = 27/125 \end{aligned}$$

c) Suceso C: Obtener "*Exactamente dos negras*":

$$C = \{nnb, nbn, bnn\}$$

$$\begin{aligned} P(\text{exactamente dos negras}) &= P(nnb) + P(nbn) + P(bnn) \\ &= P(n)P(n)P(b) + P(n)P(b)P(n) + P(b)P(n)P(n) \\ &= (3/5)(3/5)(2/5) + (3/5)(2/5)(3/5) + (2/5)(3/5)(3/5) \\ &= 3\times(3/5)(3/5)(2/5) \\ &= 54/125 \end{aligned}$$

Ejemplo 3

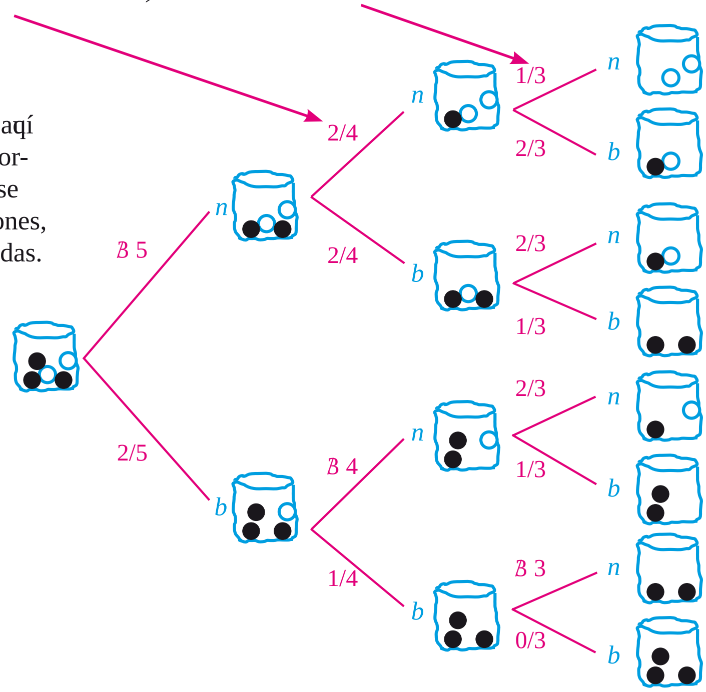
Resolver el ejemplo 2, pero ahora considerando que no existe reemplazamiento.

Aquí anotamos la probabilidad de obtener ***n*** en la 2da. extracción, dado que obtuvimos ***n*** la 1ra.: (*P(n en la 2da./ obtuvimos n en la 1ra.)*).

A diferencia de cuando hay reemplazamiento, aquí la composición de la bolsa va cambiando conforme se hacen las extracciones. Por lo tanto, no se presenta **independencia** entre dichas extracciones, y debemos plantear probabilidades condicionadas.

Por ejemplo,
P(nnn) = P(n en la 3ra./ obtuvimos n en la 1ra. y n en la 2da.) = (3/5)(2/4)(1/3).

P(n en la 3ra./ obtuvimos n en la 1ra. y n en la 2da.).



Ejemplo 3 (Cont.)

a) Suceso A: Ob ener "*Las tres del mismo color*":

$$A = \{nnn, b\ \ \}$$

$$P(\textit{tres del mismo color}) = P(nnn) + P(b)$$
$$= (3\ 5) \times (2\ 4) \times (1\ 3) + (2\ 5)\ (1\ 4)\ (0\ 3)$$
$$= \frac{1}{10} + 0 = \frac{1}{10}$$

b) Suceso B: Ob ener "*Las tres negras*":

$$B = \{nnn\}$$
$$P(\textit{tres negras}) = P(nnn)$$
$$= (3\ 5) \times (2\ 4) \times (1\ 3) = 1\ 0$$

c) Suceso C: Ob ener "*Exactamente dos negras*":

$$C = \{nnb, nb, bn\ \ \}$$

$$P(\textit{exactamente dos negras}) = P(nnb) + P(nb) + P(bn)$$
$$= (3\ 5)\ (2\ 4)\ (2\ 3) + (3\ 5)\ (2\ 4)\ (2\ 3) + (2\ 5)\ (3\ 4)\ (2\ 3)$$
$$= 3\ 1\ 5 = 3\ 5$$

Actividad 32 c

Con los datos del ejemplo 3c alcula la prob b lidad de ob ener:

a) Una b anca.
b) Dos b ancas.
c) Al menos una b anca.

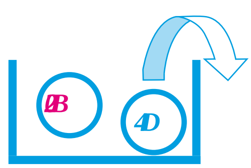
Ejemplo 4

Una caja contiene 24 focos de los cuales 4 son defectuosos. Una muestra de tamaño tres es ex raída sin reemplazamiento. ¿Cuál es la prob b lidad de qe la muestra:

a. Conteng dos defectuosos.
bC onteng al menos dos en be n estado.
c. Al menos uno en be n estado.

Solución

Primero. Descripción del expe rimento.



20 *B* indica 20 be nos o en be n estado
4 *D* indica 20 defectuosos.

- Extracción sin reemplazo y de manera sucesiva de tres focos de una caja. Se trata de un expe rimento compuesto de tres etapas. Hay una ***b a ió interés*** la cual está formada por los elementos:

{ 20 focos be nos, 4 defectuosos }

Ejemplo 4
(Cont.)

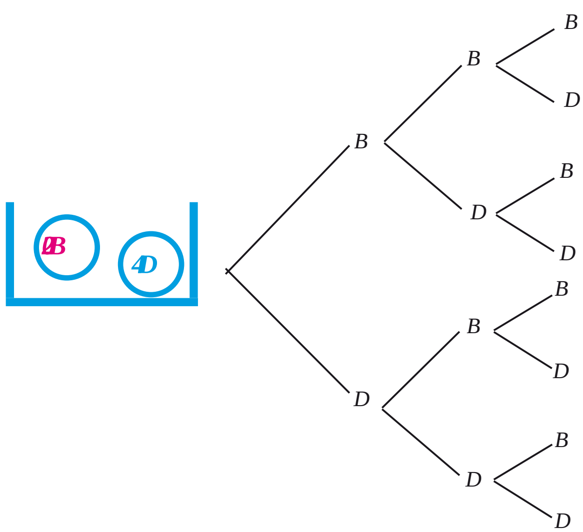
- Primer experimento o primer etapa: Se extrae un foco y se registra su calidad. Opciones: {bueno, defectuoso}.
- Segundo experimento o segunda etapa: Sin regresar el foco seleccionado, se extrae otro foco y se registra su calidad. Opciones: {bueno, defectuoso}.
- Tercer experimento o tercera etapa: Sin regresar los focos seleccionados, se extrae un tercer foco y se registra su calidad. Opciones: {bueno, defectuoso}.

Algunos resultados: *db*
bd
b
· · · ¿*Cuántos son*?

Los resultados son de la forma: $N_1 N_2 N_3$

N_1 puede tomar 2 valores: b, d.
N_2 puede tomar 2 valores: b, d.
N_3 puede tomar 2 valores: b, d.

Segundo. Establece el espacio muestral. ¡Haz un diagrama!



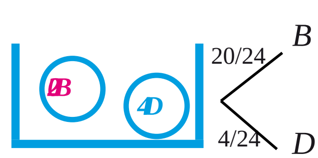
Cada resultado es una *triada*.

Entonces, el espacio muestral es:

$$S = \{BBB, BBD, BDB, BDD, DBB, DBD, DDB, DDD,\}$$

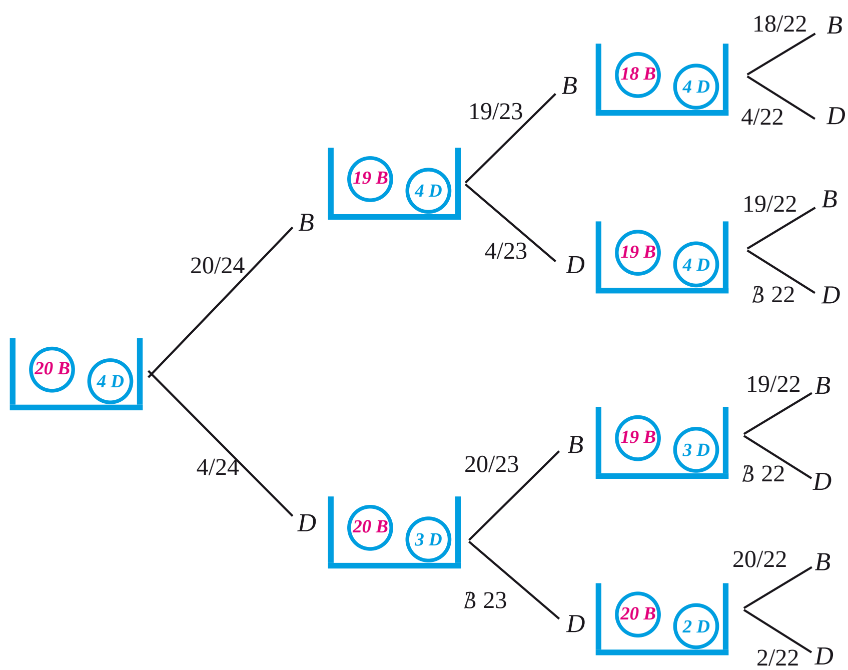
Tercero. Resultados favorables y cálculo de probabilidades.

¿El espacio muestral es equiprobable? La composición de la caja nos muestra que cada estado de calidad de los focos, tiene distinta probabilidad de ser seleccionado.



Ejemplo 4
(Cont.)

Por tanto, debemos usar el árbol de probabilidades y la regla de multiplicación.



a) Suceso A: Obtener "*dos defectuosos*":

A = {*BDD, DBD, DDB*}

P(dos defectuosos) = P(BDD) + P(DBD) + P(DDB)

= (20/24)(4/23)P(3/22) + (4/24)(20/23)P(3/22) + (4/24)(3/23)(20/22)

= [illegible]

b) Suceso B: Obtener "*al menos dos en buen estado*".

B = {*BBB, BBD, BDB, DBB*}

P(al menos dos buenos) = P(BBB) + P(BBD) + P(BDB) + P(DBB)

= (20/24)(19/23)P(18/22) +(20/24)(19/23)P(4/22) +(20/24)(4/23)(19/22) + P(4/24)P(20/23)P(19/22) = [illegible]

= [illegible]

c) Suceso C: Obtener "*al menos uno en buen estado*".

Recordemos que en la lección (2.3) se estableció que "cuando se pregunta por la probabilidad de *por lo menos uno o al menos uno*, es más práctico calcular P($\overline{C}$) que *P(C)*. A continuación podrás convencerte del por qué sucede ésto.

$$S = \{\underbrace{BBB, BBD, BDB, BDD, DBB, DBD, DDB}_{\text{Al menos uno } B},\ \underset{\uparrow\ \text{Ninguno } B}{DDD},\}$$

Al menos uno *B*, es ***complemento*** de ninguno *B*.

Ejemplo 4
(Cont.)

Entonces, en vez de calcular la probabilidad de 7 resultados (*BBB*, *BBD*, *BDB*, *BDD*, *DBB*, *DBD*, *DDB)*, calculamos el de uno*: DDD* y aplicamos la regla del complemento:

$$
\begin{aligned}
P(C) = P(\text{Al menos uno bueno}) &= 1 - P(\overline{C})\\
&= 1 - P(DDD)\\
&= 1 - (4/[illegible])(3/[illegible])(2/[illegible])\\
&= 1 - 0[illegible]\\
&= 0[illegible]
\end{aligned}
$$

Actividad 3.2

1. Con los datos del ejemplo 4, calcula la probabilidad de obtener una muestra que:
   A: "*contenga no más de un foco defectuoso*'.
   B: "*contenga al menos uno defectuoso*".
2. Un lote de bombas de gasolina para automóvil, tiene un 95 % de bombas que dan buen estado. Si se seleccionan cuatro bombas al azar: a) ¿cuál es la probabilidad de obtener una defectuosa?; b) ¿Cuál es la probabilidad de obtener al menos una defectuosa?

Ejercicios 3

1. Del conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ se seleccionan dos números con reemplazamiento. Calcula la probabilidad de los siguientes sucesos:
   a) Ambos números son pares.
   b) El primer número es par y el segundo impar.
   c) El segundo número es impar.
   d) El primer número es par o el segundo impar.

2. Resolver el problema 1 sin reemplazamiento.

3 De una urna con cinco bolas rojas y tres blancas, se sacan dos bolas al azar con reemplazamiento. Calcula la probabilidad de los siguientes sucesos:
   a) A: ambas son blancas.
   b) B: ambas son del mismo color.
   c) C: la segunda bola es blanca.

4. Resolver el problema 3 sin reemplazamiento.

5. De una urna, con cinco bolas blancas y cuatro negras, se sacan cuatro sin reposición. Calcula la probabilidad de obtener:
   a) por lo menos una bola blanca. b) bolas de ambos colores.

6 Hay tres urnas: en la I se han puesto tres bl as b ancas y dos neg as; en la II ha y cuatro bl as b ancas y una neg a y en la III dos b ancas y dos neg as. de cada una se escog una bl a. calcula la prob b lidad de ob ener:

a) tres bl as b ancas.

b) por lo menos una bl a b anca.

c) una bl a b anca.

7. En un jueg de una caseta de feria se utiliza en primer lug r una ruleta. Si la ruleta se detiene en un núm ero par, entonces el jug dor puede sacar una canica de una bl sa. La ruleta y las canicas de la bl sa se representan en los dib j os sig i entes.

Cuando se saca una canica neg a se g na un premio. Ariana jueg una vez. ¿Qué tan prob - b e es qe Ariana g ne un premio? Argm enta tu respuesta.

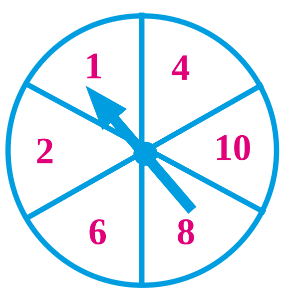
A. Es imposib e.

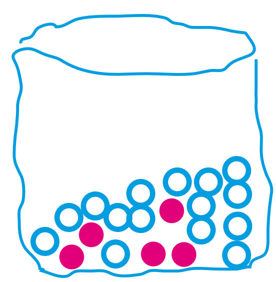
B. No es muy pr ob b e.

C. Tiene aprox madamente el 50% de prob b lidad.

D. Es muy pr ob b e.

E. Es seg r o.





Lección 3 Teorema de Bayes.

Objetivos: Calcular probabilidades de experimentos compuestos mediante el árbol de probabilidades.
Calcular probabilidades condicionales con ayuda del árbol de probabilidades.
Comprender y utilizar el teorema de Bayes.

En la unidad 2, estudiamos los sucesos compuestos. Entre estos suceso incluimos los relativos a la probabilidad condicional. Debido a que en ese momento nos restringimos a experimentos simples, es necesario ampliar dicho estudio a experimentos compuestos. Para ello, utilizaremos tanto el diagrama de Venn como el árbol de probabilidades. Para determinados problemas, debemos convertir la fórmula básica de la probabilidad condicional en la llamada fórmula de Bayes.

Actividad 3a

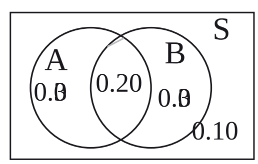
Qué hacer

Repasa la lección (2.2) y a continuación contesta lo que se indica:

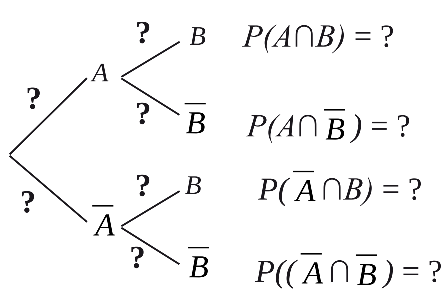
a. A partir de las probabilidades indicadas en el diagrama de Venn adjunto, determina:

a. $P(A) =$ _
b. $P(B) =$ _
c. $P(\overline{A}) =$ _
d. $P(\overline{B}) =$ _
e. $P(A \cap B) =$ _____
b. $P(A/B) =$ _

f. $P(A/B) =$ _
g. $P(B/A) =$ _
h. $P(A/\overline{B}) =$ _
i. $P(B/\overline{A}) =$ _



b. Con la información obtenida en (a), escribe en cada lugar ocupado por el signo (?) el valor que corresponde.



Probabilidad total

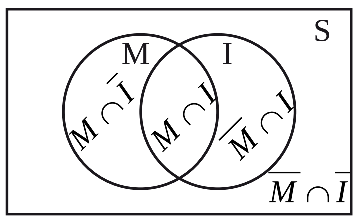
Recordemos la regiones en que se divide un diagrama de Venn. Para ello, volveremos a analizar la situación planteada en la lección (2.4):

> *De los estudiantes de nuevo ingreso a la universidad el año pasado, el 12% reprobó inglés, 16% reprobó matemáticas y el 6% reprobó inglés y matemáticas.*

En este enunciado, hay dos sucesos involucrados: *reprobó inglés*, *reprobó matemáticas*

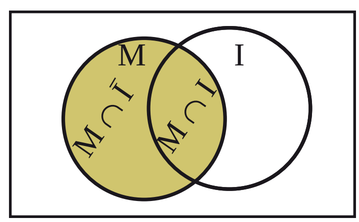
Sea: M el suceso: "*reprobó matemáticas*" e
I el suceso: "*reprobó inglés*"

Con estos sucesos el rectángulo queda dividido en las siguientes regiones:

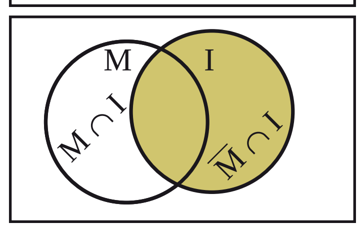


A partir de este diagrama dividido, podemos apreciar las siguientes equivalencias:

$$P(M) = P(M \cap \bar{I}) + P(M \cap I)$$



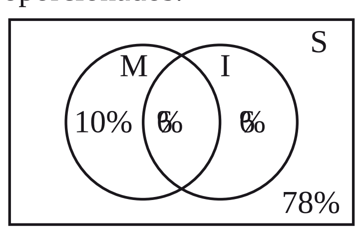
$$P(I) = P(M \cap I) + P(\overline{M} \cap I)$$



La notación $P(M)$ representa una **probabilidad simple**, y la notación $P(M \cap I)$ representa a una **probabilidad conjunta** y la única posibilidad de que ocurra es que tanto el suceso M como el I tienen que ocurrir en forma simultánea.

Ahora, consideremos los datos proporcionados:

$P(M) = 16\%$
$P(I) = 12\%$
$P(M \cap I) = 6\%$



Recordemos como calcular P(I /M)

$$P(I/M)=\frac{P(I\cap M)}{P(M)}=\frac{0.06}{0.16}=0.38$$

También calculemos P(I / $\overline{M}$):

$$P(I/\overline{M})=\frac{P(I\cap \overline{M})}{P(\overline{M})}$$

Del diagrama de Venn obtenemos, $P(I\cap \overline{M})=0.06$

De *P(M)* = 0.16, tenemos que : P($\overline{M}$) = 1 − 0.16 = 0.84

Entonces:

$$P(I/\overline{M})=\frac{P\left(I\cap \overline{M}\right)}{P\left(\overline{M}\right)}=\frac{0.06}{0.84}=0.07$$

A continuación, estableceremos la relación que se presenta entre estos valores correspondientes a un diagrama de Venn y las probabilidades que se incluyen en un árbol de probabilidades.

El diagrama de Venn y el árbol de probabilidades

Ahora, estableceremos una relación entre las regiones de un diagrama de Venn y un árbol de probabilidades. Para ello, consideraremos que los sucesos compuestos, pueden verse como resultado de un experimento compuesto.

En la situación que estamos analizando podemos hablar de cuatro sucesos:

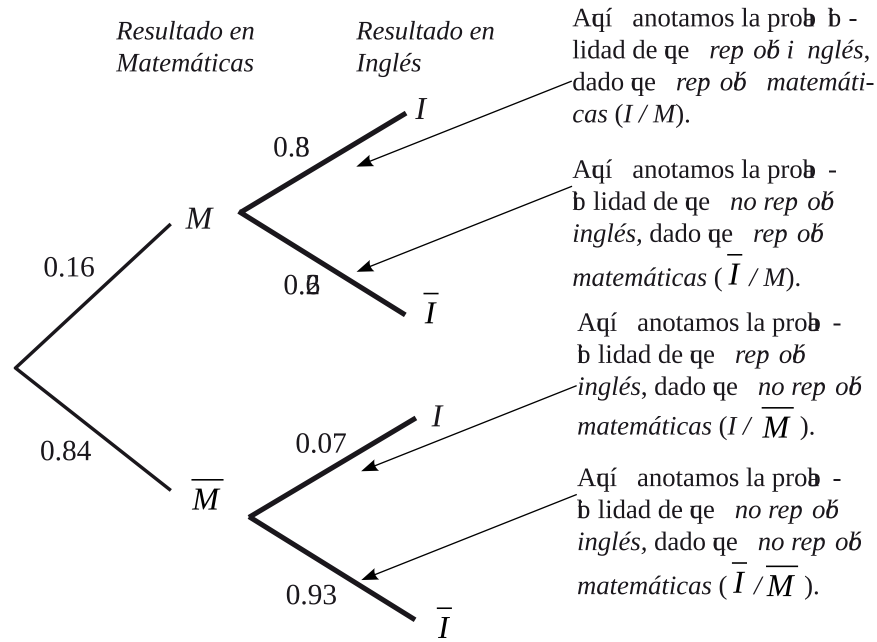
M: “*reprobó matemáticas*”.
$\overline{M}$: “*no reprobó matemáticas*”.
I: “*reprobó inglés*”.
$\overline{I}$: “*no reprobó inglés*”.

Con estos sucesos, podemos suponer que estamos ante un experimento compuesto de dos etapas.

Primera etapa: Investigar si reprobó matemáticas. Posibilidades: *M*, $\overline{M}$.

Segunda etapa: Investigar si reprobó inglés. Posibilidades: *I*, $\overline{I}$.

Por tanto, podemos construir un árbol de probabilidades:



A partir de este árbol podemos calcular.

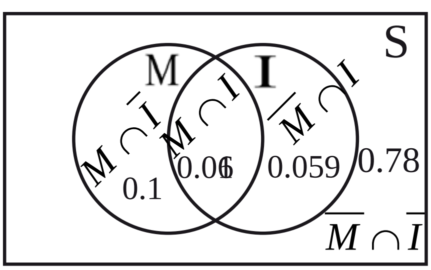
$$P(M \cap I) = P(M)P(I/M) = (0.16)(0.38) = 0.061$$

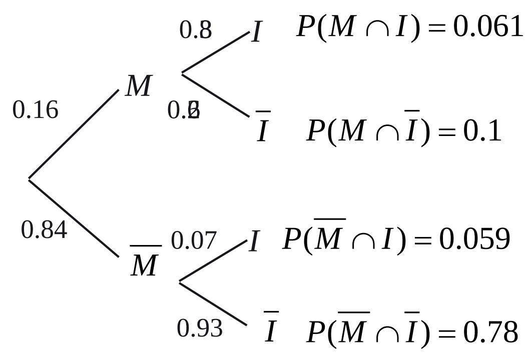
$$P(M \cap \overline{I}) = P(M)P(\overline{I}/M) = (0.16)(0.62) = 0.1$$

$$P(\overline{M} \cap I) = P(\overline{M})P(I/\overline{M}) = (0.84)(0.07) = 0.059$$

$$P(\overline{M} \cap \overline{I}) = P(\overline{M})P(\overline{I}/\overline{M}) = (0.84)(0.93) = 0.78$$

Analizemos cada uno de los sucesos compuestos que aparecen tanto en el diagrama de Venn como en el árbol de probabilidades:





Observa en ambas figuras los sucesos conjuntos que componen la probabilidad del suceso M:

$$P(M) = P(M \cap \overline{I}) + P(M \cap I) \qquad (1)$$

Es decir, el suceso M está formado por todos los sucesos conjuntos en los que aparece M.

De manera similar observamos que la probabilidad del suceso I está compuesto por las siguientes probabilidades conjuntas:

$$P(I) = P(M \cap I) + P(\overline{M} \cap I) \qquad (2)$$

Las expresiones (1) y (2) son llamadas ***fórmulas de la probabilidad total.*** En el caso estudiado, las probabilidades simples de M e I, sólo incluyeron dos probabilidades conjuntas, pero en general pueden existir más de dos, tal y como se muestra en el ejemplo 2 planteado a continuación.

Ejemplo 1

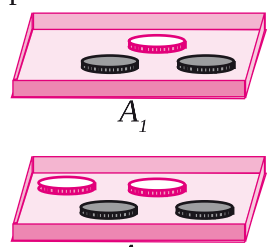
Una caja contiene 2 fichas negras y 1 blanca y una segunda caja contiene 2 fichas negras y 2 blancas. Se elige una de las cajas al azar y se toma una ficha de la misma. ¿Qué probabilidad hay de que la ficha extraída sea negra?

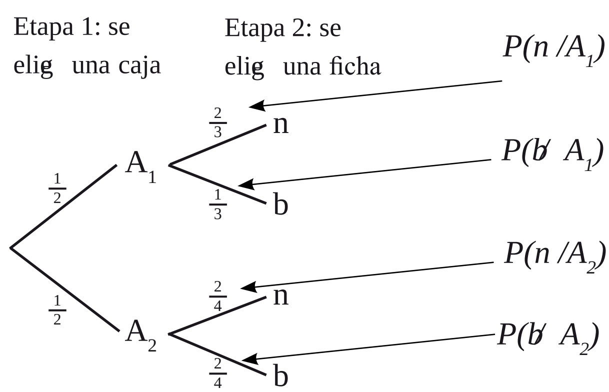
Solución

Descripción del experimento: experimento de dos etapas.

En la 1ra. se selecciona una de las cajas: sean A_1 y A_2 estas cajas.

En la 2da. se extrae una ficha; opciones: negra (n) o blanca (b)


A_1
A_2



En una selección al azar cada caja tiene la misma probabilidad de ser seleccionada, por lo que se infiere que la probabilidad de tomar la primera caja es de 1/2 y que la probabilidad de tomar la segunda caja es también 1/2.

Elegir n puede darse por dos caminos, a saber tomando la primera caja y entonces una ficha negra o tomando la segunda caja y una ficha negra.

Sale una negra: $\{A_1n, A_2n\}$

Expresando la probabilidad del suceso negra como una suma de probabilidades conjuntas:

$$P(n) = P(A_1n) + P(A_2n)$$

Aplicando la regla de multiplicación

$$P(n) = P(A_1)\,P(n / A_1) + P(A_2)\,P(n / A_1)$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{2}{3}\right) + \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{2}{4}\right) = \left(\frac{7}{12}\right)$$

Ejemplo 2

Un niño tiene tres bolsas con monedas de un peso y de a cinco. La distribución de las bolsas es la siguiente:

Bolsa A: 3 monedas de un peso y 5 de a cinco
Bolsa B: 8 monedas de un peso y 3 de a cinco
Bolsa C: 5 monedas de un peso y 4 de a cinco.

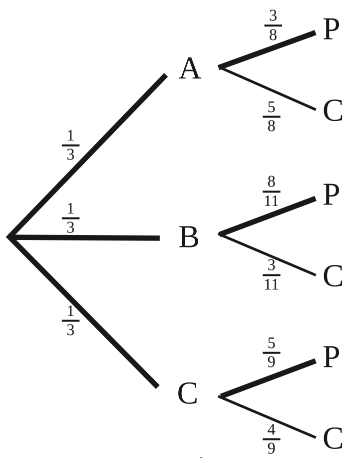
Se elige una de las bolsas al azar y sacamos una moneda aleatoriamente de la misma. ¿Qué probabilidad tiene de ser de a peso?

Solución

Experimento de dos etapas:

En la 1ra. se selecciona una bolsa: opciones: A, B o C.

En la 2da. tomar una moneda; opciones: de a peso (P) o de a cinco (C)



Tres caminos para llegar a un peso:

$P(P) = P(A \cap P) + P(B \cap P) + P(C \cap P)$
$= P(A)\, P(P/A) + P(B)\, P(P/B) + P(C)\, P(P/C)$

(Expresión de la probabilidad total)

Sustituyendo:

$$P(P) = \left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{3}{8}\right) + \left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{8}{11}\right) + \left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{5}{9}\right)$$

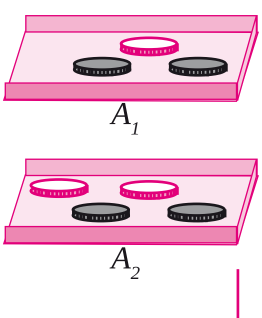
$= 0.125 + 0.091 + 0.185$
$= 0.401$

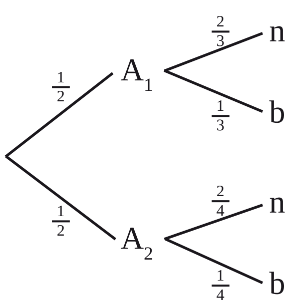
Ejemplo 3

Consideremos ahora, la siguiente variante:

En el *ejemplo 1*, si la ficha es negra, ¿qué probabilidad hay de que proviniese de la primera caja?

Se pide: $P(A_1 / n) = \dfrac{P(A_1 \cap n)}{P(n)}$





El numerador es simplemente el producto (1/2)(2/3) (primera rama del árbol) que equivale a:

$P(A_1 \cap n)$. Pero esta probabilidad es igual a: $P(A_1)\, P(n / A_1)$

Ahora, el denominador viene dado por la expresión de la probabilidad total:

Ejemplo 3 (Cont:)

$$P(n) = P(A_1)\,P(A/P) + P(A_2)\,P(n/A_1)$$

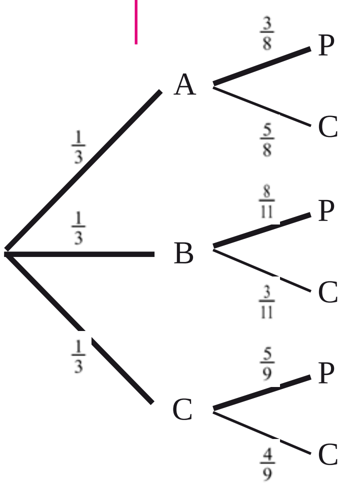
Entonces:

$$P(A_1/n) = \frac{P(A_1 \cap n)}{P(n)} = \frac{P(A_1)\,P(n/A_1)}{P(A_1)\,P(n/A_1) + P(A_2)\,P(n/A_1)}$$

$$= \frac{\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{2}{3}\right)}{\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{2}{3}\right) + \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{2}{4}\right)} = \frac{1/3}{7/12} = \frac{4}{7}$$

Ejemplo 4 En el *ejemplo 2*, si hemos sacado un peso, ¿cuál es la probabilidad de que proceda de la bolsa A?

Se pide: $P(A/P) = \dfrac{P(A \cap P)}{P(P)}$



El numerador es: $P(A \cap P) = P(A)\,P(P/A)$

$$= \left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{5}{8}\right)$$

$$= 0.208$$

El denominador viene dado por la expresión de la probabilidad total:

$$P(P) = P(A)\,P(P/A) + P(B)\,P(P/B) + P(C)P(P/C)$$

$$P(P) = \left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{3}{8}\right) + \left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{8}{11}\right) + \left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{5}{9}\right)$$

$$= 0.401$$

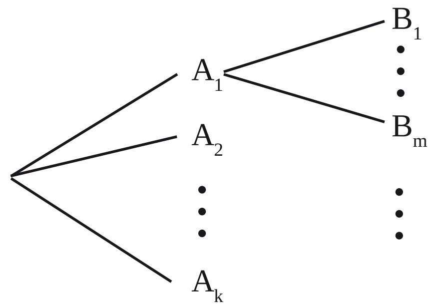
Por lo tanto: $P(A/P) = \dfrac{P(A_1)\,P(P/A)}{P(A)\,P(P/A) + P(B)\,P(P/B) + P(C)\,P(P/C)}$

$$= \frac{0.208}{0.401} = 0.519$$

La probabilidad de que el peso sea de la bolsa A es de 0.519

OBSERVACIONES. Los problemas precedentes, consistieron en lo siguiente:

- Son experimentos de dos etapas.
- La 1ra. etapa se puede describir afirmando que exactamente uno de k posibles resultados deberá ocurrir (en los ejemplos, elegir alguna de las bolsas o cajas).
- En la 2da. etapa, deberá ocurrir exactamente uno de *m* resultados posibles.
- Los valores de las probabilidades para cada uno de los resultados A_k son conocidos al igual que las probabilidades condicionadas del tipo $P(B_j/A_i)$



El problema consiste en calcular la probabilidad de que el evento de la primera etapa A_i haya ocurrido cuando se sabe que ha ocurrido el evento B_j.

Este tipo de experimentos se llaman bayesianos y las probabilidades pueden calcularse mediante la fórmula de Bayes.

Para llegar a esta fórmula, empezaremos por identificar que el problema planteado es una probabilidad condicional $P(A_i / B_j)$.

Para mayor sencillez, en la notación se llevará a cabo el desarrollo para $P(A_1/B_1)$.

Los cálculos para cualquier otra pareja de eventos serán los mismos.

En términos de la fórmula de la probabilidad condicional tenemos:

$$P(A_1 / B_1) = \frac{P(A_1 \cap B_1)}{P(B_1)} \qquad (1)$$

Aplicando la regla de la multiplicación al numerador obtenemos:

$$P(A_1 \cap B_1) = P(A_1)\, P(B_1 / A_1) \qquad (2)$$

El valor de $P(B_1)$ puede calcularse por la expresión de la probabilidad completa la cual expresa la probabilidad de un evento como una suma de probabilidades conjuntas. En otras palabras, esta expresión nos dice que, el evento de la 2da. etapa B_1 ocurrirá si el evento de la 1ra. etapa A_1 ha ocurrido y entonces B_1 ocurre, o si el evento de la 1ra. etapa A_2 ocurre y luego ocurre el evento de la 2da. etapa B_1, ..., o si el evento de la 1ra. etapa A_k ocurre y es seguido por el evento B_1 de la 2da. etapa.

Luego entonces:

$$P\,(B_1)\ P(A_1 \text{ y } B_1) + P(A_2 \text{ y } B_1) + \dots + P(A_k \text{ y } B_1)$$

Por la regla de multiplicar:

$$P\,(B_1)\ P(A_1)\, P(B_1/A_1) + P\,(A_2)\, P(B_1/A_2) + \dots + P\,(A_k)\, P(B_1 / A_k) \qquad (3)$$

Sustituyendo (3) y (2) en (1), obtenemos la fórmula de Bayes:

$$P\,(A_1 / B_1) = \frac{P\,(A_1)\, P(B_1 / A_1)}{P\,(A_1)\, P(B_1 / A_1) + P(A_2)\, P(B_1 / A) + \dots + P\,(A_k)\, P(B_1 / A_2)}$$

Ejemplo 1 Un aparato para probar bulbos de radio siempre detecta un bulbo defectuoso, pero en el 2% de las veces en que indica que un bulbo está malo, se tiene que en verdad, el bulbo está en buen estado. Si el 97% de los bulbos fabricados son buenos, ¿qué probabilidad hay de que un bulbo nuevo elegido al azar y señalado como defectuoso por el aparato sea en realidad un bulbo en buenas condiciones?

Solución

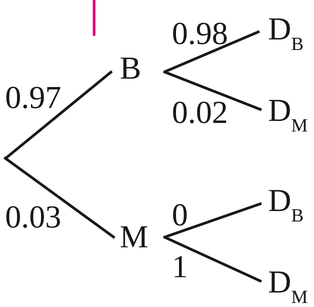
Descripción del experimento: experimento de dos etapas:

- En la 1ra. etapa calidad real del bulbo, opciones: bueno (B) o malo (M).
- En la 2da. etapa prueba de detección, opciones: detectado bueno (D_B) o detectado (D_M)

Se pide: $P(B/D_M)$

Datos: $P(B) = 0.97$ y $P(M) = 0.03$

$P(D_M/B) = 0.02$ y $P(D_M/M) = 1$



$$P(B/D_M) = \frac{P(B \cap D_M)}{P(D_M)}$$

$$= \frac{P(B)\,P(D_M/B)}{P(B)\,P(D_M/B)\,P(M)\,P(D_M/M)}$$

$$= \frac{(0.97)\,(0.02)}{(0.97)\,(0.02) + (0.03)\,(1)} = 0.39$$

Por lo tanto, alrededor del 39% de las veces que un bulbo nuevo es detectado en mal estado por el aparato, de hecho es un bulbo en buen estado.

Ejemplo 2 Dos fábricas producen lámparas eléctricas; la 1ra. proporciona el 70% y la 2da. el 30% de la producción global. Por otra parte, sobre 100 lámparas suministradas por la 1ra. fábrica, un promedio de 83 se ajustan a las normas prescritas mientras que en el caso de la 2da. fábrica dicha media solo alcanza el 63%. Un comprador adquiere una lámpara que resultó buena. ¿Cuál es la probabilidad de que provenga de la 1ra. fábrica?

Descripción del experimento, dos etapas:

Solución

En la 1ra. se elige una fábrica: A_1 o A_2.

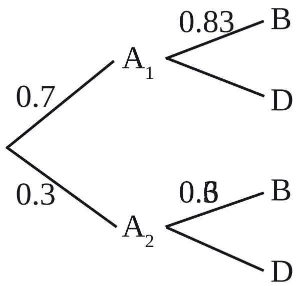
En la 2da. nos interesa el estado de la lámpara: buena (B) o mala (M)

Ejemplo 2

(Cont.)

Revisión de los datos:

"La 1ra. proporciona el 70% de las lámparas: $P(A_1) = 0.70$"
"La 2da. proporciona el 30% de las lámparas: $P(A_2) = 0.30$"
"Sobre 100 lámparas suministradas por la 1ra. 83 son buenas: $P(B/A_1) = 0.83$"
"De las lámparas de la 2da. 65% son buenas: $P(B/A_2) = 0.65$"



$$P(A_1 / B) = \frac{P(A_1 \cap B)}{P(B)}$$

$$= \frac{P(A_1)\, P(B / A_1)}{P(A_1)\, P(B / A_1) + P(A_2)\, P(B / A_2)}$$

$$= \frac{(0.7)\,(0.83)}{(0.7)\,(0.83) + (0.3)\,(0.65)} = 0.75$$

Ejercicios

1. La probabilidad de que el artículo fabricado en un taller satisfaga las normas exigidas es igual a 0.96. Se propone la adopción de un procedimiento simplificado de control que identifica como "buenos" con una probabilidad de 0.98, los artículos que realmente se sujetan a las normas y con una probabilidad solo de 0.05 los que no las satisfacen. ¿Cuál será la probabilidad de que un artículo que haya pasado la prueba con éxito por este control simplificado se ajuste efectivamente a las normas?
2. Supóngase que una prueba para detectar cierta enfermedad bastante rara se ha perfeccionado al grado que puede descubrir la enfermedad en el 97% de los individuos atacados. También ocurre que cuando se hace la prueba a individuos sanos el 5% de ellos son diagnosticados de manera incorrecta como padeciendo la enfermedad. Finalmente, cuando se hace la prueba a individuos que tienen otras enfemedades más leves el 10% de ellos sufrirá un diagnóstico incorrecto. Se sabe que los porcentajes de individuos de los tres tipos considerados aquí en la población en grande son el 1%, el 96% y el 3%, respectivamente. Calcular la probabilidad de que un individuo elegido al azar en la población y sometido a la prueba de hecho tenga la enfermedad si la prueba así lo indica.
3 Un joyero compra los relojes a dos casas proveedoras. La primera le sirve el 60% de los relojes, de los que el 0.4% son defectuosos, la segunda le proporciona el resto, siendo defectuosos el 1.5%. Un día, el joyero al vender un reloj observa que éste no funciona. Hallar la probabilidad de que el reloj provenga de la primera casa proveedora.
4. Una emisora de televisión emite dos series A y B. La serie A la ve el 20% de la población, mientras que la B solo la ve el 15%, pero mientras el 70% de los que empiezan a ver la serie A la siguen hasta el final, en cambio el 80% de los que empiezan la B la acaban. Una persona nos dice que terminó de ver la serie que había empezado. ¿Cuál es la probabilidad de que fuera la serie A?
5. Con los mismos datos del problema 1, ¿cuál será la probabilidad de que un artículo que haya pasado dos veces con éxito por el control simplificado se ajuste efectivamente a las normas?

Lección 34

Cálculo de probabilidades de experimentos compuestos. Conteo mediante técnicas de la combinatoria.

Objetivo: Entender y ser capaz de utilizar los conceptos combinatorios.
Calcular probabilidades usando las fórmulas de la combinatoria.

En las lecciones previas de esta unidad, aprendiste a calcular probabilidades de sucesos mediante la regla de Laplace y la regla de multiplicación. Para contar los resultados favorables a dichos sucesos, te auxiliaste del diagrama de árbol y del árbol de probabilidades. Con estas herramientas, puedes resolver una gran gama de problemas, sin embargo tienen la limitación de que se vuelven imprácticos cuando el número de etapas del experimento es grande. Por ejemplo, al lanzar dos dados tenemos 36 resultados posibles, los cuales podemos enlistarlos con relativa facilidad, pero, si lanzamos el dado 4 veces por ejemplo, los resultados obtenidos son 1296 Por ello, debemos ahora, aprender a contar resultados sin necesidad de enlistarlos. Ésto, se logra aplicando las técnicas de la rama de la matemática llamada ***combinatoria***

Actividad 34 a

Qué hacer

Utilizando un diagrama de árbol, resuelve lo indicado:

- Se lanza una moneda seis veces de manera consecutiva.
  a. ¿Cuántos resultados posibles hay?
  b. ¿Cuál es la probabilidad de obtener exactamente dos águilas?

- ¿Qué tan fácil es aprobar por adivinación un examen de 5 preguntas de opción múltiple, si cada pregunta tiene cinco opciones de las cuales sólo una es correcta? Considera que se aprueba al contestar correctamente al menos tres preguntas.

	A	B	C	D	E
1.	( )	( )	( )	( )	( )
2.	( )	( )	( )	( )	( )
3	( )	( )	( )	( )	( )
4.	( )	( )	( )	( )	( )
5.	( )	( )	( )	( )	( )

Principio fundamental de conteo

El diagrama de árbol nos muestra todos los posibles resultados de un experimento compuesto. Sin embargo, si el experimento consta de varias etapas o de muchos elementos generadores, nos resultará prácticamente imposible dibujar un diagrama completo. Pero, como ya se pudo apreciar con el cálculo de probabilidades, estamos interesados más en el número de resultados que en cuales son.

El principio fundamental de conteo (PFC) proporciona el número de resultados posibles.

Para desarrollar este principio, recordaremos con algunos ejemplos, la construcción de diagramas de árbol.

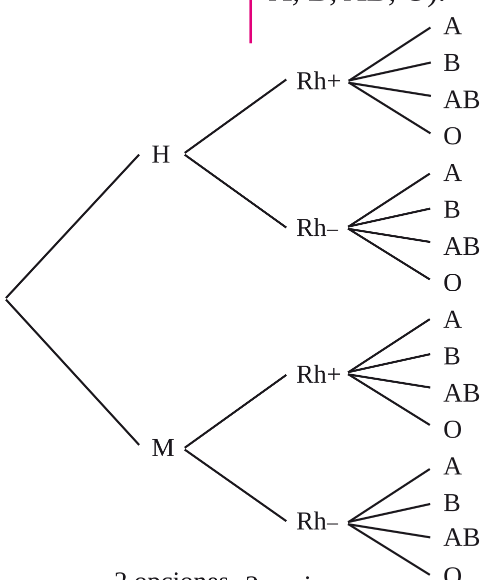
Ejemplo 1

El suero de la sangre, permite clasificar a las personas en cuatro grupos sanguíneos A, B, AB y O. También puede existir en la sangre de los seres humanos el factor Rh (de Macacus Rhesus); si éste se presenta en el individuo, se dice que tiene factor Rh positivo: Rh+; y si no aparece, se dice que tiene factor Rh negativo: Rh–. Cuando la mujer tiene factor Rh+, y el hombre Rh– y alguno de sus hijos nace con factor Rh+ puede presentar serios problemas en el nacimiento.

Utilizando un diagrama de árbol, clasifica a los individuos de acuerdo al sexo, al factor Rh y al grupo sanguíneo. ¿Cuántas clasificaciones pueden hacerse?

Solución

El paso inicial para resolver este problema consiste en dividir primero al conjunto de los seres humanos en dos clases: el de los hombres(H) y el de las mujeres (M). Una vez hecho esto, cada clase se subdivide en otras dos, en base al factor Rh, obteniéndose así cuatro subclases. Finalmente, se divide cada una de las subclases en otros cuatro, tomando en cuenta el grupo sanguíneo(A, B, AB, O).



2 opciones | 2 opciones para cada una de las anteriores. | 4 opciones para cada una de las anteriores.

El árbol contiene toda la información para clasificar a los individuos de acuerdo al sexo, al factor Rh y al grupo sanguíneo. Cada trayectoria o camino del árbol representa un tipo sanguíneo.

Al dividir por sexo, hay *dos* opciones: *H* o *M*.

Cada una de estas opciones se divide con base al factor Rh en otras *dos* opciones: Rh+ o Rh–

Finalmente cada una de las subclases ya obtenidas, se divide tomando en cuenta el grupo sanguíneo en otras *cuatro* opciopnes: A, B, AB u O.

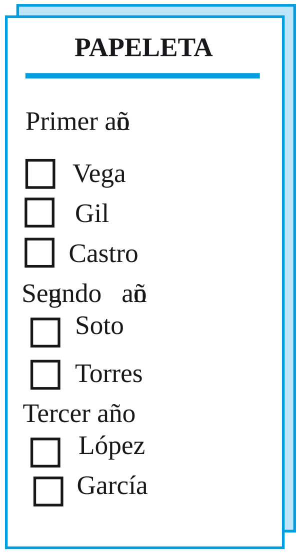
Observa que en total hay 16 clasificaciones diferentes de tipos sanguíneos y sexo.

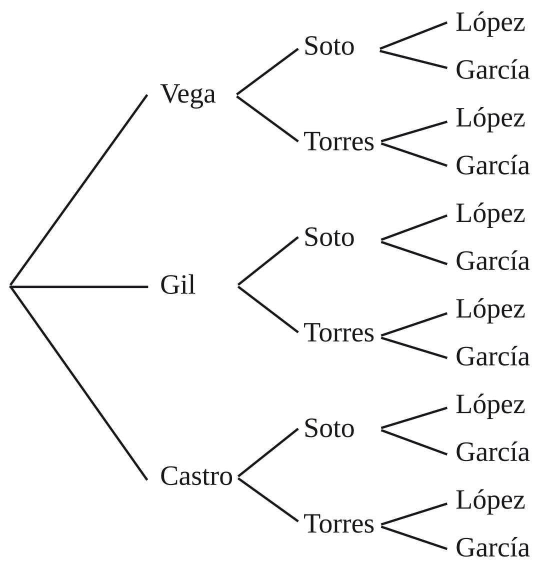
Observa también que el total igual a 16 puede obtenerse de la siguiente manera:

$$2 \times 2 \times 4 = 16$$

Ejemplo 2

En la preparatoria van a elegir consejeros técnicos alumnos, uno por cada grado. La papeleta electoral siguiente muestra un resultado posible de la elección y el diagrama de árbol de la derecha muestra todos los resultados posibles.





Esta elección tiene 12 resultados posibles.
La primera lista del diagrama (1er. Año) es generada por tres elementos: Vega, Gil o Castro.
La segunda lista (2do. Año) es generada por dos elementos: Soto o Torres.
La tercera lista es generada por dos elementos: López o García.
Podemos hacer el siguiente razonamiento: puesto que hay 3 opciones para primer año, 2 para segundo y 2 para tercero, el total de resultados posibles para la elección es: $3 \times 2 \times 2 = 12$.

Ejemplo 3

Cuatro amigos juegan dos partidos de boliche y, al final de cada uno, anotan al vencedor. ¿De cuántas maneras posibles se puede llenar la hoja adjunta?

	1er partido	2$^{do.}$ partido
Vencedores		

¡EXPERIMENTA, JUEGA CON EL PROBLEMA!
Llena algunas boletas ficticias.
En situaciones nuevas como ésta, debemos describir cuidadosamente el experimento. Para ello, hay que identificar dos cuestiones claves:

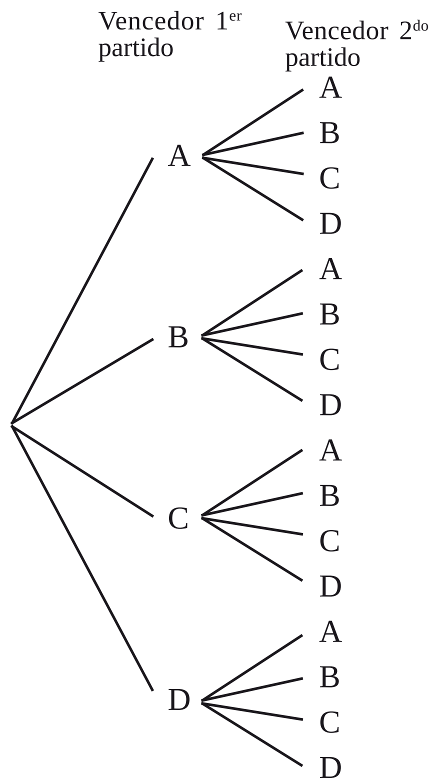
1º ¿De cuántas etapas consta el experimento, es decir, los resultados son pares, triadas,...? En este ejemplo, puesto que se jugarán dos partidos, los resultados serán parejas.

2º ¿Qué elementos generan cada una de las etapas? En este caso, será un conjunto de cuatro amigos.

Ejemplo 3
(Cont.)

USA UNA BUENA NOTACIÓN

Si llamamos A, B, C y D a cada uno de los cuatro amigos, entonces el primer partido lo podrá ganar A, B, C o D y el segundo partido también lo podrá ganar A, B, C o D.



Para tomar en cuenta todas las posibilidades, hay que poner a cada posible vencedor del 1er. partido con cada posible vencedor del 2do.

Hay $4 \times 4 = 16$ posibilidades

Ejemplo 4

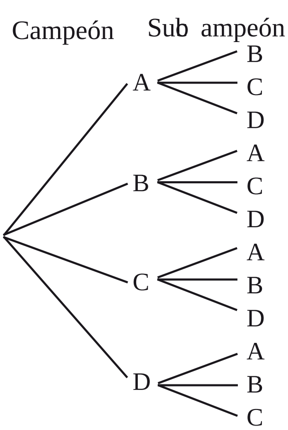
Los mismos 4 amigos del problema anterior juegan un campeonato de ajedrez, en el que reparten dos copas: una para el primer lugar y la otra para el segundo. ¿De cuántas maneras posibles se pueden obtener los resultados?

Descripción del experimento:

1º. ¿De cuántas etapas consta el experimento? Puesto que se juegan dos premios, son dos etapas.

2º. ¿Qué elementos generan cada uno de los posibles resultados de las etapas? Un conjunto de cuatro amigos.

3º. Notación: Elementos que generan los resultados: A, B, C y D.



Razonamiento: Puesto que los participantes se llaman A, B, C y D, para el primer lugar tenemos 4 opciones: A, B, C y D. Pero, para el segundo lugar sólo tenemos tres opciones porque el campeón no puede ser a la vez subcampeón.

4 posibilidades para el campeón

Por cada una de las anteriores, hay 3 posibilidades

Cada una de las cuatro primeras ramas, solamente tiene tres brotes: hay $4 \times 3 = 12$ maneras de repartir las copas.

Ahora, estableceremos el principio fundamental de conteo (*PFC*). Para ello, observa que, en los diagramas de árbol construidos, estuvimos aplicando el *PFC* al multiplicar el número de posibilidades de cada etapa para obtener el total de resultados.

Principio fundamental de conteo. El número de resultados de un experimento compuesto, es igual al producto del número de resultados posibles en que se puede llevar a cabo cada etapa.

Es decir, si un experimento consiste de *n* etapas en donde la primera etapa puede ocurrir de N_1 maneras, y la segunda etapa puede ocurrir de N_2 maneras y así sucesivamente hasta la etapa *n*, entonces podemos concluir que el número total de resultados posibles que se pueden formar es:

$$\text{Número de resultados posibles: } n(S) = N_1 \cdot N_2 \cdot N_3 \cdot \ldots \cdot N_n$$

El principio fundamental de conteo es un sustituto del diagrama de árbol, pero para poder aplicarlo debemos precisar las dos cuestiones ya vistas:

- El número de etapas del experimento (necesitamos saber si los resultados serán parejas, triadas, etcétera).
- Los resultados posibles de cada etapa. Un diagrama de árbol bosquejado puede ser de gran ayuda.

Ejemplo 1

Diez amigos se juegan tres trofeos. ¿De cuántas maneras posibles pueden repartírseles?

Descripción del experimento

1º ¿De cuántas etapas consta el experimento? De tres, se juegan tres lugares (los resultados serán triadas de la forma: (N_1, N_2, N_3)).

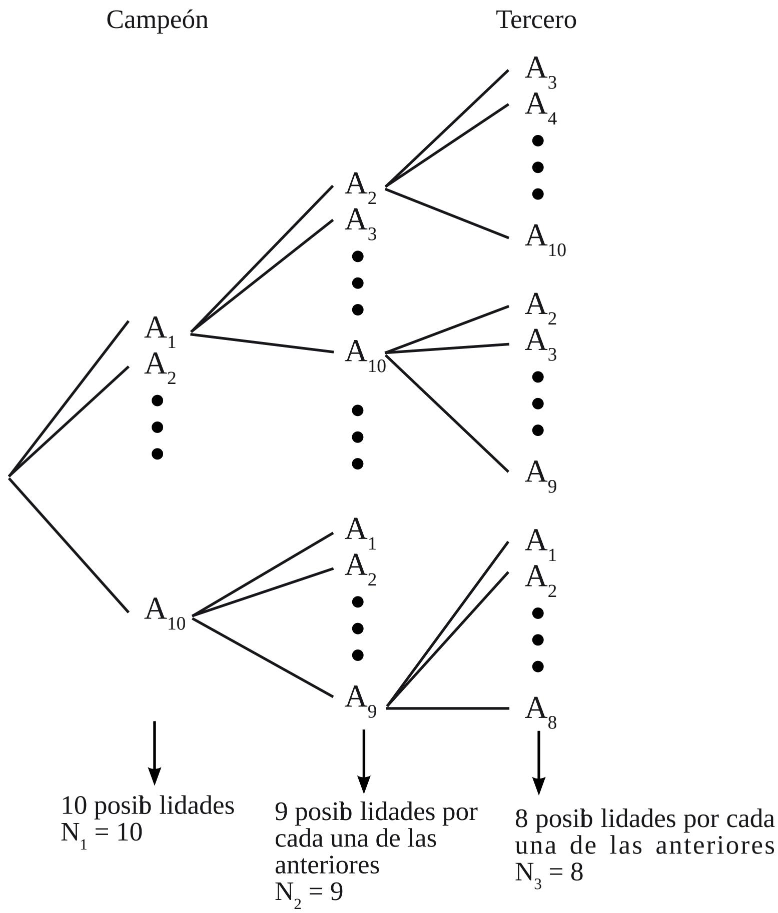
2º ¿Qué elementos generan las opciones de cada una de las etapas? Una población de diez amigos

Recomendación

Utiliza una buena notación. Población de 10 amigos: $\{A_1, A_2, A_3, \ldots, A_{10}\}$.

Algunos resultados: $A_1A_2A_{10}$ $A_8A_9A_1$ $A_1A_6A_3$ ...

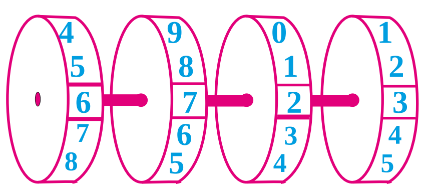
Ejemplo 1
(Cont.)



En total, por el PFC tenemos:
$10 \times 9 \times 8 = 720$ posibilidades

Ejemplo 2

Un sorteo consiste en formar los números premiados haciendo girar cuatro ruedas, cada una con diez dígitos



Determine el total de números que se pueden formar.

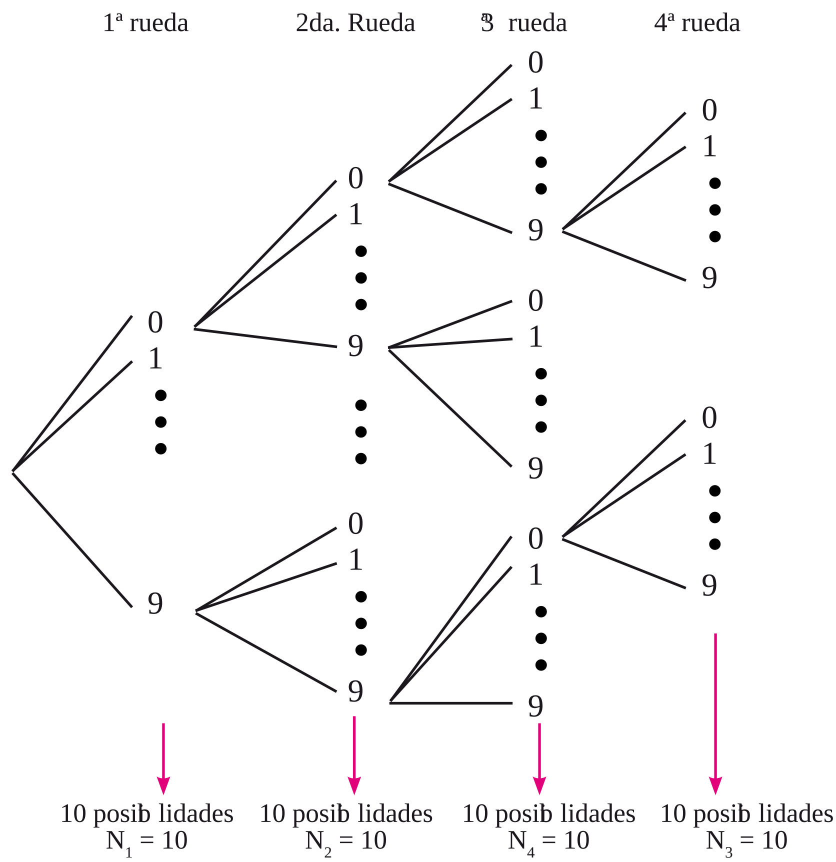
Descripción del experimento

1° ¿De cuántas etapas consiste el experimento? De cuatro.

2° ¿Quién genera los elementos de cada etapa? Los diez dígitos de cada rueda: {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9} .

Ejemplo 2
(Cont.)

Algunos resultados: 0947 0793 4370 ...



Total de números por el *PFC* $= N_1 \cdot N_2 \cdot N_3 \cdot N_4$

$$= 10 \times 10 \times 10 \times 10$$

$$= 10000$$

Ejemplo 3

Lanzamos un dado tres veces sucesivamente, ¿cuántos son los resultados posibles?

Descripción del experimento

1º ¿De cuántas etapas consiste el experimento? De tres.

2º ¿Quién genera los elementos de cada etapa? Las caras del dado: {1, 2, 3, 4, 5, 6}

Algunos resultados: 111 211 653 222 ... ¿Cuántos son?

Los resultados son de la forma $N_1 \times N_2 \times N_3$

N_1 puede tomar 6 valores (1, 2, 3, 4, 5, 6)
N_2 puede tomar 6 valores (1, 2, 3, 4, 5, 6)
N_3 puede tomar 6 valores (1, 2, 3, 4, 5, 6)

Total de resultados posibles: $6 \times 6 \times 6 = 216$

Ejemplo 4

En el estado de Sinaloa, las placas de los automóviles constan de tres letras y cuatro dígitos. La primera letra siempre es V, la segunda F o G, y la tercera, cualesquiera de las siguientes letras: A, B, C, D, E, F, G, H, I ,J, K, L, M, N, O, P, Q, R, S, T, U, V, W, X, Y, Z. Determine el número de placas diferentes que se pueden formar

Descripción del experimento

1º ¿De cuántas etapas consta el experimento? De 7, se seleccionan tres letras y cuatro números. Los resultados son de la forma: $N_1N_2N_3N_4N_5N_6N_7$

2º ¿Qué elementos generan las posibilidades?

N_1 (1ª posición): V (1 letra)
N_2 (2ª posición): F o G (2 letras)
N_3 (3ª posición): A, B, C.....X, Y o Z (26 letras)
N_4 (4ª posición): 0, 1, 2, 3..9 (10 dígitos)
N_5 (5ª posición): 0, 1, 2, 3.9 (10 dígitos)
N_6 (6ª posición): 0, 1, 2, 3..9 (10 dígitos)
N_7 (7ª posición): 0,1, 2, 3..9 (10 dígitos)

Algunos resultados: VFA1229 VFF0013 VGI1248 ...

¿Cuántos son?

Número de placas distintas: (1)(2)(26) (10)(10)(10)(10) = 520000

Actividad 34 b

1. El lenguaje de una computadora se traduce a secuencias de dígitos formados por ceros y unos. Un byte es una de estas secuencias y está formado por 8 dígitos. Por ejemplo:

0	0	1	0	1	1	0	1

¿Cuántos bytes diferentes se pueden formar?

2. ¿Cuántos números telefónicos de siete dígitos se pueden formar si el primer dígito es siete y se permite repetir dígitos?

3 Una muchacha tiene 6 blusas, 4 pantalones y 3 pares de tenis. ¿Entre cuántas indumentarias distintas puede escoger para dar un paseo en bicicleta?

4. Cinco niños echan una carrera. ¿De cuántas formas pueden ordenarse al llegar a la meta? No hay empates.

5. ¿De cuántas formas puede un entrenador de un equipo de fútbol escoger un portero, un primer suplente y un segundo suplente de siete candidatos?

6 Un dado “honesto” es lanzado cuatro veces. ¿Cuántos resultados hay en el espacio muestral de este experimento que registra para cada lanzamiento el número de puntos obtenido?

Actividad 34 b (Cont.)

7. Un estudiante planea un viaje de Culiacán a Los Mochis y de allí a Chihuahua. De Culiacán a Los Mochis puede viajar por autobús, tren o avión; sin embargo, de Los Mochis a Chihuahua, puede viajar solamente por tren o avión.
   a) ¿De cuántas formas puede hacerse el viaje?
   b) Verifique su respuesta dibujando un diagrama de árbol apropiado y contando los resultados.

8. Se lanza un dado y se extrae una ficha de una caja que contiene tres fichas numeradas 1, 2 y 3. ¿De cuántas formas puede realizarse el experimento?

9. Hay seis caminos de A a B y cuatro caminos entre B y C.
   a) ¿De cuántas formas se puede conducir de A a C pasando por B?
   b) ¿De cuántas formas se puede conducir en un viaje redondo de A a B, de B a C, y luego regresar a A pasando por B?

10. Un examen de Historia contiene una pregunta falso/verdadero y dos preguntas de opción múltiple con respuestas posibles (a), (b), (c) y (d).
   a) ¿De cuántas formas posibles puede responderse la prueba?
   b) Dibuje un diagrama de árbol y cuente las opciones para comprobar (a).

11. Se va a lanzar una moneda seis veces. ¿Cuántos resultados habrá en el espacio muestral equiprobable?

12. Se lanza un dado 6 veces. ¿Cuántos resultados habrá en el espacio muestral equiprobable?

13 ¿De cuántas formas pueden alinearse 7 estudiantes tras la puerta de la dirección para plantear un problema?

14. En un concurso de belleza, hay 11 candidatas de entre las cuales se van a escoger las ganadoras a un primer lugar, un segundo y un tercer lugar. ¿De cuántas formas puede darse el fallo?

15. Las placas para un cierto estado exhiben 3 letras seguidas por 3 números (Ejemplos: MFT-986 ó AAT-099). ¿Cuántas placas distintas pueden manufacturarse?

16. Los números de identificación para los empleados de una gran fábrica consisten de números de cuatro dígitos (tales como 0136, 4499 ó 0000).
   a) ¿Cuántos números de identificación posibles hay?
   b) ¿Cuántos números de identificación posibles hay en los que los 4 dígitos sean diferentes?

Antecedentes de permutaciones y combinaciones

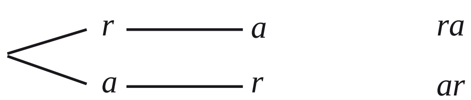
Cuando se aplica el principio fundamental de conteo, los resultados obtenidos difieren uno de otro por alguna de las siguientes razones:

- ♦ Tienen elementos diferentes.
- ♦ Tienen los mismos elementos pero distinto orden.

Por ejemplo: En una urna hay dos canicas: una roja y una azul. Se extraen dos canicas una tras otra sin reemplazamiento.

El principio fundamental de conteo (y también el diagrama de árbol), nos da dos resultados:

1ra. ext. 2da. ext. Resultados



Hay $2 \times 1 = 2$ resultados

La diferencia entre el resultado *ra* y el *ar*, es el orden en que fueron seleccionados.

ra ⟶ indica que salió primero roja y después azul
ar ⟶ indica que salió primero azul y después roja

Sin embargo, en muchas situaciones el orden no va a ser importante por lo que los resultados del principio fundamental de conteo, necesitarán de un ajuste.

Ejemplos

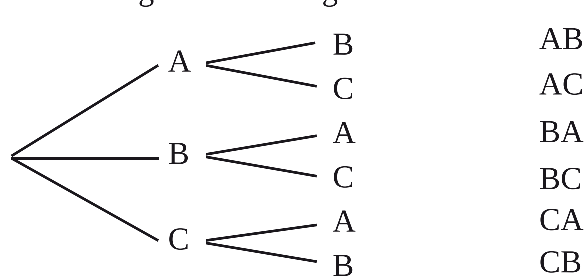
1. Se van a repartir dos boletos para un concierto entre tres muchachos. ¿Cuáles son las posibles asignaciones?

Solución:

Llamemos A, B y C a las tres muchachos.

Establezcamos el diagrama de árbol:

1ª asignación 2ª asignación Resultados



Ejemplos (Cont.)

Según el principio fundamental de conteo (*PFC*), son (3) (2) = 6 resultados posibles.

Pero, ¿qué significa el resultado *AB*? Significa que la muchacha *A* gana y que la muchacha *B* gana. ¿Y el resultado *BA*? Significa que la muchacha *B* gana y que la muchacha *A* gana.

En el contexto de la pregunta, ¿hay alguna diferencia entre el resultado *AB* y *BA*? No, no hay diferencia, los dos resultados nos indican que las muchachas *A* y *B* irán al concierto.

Si el orden no importa, el diagrama de árbol (o el principio fundamental de conteo), no nos proporciona correctamente el total de resultados posibles. Debemos buscar un método alternativo para listar todos los posibles resultados.

Una forma de proceder es la siguiente:

■ **Repartir 2 boletos entre 3 muchachas: A, B y C.**

¡HAZLO MAS FÁCIL! Si sólo fuera un boleto, sólo iría una de las tres:

A *B* *C*

Como son dos, veamos quién puede acompañar a quién:

A	***B***	***C***
AB	*BC*	
AC		

Existen tres maneras de asignar dos boletos entre tres muchachas (no hay elementos repetidos, no importa el orden).

Observa que, para formar todas las posibilidades <u>*hemos añadido a cada una, solamente las que le siguen en el orden alfabético.*</u>

■ **Supongamos ahora que son 6 muchachas:** *A, B, C, D, E* y *F.*

Si es un boleto, sólo puede ir una de ellas; las posibilidades son:

A *B* *C* *D* *E* *F*

Como son dos, le añadiremos a cada una, todas las que le siguen en el orden alfabético:

A	***B***	***C***	***D***	***E***	***F***
AB	*BC*	*CD*	*DE*	*EF*	
AC	*BD*	*CE*	*DF*		
AD	*BE*	*CF*			
AE	*BF*				
AF					

Son 15 asignaciones de 2 boletos entre 6 muchachas (no hay elementos repetidos, no importa el orden).

Ejemplos
(Cont.)

Supongamos ahora, que son tres boletos; seguiremos la misma técnica, es decir, añadiremos a cada par de elementos formados, los que le siguen en el orden alfabético a ambos.

A	*B*	*C*	*D*	*E*	*F*
ABC	*BCD*	*CDE*	*DEF*		
ABD	*BCE*	*CDF*			
ABE	*BCF*	*CEF*			
ABF	*BDE*				
ACD	*BDF*				
ACE	*BEF*				
ACF					
ADE					
ADF					

Hay 20 formas de repartir 3 boletos entre 6 muchachos.

2. Con cinco latas de pintura de distintos colores, ¿cuántas mezclas de dos colores se pueden hacer?

Solución

¡USA UNA BUENA NOTACIÓN!

Sean *A*, *R*, *V*, *N*, *B*, los cinco colores (azul, rojo, verde, negro, blanco).

Vamos a mezclar dos de ellos. **¿Importa el orden?**

La mezcla *AR* ¿es diferente de *RA*? No; no importa el orden. **Si planteamos el diagrama de árbol, tendremos resultados de más.** Usemos la técnica de agregar a cada elemento, los que le siguen en el orden establecido:

A	*R*	*V*	*N*	*B*
AR	*RV*	*VN*	*NB*	
AV	*RN*	*VB*		
AN	*RB*			
AB				

Son diez mezclas distintas.

3 En una urna hay 3 canicas: roja, negra y blanca. Extraemos dos canicas a la vez. ¿Cuáles son los resultados posibles?

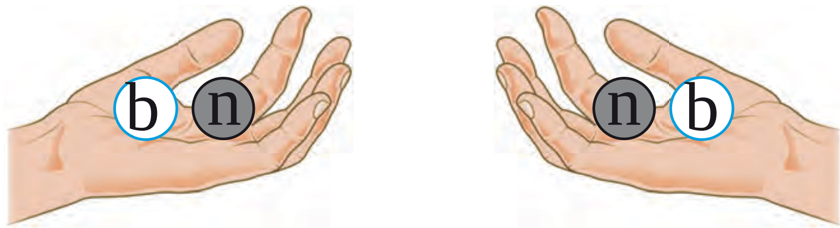
Solución

Sean **r**, **n** y **b** las tres canicas.

Las extracciones en problemas anteriores, se realizaban una tras otra. Ahora, es una extracción simultánea, así que no hay distinción por ejemplo, entre **nb** y **bn**.

Ejemplos (Cont.)

Las extracciones en problemas anteriores, se realizaban una tras otra. Ahora, es una extracción simultánea, así que no hay distinción por ejemplo, entre **nb** y **bn**.



En una extracción simultánea, no se distingue el orden: blanca - negra es lo mismo que negra - blanca.

r	***n***	***b***
r n	*n b*	
r b		

Son tres resultados al extraer simultáneamente dos canicas de 3.

Actividad 34 C

1. Un hombre tiene en su bolsillo un billete de 20, uno de 50, uno de 100 y uno de 200 pesos. ¿Cuántas sumas diferentes de dinero podrá formar dicho individuo con el dinero que trae en el bolsillo si saca dos billetes?
2. Una urna contiene cinco bolas blancas y tres negras. Si se extraen dos bolas de esa urna, simultáneamente ¿cuáles son los posibles resultados?
3. En una alcancía hay un conjunto de monedas: una de 1 centavo, una de 5 y una de 10 centavos. ¿De cuántas maneras pueden elegirse dos de ellas para que la suma sea seis centavos?

¡AVANCEMOS!

Es evidente que, si aumentamos el número de elementos, listar todas las posibles agrupaciones se volverá impráctico. Pero, ya sabemos que no necesitamos la enumeración completa de cada uno de los resultados posibles, sólo necesitamos conocer el total de ellos.

Obtendremos este total, a partir de lo que ya sabemos hacer: diagrama de árbol y principio fundamental de conteo.

¡ESTRATEGIA!

Considerar primero que importa el orden y posteriormente deshacer ese orden.

Ejemplos

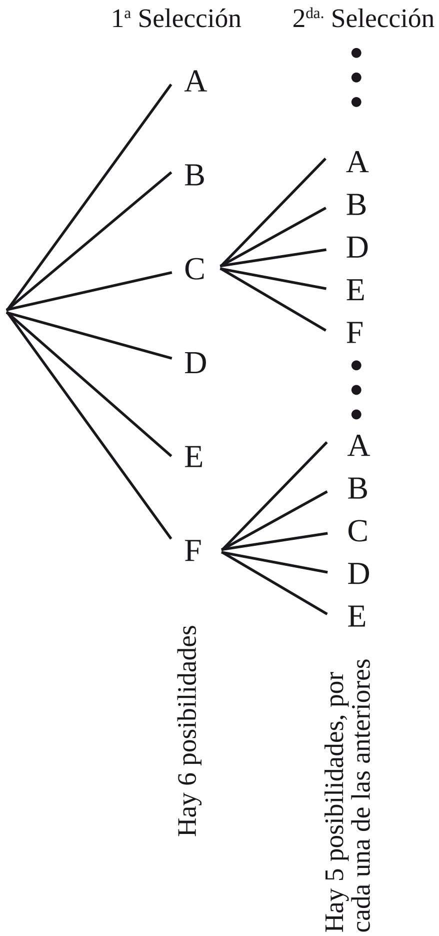
1. Se van a repartir dos boletos entre seis muchachos. ¿De cuántas formas se pueden repartir los dos boletos?

Solución:

Aplicando el principio fundamental de conteo *(PFC)* tendríamos que es un experimento de dos etapas:

En la primera seleccionamos *A, B, C, D, E* o *F*.

En la segunda seleccionamos *A, B, C, D, E* o *F* <u>exceptuando la que se seleccionó en la primera.</u>



Según el *PFC* el número de asignaciones es: $6 \times 5 = 30$

Pero, entre estos 30 resultados, se considera el orden; es decir, los resultados *AB* y *BA*, *AC* y *CA* por ejemplo, se cuentan como diferentes.

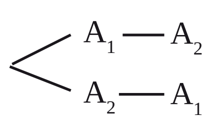
¡Cada resultado se cuenta dos veces!

AB	*BA*
AC	*CA*
AD	*DA*
⋮	⋮

Por lo tanto, **el orden se deshace dividiendo 30 entre 2**. Es decir:

$$\text{Número de maneras de asignar 2 boletos entre 6 muchachos} = \frac{\text{Resultados del PFC}}{2} = \frac{30}{2} = 15$$

En general, dos elementos A_1 y A_2, se pueden ordenar de dos formas:



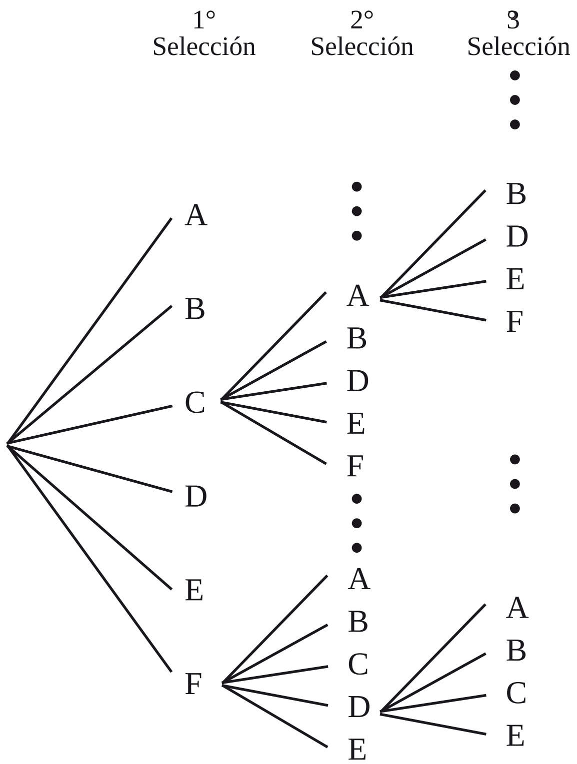
$A_1 A_2$

$A_2 A_1$

Ejemplos

2. Supong mos abr a, qe se van a repartir 3 bl etos entre las mismas 6 much ch s.

Solución



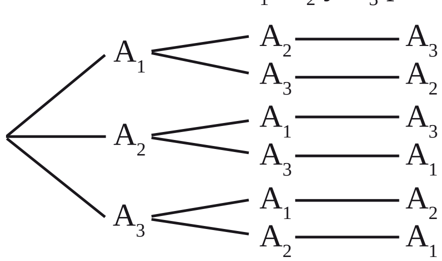
Hay (6) (5)(4) = 120 resultados, pero este total considera el orden; por ejemplo, ABC lo cuenta diferente a ACB, a BAC, a BCA, a CAB y CBA. **Cd a esultd o ec uent6 ces.**

Por lo tanto, el orden se deshace dividiendo 120 entre 6

Núm ero de maneras de asiga r 3bl etos entre 6m uch ch s =

$$= \frac{\text{Resultados del PFC}}{2} = \frac{120}{6} = 20$$

En g neral, 3 elementos A_1, A_2 y A_3 pueden ordenarse de seis formas:



$A_1\ A_2\ A_3$
$A_1\ A_3\ A_2$
$A_2\ A_1\ A_3$
$A_2\ A_3\ A_1$
$A_3\ A_1\ A_2$
$A_3\ A_2\ A_1$

RECAPITULEMOS:

2 objetos se ordenan de 2 maneras: $2 \times 1 = 2$
3 objetos se ordenan de 6 maneras: $3 \times 2 \times 1 = 6$
4 objetos se ordenarán de: $4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$ maneras,
5 objetos se ordenarán de: $5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$ maneras.
⋮

Es el momento de conocer un nuevo símbl o matemático: el **FACTORIAL**.

El símbl o $n!$ Se lee "ene factorial" y se define como:

$$n! = (n)(n-1)(n-2)(n-3)...(3)(2)(1)$$

Así: $2! = 2 \times 1$
$4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1$
$3! = 3 \times 2 \times 1$
$10! = 10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$

De acuerdo con esta definición, tenemos que:

2 objetos se ordenan de 2! maneras
3 objetos se ordenan de 3! maneras
4 objetos se ordenan de 4! maneras
•
•
•
n objetos se ordenan de ***n!*** maneras

Conclusión:

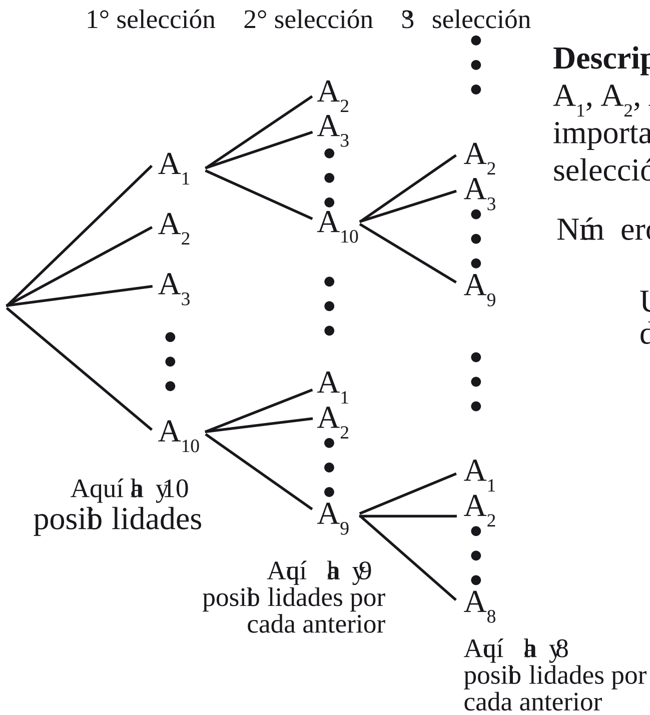
Si hemos seleccionado ***n*** objetos y no nos interesa el orden, aplicamos la siguiente fórmula:

$$\text{Número de objetos sin considerar el orden} = \frac{\textit{Resultados del PFC}}{n!}$$

Ejemplos

1. Diez jugadores participan en una competencia de ajedrez. Los tres primeros clasifican para jugar otro importante torneo sin importar el lugar (1°, 2° ó 3°) que ocupen en éste. ¿De cuántas formas se pueden seleccionar tres entre los 10 participantes?

Solución



Descripción del experimento. De 10 jugadores: $A_1, A_2, A_3, A_4, \ldots A_{10}$, serán seleccionados tres sin importar el orden: 1ª selección, 2ª selección y 3ª selección.

Número de selección de 3 con orden = (10)(9)(8)

Un resultado como $A_1 A_2 A_3$ lo considera diferente a:

$$\left\{ \begin{array}{l} A_1 A_3 A_2 \\ A_2 A_1 A_3 \\ A_2 A_3 A_1 \\ A_3 A_1 A_2 \\ A_3 A_2 A_1 \end{array} \right.$$

Ejemplos
(Cont.)

Pero, como no importa el orden, debemos deshacerlo. Para ello, **dividimos la respuesta entre el número de maneras en que se ordenan 3 objetos**.

$$\text{Número de selecciones de 3 objetos sin orden} = \frac{10\times9\times8}{n!} = \frac{10\times9\times8}{3\times2\times1} = 120$$

Por lo tanto, existen 120 clasificaciones distintas de 3 elementos.

2 El sorteo MELATE, consiste en escoger seis números de 56 disponibles {1, 2, 3, ..., 56}. El resultado del sorteo son seis números naturales y un séptimo número llamado adicional. Para ganar el primer lugar, necesitas acertar a los seis números naturales. ¿De cuantas maneras distintas se puede llenar la boleta del MELATE?

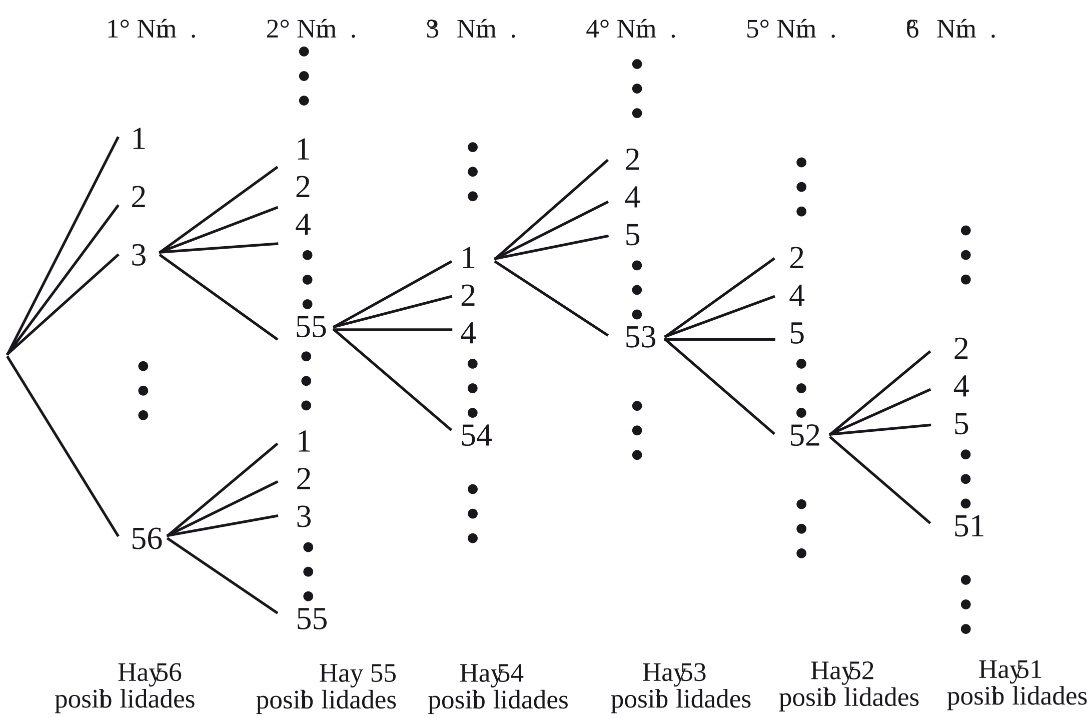
Solución

Descripción del experimento

Experimento de seis etapas. Cada una consiste en escoger un número.

Para el primer número, hay 56 números disponibles.

Habiendo escogido el primer número, para el segundo quedan 55 posibilidades; asimismo para el tercero habrá 54, para el cuarto 53, para el quinto 52 y para el sexto 51.



Ejemplos (Cont.)

Número de maneras de seleccionar 6 números de un total de 56 con orden = (56) (55)(54)(53) (52)(51) = 23,377,273,920

Pero, como no importa el orden, debemos deshacerlo. Para ello, dividimos la cantidad obtenida entre la manera como se ordenan 6 objetos.

$$\textit{Número de maneras de seleccionar 6 números de 56 sin orden} = \frac{56\times 55\times 54\times 53\times 52\times 51}{6!}$$

$$= \frac{23377273920}{720}$$

$$= 32,468,436$$

Hay 32 468 436 maneras de llenar la boleta del **MELATE.**

Actividad 34

1. Con 6 latas de pintura de distintos colores, ¿cuántas mezclas de dos colores se pueden hacer?

2. Con 6 botes de pintura de distintos colores, ¿cuántas mezclas de tres pinturas se pueden hacer?

3. Para realizar cierto experimento, se seleccionan al azar, a cuatro estudiantes de un grupo de 20. ¿Cuántos grupos diferentes de cuatro estudiantes son posibles?

4. Hay 40 números en la lotería de un estado. ¿En cuántas formas puede un jugador seleccionar seis de los números? (El orden de la selección no es importante)

5. Supongamos que hay 30 estudiantes en un grupo y que todos deciden empezar a conocerse dándose un apretón de manos. Cada persona estrecha la mano derecha de todos los demás. ¿Cuántos apretones de mano tendrán lugar?

Permutaciones

En los problemas de selecciones y extracciones, partimos de *m* elementos distintos:

$$A_1, A_2, A_3 \ldots A_m$$

De estos *m* elementos, seleccionamos *n* de ellos, formando grupos distintos. Recordemos que un grupo formado se diferencia de otro, por los elementos que lo componen o por el orden en que aparecen.

Cuando importa el orden, grupos como *ABC, BAC, CAB* se consideran diferentes aunque tengan los mismos elementos (se distinguen por el orden en que aparecen).

Permutación. Una permutación de *n* elementos diferentes,es una ordenación de los ***n*** elementos de tal suerte que un elemento sea primero, otro sea segundo, otro más sea tercero y así sucesivamente hasta la posición enésima. El número de permutaciones de ***n*** elementos se simboliza por P_n.

Ejemplos de permutaciones son:

- ♦ Las formas en que pueden llegar 6 corredores a la meta
- ♦ Las tiras de 4 letras distintas que podemos formar con P, A, T, O.

Permutaciones de P, A, T, O

PATO	APTO	TPAO	APAT
PAOT	APOT	TPOA	OPTA
PTAO	ATPO	TAPO	OAPT
PTOA	ATOP	TAOP	OATP
POAT	AOTP	TOPA	OTPA
POTA	AOPT	TOAP	OTAP

$P_4 = 24$

Los números de tres cifras distintas que se pueden formar con 3, 4, 5.

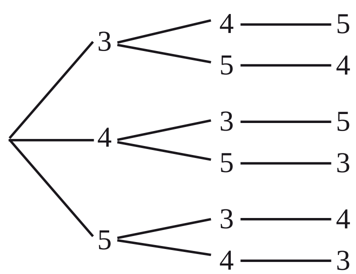
Permutaciones de 3, 4 y 5:

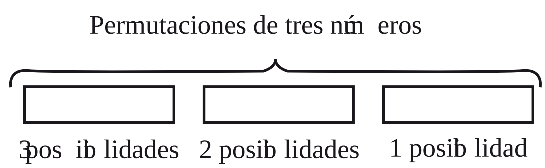
345	435	534
354	453	543

$P_3 = 6$

Más que enumerar todas las permutaciones, recordemos que estamos interesados en el número total de ellas. Para ello, nos auxiliaremos en el principio fundamental de conteo.

Por ejemplo, en el caso de los tres números (3, 4 y 5) se puede razonar que hay tres opciones para la primer cifra, dos para la segunda y sólo una para la tercera. Visto en un diagrama:





Por lo tanto, el número de permutaciones de tres números es: $P_3 = (3)(2)(1) = 3! = 6$

Ejemplo

¿Cuántas permutaciones diferentes son posibles para las letras *A, B, C, D, E y F?*

Solución

Dado que hay demasiadas permutaciones diferentes por enumerar, vamos a usar el siguiente razonamiento:

1ra. posición: cualquiera de seis letras
2da. posición: cualquiera de cinco letras
3ra. posición: cualquiera de cuatro letras
4ta. posición: cualquiera de tres letras
5ta. posición: cualquiera de dos letras
6ta. posición: la última letra restante

Permutaciones de seis letras

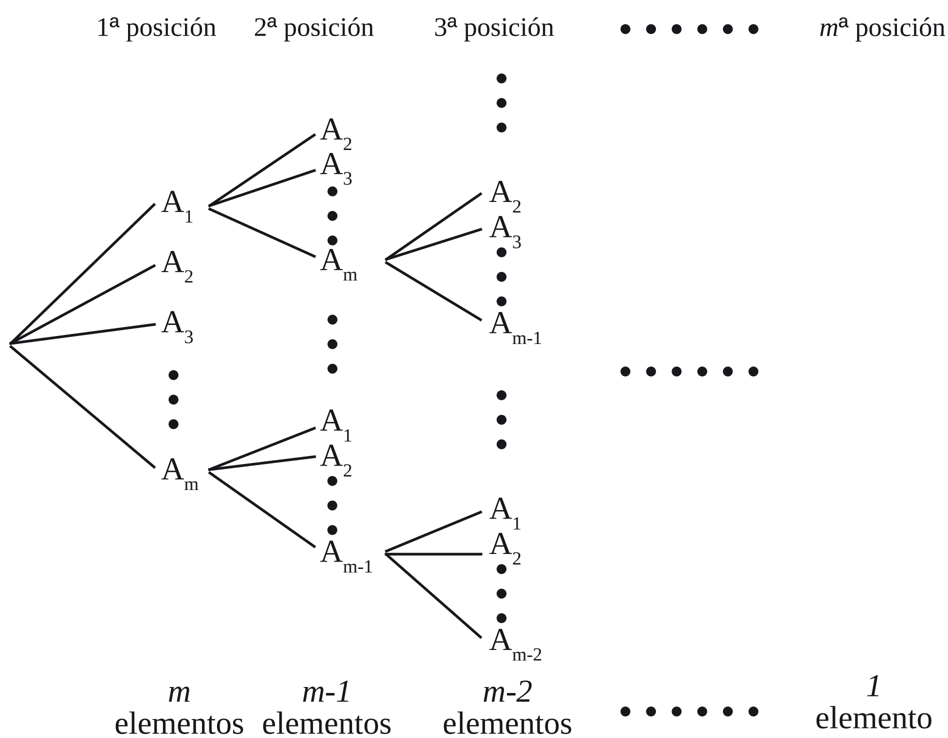
6 posibilidades	5 posibilidades	4 posibilidades	3 posibilidades	2 posibilidades	1 posibilidad

Usando el principio fundamental de conteo, encontramos que el número total de permutaciones de las seis letras es:

$$P_6 = (6)(5)(4)(3)(2)(1) = 6! = 720$$

Generalicemos: **El número de permutaciones de *m* elementos se designa por P_m** y para conocer su fórmula procedemos como sigue:

Como partimos de m elementos: $A_1, A_2, \ldots A_m$, formamos el siguiente diagrama de árbol:



Aplicando el principio fundamental de conteo, las permutaciones de *m* elementos son:

$$P_m = \underbrace{(m)(m-1)(m-2)(m-3)...(2)(1)}_{m \text{ factores}}$$

$$\boxed{P_m = m!}$$

El número de permutaciones de *m* elementos es: $P_m = m(m-1)(m-2)\ldots(2)(1) = m!$
En otras palabras, hay ***m!*** formas diferentes en que ***m*** elementos se pueden ordenar.

Ejemplos

• Números distintos de 3 cifras con 3, 4 y 5

$3! = (3)(2)(1) = 6$

$P_3 = 3! = 6$

• Tiras distintas de 4 letras con *PATO*

$4! = (4)(3)(2)(1) = 24$

$P_4 = 4! = 24$

• Clasificaciones diferentes de 6 corredores

$6! = (6)(5)(4)(3)(2)(1) = 720$

$P_6 = 6! = 720$

• Distintas formas en que pueden sentarse los 40 alumnos de una clase en los 40 lugares que hay

$40! = (40)(39)\ldots(3)(2)(1)$

$= 81591528324\ 78980\ 000000\ 000000\ 00000\ 000000\ 00000\ 0\ 000$

$= 8.15915283247898 \times 10^{47}$

$P_{40} = 40! = 8.15915283247898 \times 10^{47}$

Características de las permutaciones

Partimos de ***m*** elementos distintos $A_1, A_2, A_3 \ldots A_m$. Se llaman permutaciones de esos ***m*** elementos a las distintas ordenaciones que podemos hacer con ellos. Una permutación se diferencia de otra sólo en el orden, pues en ambas aparecen los mismos elementos.

Permutaciones de m elementos tomados n a la vez*.

Ocasionalmente, puede interesar ordenar un subconjunto de un grupo de elementos en lugar de todo el grupo (**$n \leq m$**). Por ejemplo, de seis corredores, sólo pueden interesar los tres que ganan medalla. (Aquí se escogen tres de seis y se ordenan). Esta ordenación es una permutación de 6 elementos tomados 3 a la vez.

Esto se escribe: ${}_6P_3 \longrightarrow$ *Permutación de 6 elementos tomados 3 a la vez.*

Ejemplos

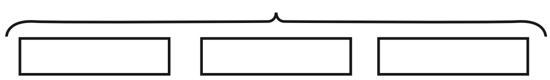
1. Ocho caballos toman parte en una carrera. ¿De cuántas formas diferentes pueden llegar estos caballos en los lugares primero, segundo y tercero? (supóngase que no hay empates).

Solución

Tenemos las siguientes posibilidades:
Ganar (primera posición): *ocho opciones*
Segunda posición: *siete opciones*
Tercera posición: *seis opciones*

Usando el principio fundamental de conteo, multiplicamos estos tres números para obtener lo siguiente:

Ordenaciones diferentes en que llegan 8 caballos
a los tres primeros lugares



8 7 6

Por lo tanto, hay (8)(7)(6) = 336 ordenaciones diferentes. Así,

$${}_6P_3 = \underbrace{(8)(7)(6)}_{3\text{ factores}}$$

2) Otros problemas similares:

• De 6 corredores, nos interesa el número de formas en que pueden ganar las tres medallas:

$${}_6P_3 = \underbrace{(6)(5)(4)}_{3\text{ factores}} = 120$$

Permutaciones de 6 elementos tomados 3 a la vez.

• Número de formas en que 6 corredores ocupan 4 lugares:

$${}_6P_4 = \underbrace{(6)(5)(4)(3)}_{4\text{ factores}} = 360$$

Permutaciones de 6 elementos tomados 4 a la vez.

(*) También se conocen como **variaciones sin repetición** de *m* elementos tomados de *n* en *n*. De acuerdo con esto, las variaciones de *n* elementos tomados de *m* en *m* se llaman permutaciones de *m* elementos.

Ejemplos

• 6 corredores ocuparían 5 lugares:

$${}_{10}P_5 = \underbrace{(6)(5)(4)(3)(2)}_{5\ \text{factores}} = 720$$

Permutaciones de 6 elementos tomados 5 a la vez.

¿Por qué ${}_6P_5 = {}_6P_6$? Observa que una vez que se han ocupado los 5 primeros lugares entre 6 corredores, el sexto lugar queda ya determinado por el corredor restante.

• 6 corredores ocuparían 6 lugares:

$${}_6P_6 = P_6 = \underbrace{(6)(5)(4)(3)(2)(1)}_{6\ \text{factores}} = 720$$

Simplificamos la notación cuando tomamos los *m* elementos

• 10 corredores ocuparían 4 lugares:

$${}_{10}P_4 = \underbrace{(10)(9)(8)(7)}_{4\ \text{factores}} = 5040$$

• *m* corredores ocuparían *n* lugares:

$${}_mP_n = \underbrace{(m)(m-1)(m-2)\ldots}_{n\ \text{factores}}$$

→ Permutaciones de *m* elementos tomados *n* a la vez

Fórmula de permutaciones como creciente de factoriales

Ya sabemos que:

$${}_mP_n = (m)(m-1)(m-2)\ldots \text{ hasta un total de } n \text{ factores.}$$

Vamos a precisar, el último factor:

1° *factor*	2° *factor*	3° *factor*		*n*° *factor*
↓	↓	↓		↓
m	$m-1$	$m-2$	• • •	$m-(n-1) = m-n+1$

Por tanto, la fórmula queda así:

$${}_mP_n = (m)(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)$$

Puedes comprobarlo en varios casos perticulares:

último factor

$${}_7P_3 = (7)(6)(5) \longrightarrow 7-3+1 = 5$$
$${}_{11}P_4 = (11)(10)(9)(8) \longrightarrow 11-4+1 = 8$$
$${}_6P_2 = (6)(5) \longrightarrow 6-2+1 = 5$$
$${}_5P_5 = (5)(4)(3)(2)(1) = P_5 \longrightarrow 5-5+1 = 1$$

Multipliquemos y dividamos por $(m - n)!$ la fórmula de ${}_mP_n$

$$ {}_nP_m = \frac{(m)(m-1)(m-2)...(m-n+1)(m-n)!}{(m-n)!} $$

Pero, el numerador es:

$$ (m)(m-1)(m-2)...(m-n+1)(m-n)\ (m-n-1)...\ (2)(1) = m! $$

Por tantо: $\boxed{{}_mP_n = \dfrac{m!}{(m-n)!}}$

Por ejemplo, verifiquemos el número de permutaciones de ocho caballos tomados tres a la vez:

$$ {}_8P_3 = \frac{8!}{(8-3)} = \frac{(8)(7)(6)\ (\cancel{5!})}{\cancel{5!}} = (8)(7)(6) = 336 $$

que es la misma respuesta ya obtenida.

Con esta fórmula, ¿cómo se expresaría ${}_mP_m$?

$$ {}_mP_m = \frac{m!}{(m-m)!} = \frac{m!}{0!} $$

Pero, ya sabemos que ${}_mP_m = P_m = m!$

Por lo tanto: $\dfrac{m!}{0!} = m!$

Para que se cumpla esta igualdad, **tendremos que asumir que:**

$$ \boxed{\mathbf{0! = 1}} $$

Ejemplos

1. De un comité de 10 personas, va a seleccionarse un presidente, un vicepresidente y un tesorero. ¿De cuántas formas puede hacerse esta elección?

Solución

Se seleccionan 3. Puesto que la forma en la que son asignados los candidatos a las 3 ocupaciones afecta sus responsabilidades, importa el orden.

Diez personas: $\underbrace{P_1\ \ P_2\ \ P_3\ \ P_4\ \ P_5\ \ P_6\ \ P_7\ \ P_8\ \ P_9\ \ P_{10}}$

Selección de 3 con orden. Es un conteo de permutaciones

$$ {}_{10}P_3 = \frac{10!}{(10-3)!} = \frac{10!}{7!} = \frac{(10)(9)(8)(\cancel{7!})}{\cancel{7!}} = (10)(9)(8) = 720 $$

Ejemplos

2 En un recipiente, hay diez pelotas numeradas de 0 a 9. Un niño saca una de ellas al azar y la guarda; saca una segunda y la conserva. ¿Cuántos resultados posibles hay?

Solución

Dos selecciones sin reemplazamiento con orden. Es una permutación
Diez números:

$$\underbrace{0\quad 1\quad 2\quad 3\quad 4\quad 5\quad 6\quad 7\quad 8\quad 9}$$

Selección de 2 con orden. Es un conteo de permutaciones

$${}_{10}P_2 = \frac{10!}{(10-2)!} = \frac{10!}{8!} = \frac{(10)(9)(\cancel{8!})}{\cancel{8!}} = (10)(9) = 90$$

Actividad 34

1. Calcula:

   a) $8!$ b) $2!$ c) $(4!)(0!)$

   d) $\dfrac{6!}{3!}$ e) $\dfrac{12!}{10!}$ f) $\dfrac{100!}{99!}$ g) $\dfrac{88!}{(86!)(2!)}$

2. Escribe en cada caso, todos los factores:

   a) ${}_4P_2$ b) ${}_5P_2$ c) ${}_9P_6$

   d) ${}_mP_n$ e) ${}_{n+1}P_n$ f) ${}_{n+2}P_{n+1}$

3. Escribe en la forma ${}_mP_n$:

   a) $(m)(m-1)(m-2)$

   b) $(m+1)(m)(m-1)(m-2)(m-3)$

   c) $(m-3)(m-4)\ldots(m-9)$

   d) $(m-7)(m-8)\ldots(m-24)$

4. Extraemos una carta de una baraja de 40. Después de dejarla sobre la mesa, extraemos una segunda, que colocamos junto a la anterior, y una tercera. ¿De cuántas formas puede seleccionarse el trío de cartas?

5. ¿De cuántas formas puede alinearse a cinco niños en una sola fila para que les tomen una foto?

Actividad 3.4 (Cont.)

6. Entre un grupo de 12 candidatos se ocuparán las oficinas del presidente, vicepresidente, secretario y tesorero. ¿En cuántas formas diferentes pueden ocuparse las oficinas, si cualquiera de los 12 candidatos puede ocupar cualquier oficina?

7. Considere las “palabras” diferentes de tres letras que se pueden formar con las cinco vocales: a, e, i, o, u.
   a) ¿Cuántas palabras de tres letras se pueden formar si no se permiten repeticiones?
   b) ¿Cuántas son las palabras diferentes que se forman sin repetición y con la letra “o” en el centro?
   c) ¿Cuántas palabras diferentes se pueden formar, sin repeticiones que tengan, la “u” y la i al principio y al final?
   d) ¿Cuántas palabras diferentes se pueden formar con la letra “a” y otras dos vocales?

8. Tome en cuenta los números de tres cifras que se pueden formar usando los dígitos 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9. Además suponga que no se permite la repetición de ningún dígito, a menos que se especifique lo contrario:
   a) ¿Cuántos números naturales de tres dígitos se pueden formar?
   b) ¿Cuántos números naturales pares, de tres cifras, se pueden formar?
   c) ¿Cuántos números naturales de tres cifras y mayores que 600 se pueden formar?

9. ¿De cuántas maneras se pueden acomodar las letras de MEDIO, usando cada letra una sola vez en cada acomodación?

10. Un equipo de béisbol consta de nueve jugadores en el terreno de juego. ¿Cuántas maneras diferentes de determinar el orden de pasar a batear son posibles? ¿Cuántas son aceptables si se desea que el receptor (catcher) batee al último?

11. Cuatro personas se forman para bajar un tobogán, pero sólo dos de los cuatro desean tomar la primera posición. Con esa limitante, ¿De cuántas formas pueden tomar asiento las cuatro personas en el tobogán?

Combinaciones

Si en determinado problema el orden no tiene importancia, grupos como *ABC, ACB, BAC, BCA, CAB* y *CBA* se consideran uno solo. Todos forman una sola combinación.

$$\left.\begin{array}{l} ABC \\ ACB \\ BAC \\ BCA \\ CAB \\ CBA \end{array}\right\} \text{Una sola combinación: } \boldsymbol{ABC}$$

Ejemplos

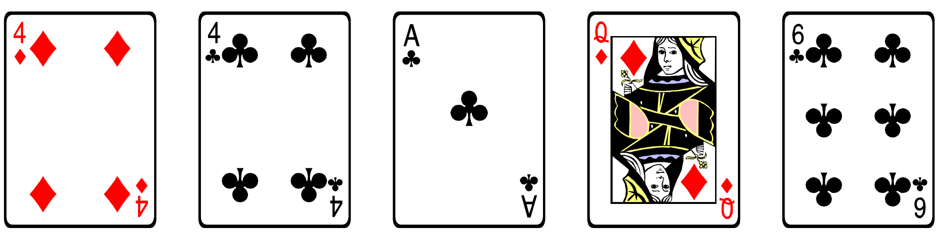
- Por ejemplo, si A, B y C son colores a mezclar para formar otro color, no importa el orden en que se mezclen.
- Si queremos repartir dos boletos entre seis muchachas (A, B, C, D, E y F) los resultados AB y BA indican lo mismo.

$$\left.\begin{array}{l} \text{AB} \\ \text{BA} \end{array}\right\} \text{Una sola combinación: AB}$$

- Si de una caja con tres canicas negras y dos blancas extraemos dos simultáneamente, no hay diferencia entre ● ○ y ○ ●.

$$\left.\begin{array}{l} \text{● ○} \\ \text{○ ●} \end{array}\right\} \text{Una sola combinación: negra, blanca}$$

- En un juego de cartas, el jugador es libre de reordenar las cartas después que hayan sido repartidas (si alguien tiene un As, no importa en qué momento se lo entregaron).



- En el sorteo MELATE se trata de escoger 6 números de un total de 56, sin importar el orden de selección.

En todos estos ejemplos, los grupos formados de objetos se llaman combinaciones.

Combinación. Una combinación, es una forma en la que pueden presentarse los objetos, y en la que el orden de aparición no importa.

NOTACIÓN

- Si de tres objetos seleccionamos dos sin importar el orden, se forma una combinación de 3 objetos tomados dos a la vez.

  Escribimos: $_3C_2$ se lee: "**combinación de 3 objetos tomados dos a la vez**".

  O bien: $\binom{3}{2}$

- Si repartimos dos boletos entre 6 personas, no importa el orden, por lo que formamos una combinación de 6 objetos tomados dos a la vez.

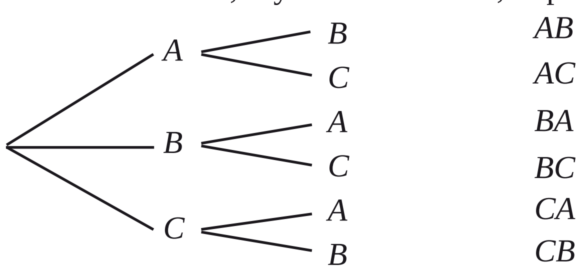
  $_6C_2$ o $\binom{6}{2}$ Combinación de 6 objetos tomados dos a la vez

- Si repartimos 5 cartas de una baraja de 52, no importa el orden, por lo que formamos una combinación de 52 objetos tomados 5 a la vez.

  $_{52}C_5$ o $\binom{52}{5}$ Combinación de 52 objetos tomados 5 a la vez

Fórmula de las combinaciones

Si de tres letras *A*, *B* y *C* tomamos dos, importando el orden, obtenemos:



Sabemos que esto es una permutación de 3 objetos tomados 2 a la vez.

$$_3P_2 = \frac{3!}{(3-2)!} = \frac{3!}{1!} = (3)(2) = 6$$

Revisemos los resultados que tienen las mismas letras:

6 permutaciones

AB, BA — origina una combinación: AB

AC, CA — origina una combinación: AC

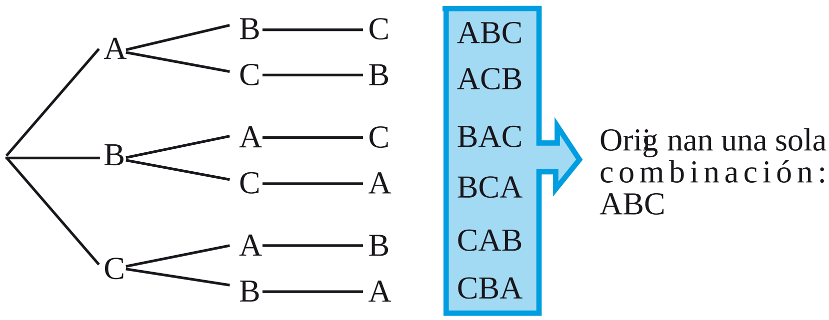
BC, CB — origina una combinación: BC

Tomar 2 letras de 3 posibles, origina 3 combinaciones.

El número de combinaciones de tres objetos tomados 2 a la vez, es igual a la ***mitad*** *del número de* ***permutaciones****:*

$$ {}_3C_2 = \frac{{}_3P_2}{2} = \frac{6}{2} = 3 $$

Si tomamos los tres objetos, tendremos las siguientes permutaciones:



El número de combinaciones de tres objetos tomados 3 a la vez, es igual al número de permutaciones dividido entre 6

$$ {}_3C_3 = \frac{{}_3P_3}{6} = \frac{6}{6} = 1 $$

¿Qué número tiene el denominador?

Es el número de veces que se pueden ordenar los objetos tomados.

En el primer ejemplo, 2 objetos se ordenan de 2 maneras:

$$ {}_3C_2 = \frac{{}_3P_2}{2} $$

En el segundo ejemplo, 3 objetos se ordenan de 6 maneras.

$$ {}_3C_3 = \frac{{}_3P_3}{6} $$

Pero, sabemos que : 2 objetos se ordenan de 2! maneras
3 objetos se ordenan de 3! maneras
4 objetos se ordenan de 4! maneras
n **objetos se ordenan de *n*! maneras**

Entonces:

$$ {}_3C_3 = \frac{{}_3P_3}{6} $$

$$ {}_3C_2 = \frac{{}_3P_2}{2!} $$

En general, si de m objetos tomamos n (con $n \leq m$), sin importar el orden, se forman:

$$ \frac{{}_mP_n}{n!} \quad \textit{combinaciones} $$

Ejemplo

Encuentra el número de combinaciones de las 4 letras A, B, C y D tomadas 3 a la vez.

- El número de permutaciones de 4 objetos tomados tres a la vez es:

$$ {}_4P_3 = \frac{4!}{(4-3)!} = \frac{4!}{1!} = (4)(3)(2) = 24 $$

Cada objeto se ordena de 3! = 6 maneras. Entonces, el número de combinaciones de 4 objetos tomados 3 a la vez es:

$$ {}_4C_3 = \frac{24}{6} = 4 $$

En general, el número de combinaciones de m objetos tomados n a la vez es igual a:

$$ {}_mC_n = \frac{{}_mP_n}{n!} $$

Pero: $$ {}_mP_n = \frac{m!}{(m-n)!} $$

Por tanto: $$ {}_mC_n = \frac{\dfrac{m!}{(m-n)!}}{n!} = \frac{m!}{n!(m-n)!} $$

$$ \boxed{{}_mC_n = \binom{m}{n} = \frac{m!}{n!(m-n)!}} $$

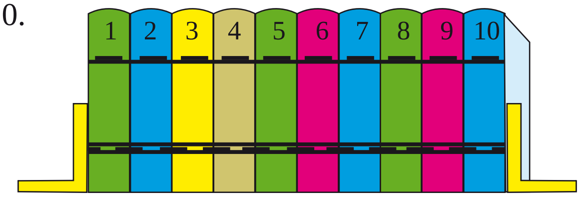
Características de las combinaciones

Partimos de m elementos distintos, A_1, A_2, A_3, . . ., A_m. Se llaman combinaciones de esos ***m*** elementos tomados de ***n* en *n*** (con $n \leq m$), a los grupos de n elementos distintos que se pueden formar, de modo que un grupo se diferencia de otro por los elementos que lo componen, sin que importe el orden en que aparezcan.

Ejemplos

1. Encuentra el número de formas en que un estudiante puede escoger tres libros de una lista de 10.

Solución

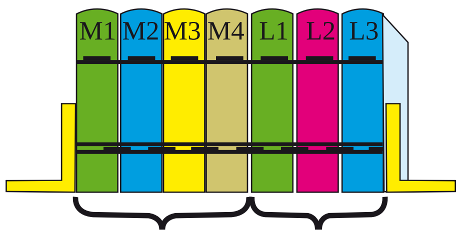


Seleccionar 3 sin orden

$$_{10}C_3 = \binom{10}{3} = \frac{10!}{3!(10-3)!} = \frac{10!}{3!\,7!} = \frac{(10)(9)(8)\cancel{(7!)}}{3!\,\cancel{7!}} = \frac{(10)(9)(8)}{(3)(2)(1)} = 120$$

2 Encuentra el número de formas en que un estudiante puede seleccionar 2 libros de matemáticas y dos de literatura, de un estante con 4 libros de matemáticas y 3 libros de literatura.

Solución



Seleccionar 2 Seleccionar 2

$_4C_2$ $_3C_2$

Los dos libros de matemáticas se seleccionan de:

$$_4C_2 = \binom{4}{2} = \frac{4!}{2!(4-2)!} = \frac{4!}{2!2!} = \frac{(4)(3)\cancel{(2!)}}{2!\cancel{2!}} = \frac{(4)(3)}{(2)(1)} = 6 \text{ maneras}$$

Y los dos libros de literatura se seleccionan de:

$$_3C_2 = \binom{3}{2} = \frac{3!}{2!(3-2)!} = \frac{3!}{2!1!} = \frac{(3)\cancel{(2!)}}{\cancel{2!}1!} = \frac{(3)}{(1)} = 3 \text{ maneras}$$

Hay 6 maneras posibles de elegir dos libros de matemáticas, y dado que cada una de estas maneras se puede agrupar con cualquiera de las tres maneras posibles de elegir los dos libros de literatura, el principio fundamental de conteo, nos da:

$_4C_2 \times {}_3C_2 = (6)(3) = 18$ maneras de seleccionar dos de matemáticas y dos de literatura.

¿Cómo orientarse ante problemas de combinatoria?

¿Cómo saber ante cada uno de los problemas que se presentan si se trata de permutaciones (y de qué tipo específico) o de combinaciones?

Si los leemos detenidamente y los analizamos con profundidad podemos identificar de qué situación se trata.

Cuando se trata de formar agrupaciones de elementos hay que preguntarse dos cosas importantes:

- ¿Se permite o no que los elementos se repitan?
- ¿Es importante o no el orden en que se agrupan los elementos?

Las respuestas a estas preguntas dependerán del enunciado del problema.

A continuación un cuadro resumen:

	¿Influye el orden?	¿Puede haber repetición?	Fórmula
P_m permutaciones	Si	No	$P_m = m!$
${}_mP_n$ permutaciones de m elementos tomados de n en n ($n \leq m$)	Si	No	${}_mP_n = \dfrac{m!}{(m-n)!}$
${}_mC_n$ combinaciones ($n \leq m$)	No	No	${}_mC_n = \dfrac{m!}{n!\,(m-n)!}$

Actividad 3.4

1. En cada caso, decir si se trata de permutación o de combinación. Plantear la fórmula. No hacer cálculos.
   a) Las maneras de arreglar 5 cuadros en línea sobre una pared.
   b) Las maneras en que se pueden elegir a 3 personas de un grupo de 5.
   c) Las maneras en que se pueden elegir al primero y al segundo violinista entre 6 músicos.
   d) La manera en que se pueden elegir 4 suéteres de 7.
   e) Las maneras en que se pueden arreglar 5 sillas en una fila.
   f) Posibles resultados finales de 7 personas en una carrera si no hay empates.

2. De las 30 preguntas de que consta un test, se deben contestar veinte. (a) ¿de cuántos modos se pueden elegir esas veinte preguntas? (b) Si las diez primeras preguntas son obligatorias, ¿de cuántos modos se pueden elegir las otras diez?

3 Una fábrica de helados prodece doce sabores diferentes. (a) ¿Cuántos helados de tres sabores diferentes (tres gustos) se pueden fabricar? (b) ¿Y si consideramos el orden en los sabores?

4. Nos han regalado ocho novelas y cinco libros de poesía y queremos elegir tres de los primeros y dos de los segundos para leerlos en vacaciones. ¿De cuántas formas podemos elegir los cinco libros?

Actividad 34 f (Cont.)

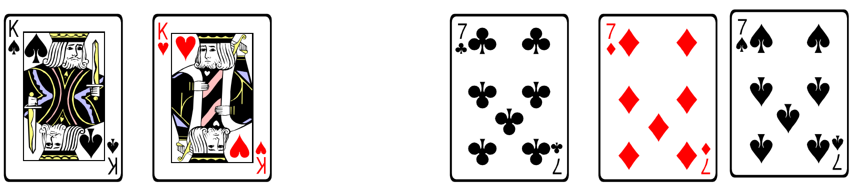
5. ¿Cuántos subconjuntos de cuatro elementos pueden formarse en un conjunto de 100 elementos?

6. Entre un grupo de ocho estudiantes graduados y cinco que aún no están graduados, ha de seleccionarse una comisión formada por tres estudiantes de los primeros y dos de los segundos. ¿Cuántas comisiones diferentes pueden formarse?

7. Un patrón entrevista a ocho personas para cuatro puestos en su compañía; tres de las ocho personas son mujeres. Si las ocho satisfacen los requisitos, ¿de cuántas formas puede el patrón ocupar los cuatro puestos sí:
   a) La selección es aleatoria?
   b) Exactamente dos mujeres?

8. De un grupo de cuatro parejas han de seleccionarse al azar cuatro personas. ¿De cuántas formas puede hacerse esto, dadas las siguientes condiciones?
   a) No hay restricciones
   b) Habrá al menos una pareja en el grupo de cuatro
   c) La selección debe incluir un miembro de cada pareja.

9. ¿De cuántas maneras se pueden repartir manos de póker con una baraja de 52 cartas de modo que los 5 naipes formen un par y una tercia (Dos reyes y tres sietes integran una mano de este tipo).



Cálculo de probabilidades aplicando técnicas de la combinatoria

A continuación utilizaremos las técnicas de la combinatoria para resolver problemas de probabilidad. Como ya se mencionó, estas técnicas resultan particularmente útiles en aquellas situaciones en las que resulta impráctico plantear el diagrama de árbol.

Ejemplos

1. Se lanza un dado tres veces seguidas; determina la probabilidad de los siguientes sucesos:
   a) A_1 : "Cae un punto en el primero, un punto en el segundo y un número diferente de uno en el tercero".
   b) A_2 : "Cae un número par en cada lanzamiento".
   c) A_3 : "Caen tres puntos en cada lanzamiento".
   d) A_4 : "Caen números diferentes".

Solución

1° Descripción del experimento:

Son tres lanzamientos consecutivos.

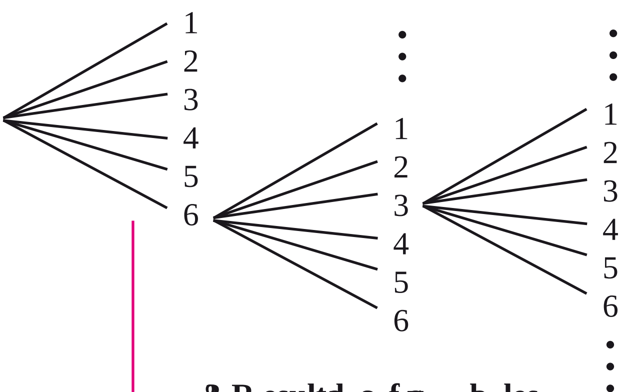
Algunos resultados:

111, 116, 161, 222, ...

Los resultados posibles son de la forma: $N_1\ N_2\ N_3$

N_1 es el resultado del 1er. lanzamiento. Puede ser: 1,2,3,4,5 ó 6
N_2 es el resultado del 2do. lanzamiento. Puede ser: 1,2,3,4,5 ó 6
N_3 es el resultado del 3er. lanzamiento. Puede ser: 1,2,3,4,5 ó 6

2° Espacio muestral. Diagrama de árbol:



(Hay 6 posibilidades en cada etapa)

N(S) = 6 × 6 × 6 = 216

3° Resultados favorables

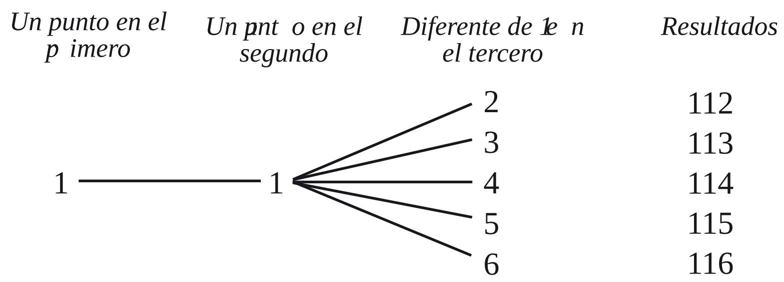
Sucesos:

a) A_1: "*1 en el primero, 1 en el segundo y número diferente de 1 en el tercero*".

Algunos resultados favorables es:
112
113
114
115
116
¿Son todos?

Ejemplos
(Cont.)

Un diagrama de árbol para el suceso, nos permitirá precisar el total de resultados favorables es:



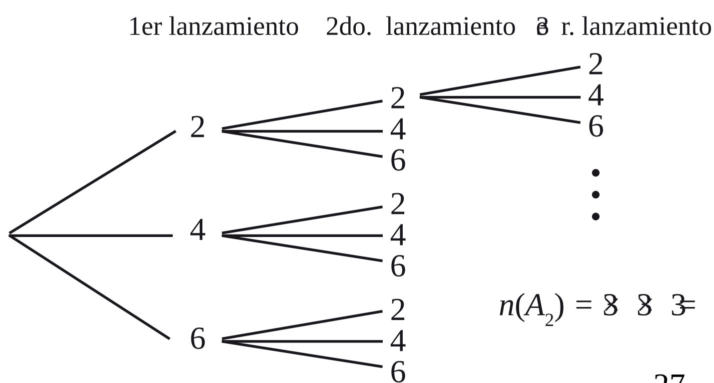
$A_1 = \{112, 113, 114, 115, 116\} \longrightarrow n(A_1) = 5$

$$P(A_1) = \frac{5}{216}$$

b) A_2: "*Cae número par en cada lanzamiento*".

Algunos resultados favorables es: 222, 246, 244, 226, ...

Diagrama de árbol:



$n(A_2) = 3 \times 3 \times 3 = 27$

$$P(A_2) = \frac{27}{216}$$

c) A_3: "*Caen tres puntos en cada lanzamiento*".

Resultado favorable: 3

Hay un solo resultado favorable: $P(A_3) = \dfrac{1}{216}$

d) A_4: "*Caen números diferentes*".

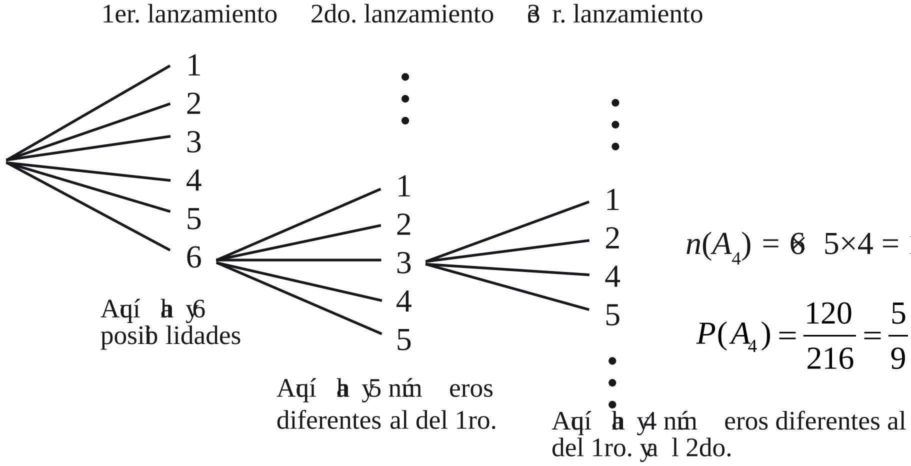
Algunos resultados favorables es:

123
124
132
134
456
.

¿Cuántos son?

Ejemplos

(Cont.)



$n(A_4) = 6\times 5\times 4 = 120$

$$P(A_4) = \frac{120}{216} = \frac{5}{9}$$

2 En el Estado de Sinaloa, las placas de los automóviles constan de tres letras y cuatro dígitos. La primera letra siempre es V, la segunda es F o G y la tercera puede ser cualquier letra (de un total de 26). ¿Cuál es la probabilidad de que en alguna placa aparezca la "palabra" VGI?

Solución

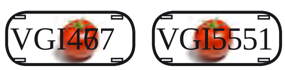
Descripción del experimento. Es un experimento de 7 etapas: en las primeras tres se selecciona una letra y en las últimas cuatro un dígito.

Algunos resultados: 

Son resultados de la forma: $N_1\, N_2\, N_3\, N_4\, N_5\, N_6\, N_7$

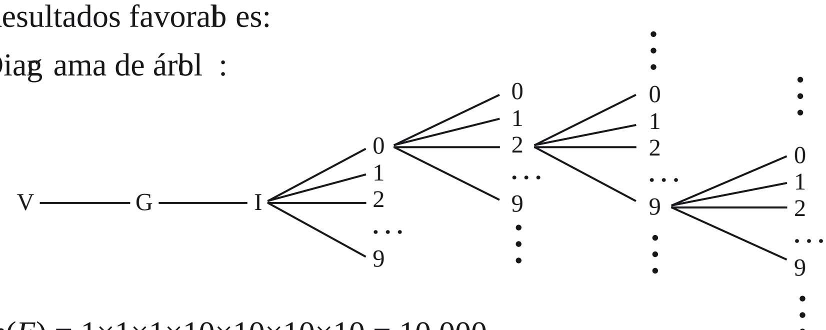
N_1 puede tomar un valor (la letra V)
N_2 puede tomar dos valores (F o G)
N_3 puede tomar 26 valores (A,B . . . Z)
N_4 puede tomar 10 valores (0,1 . . . 9)
N_5 puede tomar 10 valores (0,1 . . . 9)
N_6 puede tomar 10 valores (0,1 . . . 9)
N_7 puede tomar 10 valores (0,1 . . . 9)

$$n(S) = 1\times 2\times 26\times 10\times 10\times 10\times 10 = 520{,}000$$

Suceso: Se lee la palabra "**VGI**" 

Resultados favorables:

Diagrama de árbol:



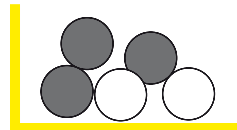
$n(E) = 1\times 1\times 1\times 10\times 10\times 10\times 10 = 10{,}000$

$$P(\text{se lea VGI}) = \frac{10000}{520000} = \frac{1}{52}$$

Ejemplos
(Cont.)

3 Una urna contiene tres canicas negras y dos blancas. Se extraen sucesivamente y sin reemplazamiento dos canicas. ¿Cuál es la probabilidad de obtener:

a) negra la 1ª y blanca la 2ª
b) una negra y una blanca
c) ambas sean negras?



Solución

¡Atención! Este problema puede ser resuelto con las técnicas vistas previamente. Ahora, se trata de aplicar los conceptos de permutaciones y combinaciones.

Descripción del experimento Se trata de un problema de muestreo sin reemplazamiento. La población de interés equiprobable puede ser representada como:

$$\{n_1, n_2, n_3, b_1, b_2\}$$

A continuación revisamos cada uno de los sucesos:

a) "**Negra la 1ª y blanca la 2ª**". El suceso ***lleva implícito un orden***. Es una permutación.

- Cálculo de $n(S)$

$$\underbrace{\{n_1, n_2, n_3, b_1, b_2\}}_{\text{Permutaciones de 5 objetos tomados 2 a la vez:}}$$

$$n(S) = {}_6P_3 = \frac{5!}{(5-2)!} = \frac{5!}{3!} = \frac{5\times4\times\cancel{3!}}{\cancel{3!}} = 20$$

- Cálculo de $n(A_1)$

$$\underbrace{\{n_1, n_2, n_3, b_1, b_2\}}_{\text{Tomar una negra de tres y una blanca de 2 con orden}}$$

$$n(A_1) = {}_3P_1 \bullet {}_2P_1 = \frac{3!}{(3-1)!} \times \frac{2!}{(2-1)!} = \frac{3!}{\cancel{2!}} \times \frac{\cancel{2!}}{1!} = \frac{3!}{1!} = (3)(2) = 6$$

$$P(A_1) = \frac{6}{20} = \frac{3}{10}$$

Ejemplos
(Cont.)

b) “**Una negra y una blanca**”. El suceso ***no requiere de orden***. Es una combinación.

- Cálculo de $n(S)$

$$\underbrace{\{n_1, n_2, n_3, b_1, b_2\}}$$

Combinación de 5 objetos tomados 2 a la vez:

$$n(S) = {}_5C_2 = \frac{5!}{2!(5-2)!} = \frac{5!}{2!3!} = \frac{5\times 4\times \cancel{3!}}{2\times 1\times \cancel{3!}} = \frac{20}{2} = 10$$

- Cálculo de $n(A_2)$

$$\underbrace{\{n_1, n_2, n_3, b_1, b_2\}}$$

Tomar una negra de tres y una blanca de 2 sin orden

$$n(A_2) = {}_2C_1 \bullet {}_3C_1 = \frac{\cancel{2!}}{1!1!} \times \frac{3!}{1!\cancel{2!}} = \frac{3!}{1!} = 6$$

$$P(A_2) = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$$

c) “**Ambas negras**”. Aquí tampoco interesa el orden. Es una combinación.

- Cálculo de $n(S)$

$$\underbrace{\{n_1, n_2, n_3, b_1, b_2\}}$$

Combinación de 5 objetos tomados 2 a la vez:

$$n(S) = {}_5C_2 = \frac{5!}{2!(5-2)!} = \frac{5!}{2!3!} = \frac{5\times 4\times \cancel{3!}}{2\times 1\times \cancel{3!}} = \frac{20}{2} = 10$$

- Cálculo de $n(A_3)$

$$\underbrace{\{n_1, n_2, n_3, b_1, b_2\}}$$

Tomar dos negras de tres sin orden

$$n(A_3) = {}_3C_2 = \frac{3!}{2!(3-2)!} = \frac{3!}{2!\times 1!} = \frac{3\times \cancel{2!}}{2!\times 1!} = 3$$

$$P(A_3) = \frac{3}{10}$$

Ejemplos
(Cont.)

4. En un recipiente ha y diez pelotas numeradas de 0 a 9. Un niño saca una de ellas al azar y la guarda; saca una segunda y la conserva; finalmente saca una tercera. Usted toma nota del orden en qe el niño sacó las pelotas. ¿Cuál es la probab lidad de sacar las pelotas numeradas 0, 1 y 2, en ese orden?

Solución

Descripción del experimento. Es un experimento de muestreo de tamaño tres.

La variab e de interés es: “nm ero ob enido”

La opción de nm eros es: “0, 1, 2, 3,4, 5, 6,7, 8, 9”

La pob ación de interés eqi prob b e es: {0, 1, 2, 3,4, 5, 6,7, 8, 9 }

- Cálculo de $n(S)$

$$\underbrace{\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}}_{\text{Permutación de 10 elementos tomados tres a la vez.}}$$

$$n(S) = {}_{10}P_3 = \frac{10!}{(10-3)!} = \frac{10!}{7!} = \frac{10\times 9\times 8\times \cancel{7!}}{\cancel{7!}} = 720$$

- Cálculo de $n(S)$

$$\underbrace{\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}}_{\text{Tomar el 0, el 1 y el 2 en ese orden.}}$$

$$n(A) = {}_1P_1 \bullet {}_1P_1 \bullet {}_1P_1 = \frac{1!}{(1-1)!} \times \frac{1!}{(1-1)!} \times \frac{1!}{(1-1)!} = 1$$

La prob b lidad del suceso es

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{1}{720}$$

4. En el prob ema 2, ¿cuál es la prob b lidad de qe las pelotas ex raídas teng n los nm eros 0, 1 y 2, s ea cual fuere el orden en qe aparecen?

Solución

Descripción del experimento. Es un experimento de muestreo de tamaño tres.

La variab e de interés es: “nm ero ob enido”
La opción de nm eros es: “0, 1, 2, 3,4, 5, 6,7, 8, 9” .

Ejemplos
(Cont.)

La población de interés equiprobable es: {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}

Análisis del suceso: "Sale 0, 1, 2 en cualquier orden". El evento no implica un orden. Es una combinación.

- Cálculo de $n(S)$

$$\underbrace{\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}}_{\text{Combinación de 10 elementos tomados tres a la vez}}$$

$$n(S) = {}_{10}C_3 = \frac{10!}{3!(10-3)!} = \frac{10!}{7!} = \frac{10\times9\times8\times\cancel{7!}}{3\times2\times1\times\cancel{7!}} = \frac{720}{6} = 720$$

- Cálculo de $n(A)$

$$\underbrace{\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}}_{\text{Tomar el 0, el 1 y el 2 sin orden.}}$$

$$n(A) = {}_1C_1 \bullet {}_1C_1 \bullet {}_1C_1 = \frac{1!}{1!(1-1)!} \times \frac{1!}{1!(1-1)!} \times \frac{1!}{1!(1-1)!} = 1$$

La probabilidad del sucesoo es

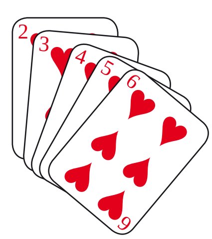
$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{1}{120}$$

5. ¿Cuál es la probabilidad de que una mano de cinco naipes seleccionada de una baraja estándar de 52 cartas consista de 5 corazones?

Solución

Descripción del experimento. El espacio muestral consiste de todas las manos posibles de 5 cartas escogidas de la baraja.
La variable de interés es: "carta seleccionada".
La opción de carta es: " cualquier carta de 52 que tiene la baraja".
La población de interés equiprobable es:

$$\left\{\begin{array}{l} \spadesuit\ A, K, Q, J, 10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2 \\ \blacklozenge\ A, K, Q, J, 10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2 \\ \clubsuit\ A, K, Q, J, 10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2 \\ \heartsuit\ A, K, Q, J, 10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2 \end{array}\right\}$$



Análisis del evento "Salen 5 corazones". El evento consiste de todas las manos de 5 naipes escogidos de 13 corazones. No implica un orden. Es una combinación.

Ejemplos (Cont.)

Cálculo de $n(S)$. El espacio muestral consiste de todas las manos posibles de 5 naipes escogidos de la baraja de 52 cartas. El orden no importa, por consiguiente se trata de una combinación de 52 elementos tomados 5 a la vez.

$$n(S) = {}_{13}C_5 = \frac{52!}{5!(52-5)!} = \frac{52!}{5!47!} = \frac{52\times51\times50\times49\times48\times\cancel{47!}}{5\times4\times3\times2\times1\times\cancel{47!}} = \frac{311875200}{120} = 2598960$$

Cálculo de $n(E)$. El evento contiene ${}_{13}C_5$ resultados favorables

$$\underbrace{\{\heartsuit\ A, K, Q, J, 10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2\}}_{\text{De estos 13 elementos tomar 5 sin orden.}}$$

$$n(E) = {}_{13}C_5 = \frac{13!}{5!(13-5)!} = \frac{13!}{5!8!} = \frac{13\times12\times11\times10\times9\times\cancel{8!}}{5\times4\times3\times2\times1\times\cancel{8!}} = \frac{154440}{120} = 1287$$

$$P(5\ \text{corazones}) = \frac{1287}{2598960} = 0.0005$$

Actividad 34

1. Se extraen dos bolas sin reemplazamiento de una urna que contiene 8 bolas de las cuales 5 son blancas y tres son negras. Calcule la probabilidad de que:
   a) ambas sean blancas
   b) la primera negra y la segunda blanca.
   c) Una negra y una blanca

2. Una bolsa contiene 4 canicas rojas, 3 azules y 3 verdes. Se extrae una sola canica.
   a) Table un espacio muestral no equiprobable en base al color.
   b) Table un espacio muestral equiprobable.

3. Un frasco contiene 4 bolas numeradas del 1 al 4. Registre un epacio muestral para los experimentos siguientes.
   a) Se extrae una bola y se registra el número. Se regresa la bola y se extrae y registra una segunda bola (muestreo con reempazamiento).
   b) Se extrae y registra una bola. Sin reemplazar la primera bola, se extrae y registra una segunda bola.

4. En el experimento del problema 3, determine la probabilidad de obtener:
   a) dos números pares   b) suma impar   c) un producto primo.

5. Un lote de 100 focos contiene 4 defectuosos y 96 en buen estado. Se seleccionan al azar cinco focos. ¿Cuál es la probabilidad de obtener 3 focos buenos y 2 defectuosos?

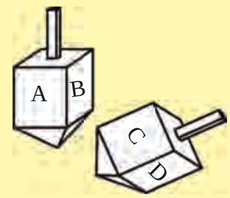
6. De una baraja española de 40 cartas extraemos 5 a la vez.
   a) ¿Cuál es la probabilidad de que las cinco sean oros?
   b) ¿Y la de obtener 4 ases y un oro?

AUTOEVALUACIÓN

1. Una perinola tiene cuatro lados, marcados A, B, C y D. Cuando se hace girar, se detendrá con uno de los lados hacia arriba. Simula girar la perinola tres veces y registra los resultados en cada ocasión. Traza un diagrama de árbol e incluye todos los puntos muestrales de este experimento.

2. Considera el conjunto de tres objetos {P, Q, R}
   a) Lista las permutaciones de 2 objetos escogidos de este conjunto.
   b) Lista las permutaciones de 3 objetos escogidos de este conjunto.
   c) Lista las combinaciones de 2 objetos de ese conjunto.
   d) Lista las combinaciones de 3 objetos de se conjunto.

3 Escribe todas las permutaciones de las letras W, X, Y, Z.



4. ¿Cuál (es) de las siguientes expresiones es (son) correctas?
   a) $_mP_n = \dfrac{m!}{(m-n)!}$ b) $_mC_n = n!$ c) $_mC_n = \dfrac{m!}{n!(m-n)!}$ d) $_mP_n = \dfrac{n!}{(m-n)!}$

5. ¿De cuántas maneras diferentes se pueden acomodar las cinco letras de la palabra RONDA, usando cada letra una sola vez en cada acomodación?
   a) $_8P_5$ b) $_5C_5$ c) 5! d) 5^5 e) Ninguna de las anteriores

6 Un grupo está integrado por 5 niños y 6 niñas. ¿Cuántos comités de cinco personas se pueden elegir si cada comité debe formarse con 2 niños y 3 niñas?
   a) 150 b) 200 c) 1800 d) 2400 e) Ninguna de las anteriores

7. Resuelve para n: $_nP_2 = 56$
   a) 7 b) 8 c) 14 d) no se da suficiente información

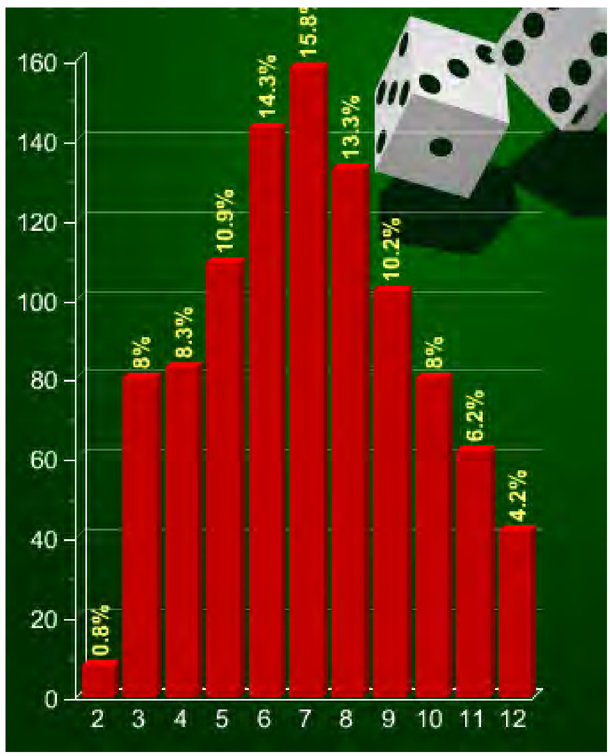
8. ¿Cuál(es) de las siguientes es (son) verdadera(s)
   a) $_{10}C_3 = {}_{10}C_7$ b) $_0C_3 = \dfrac{_{10}P_3}{3!}$ c) $_{10}P_3 = {}_{10}P_7$ d) $_mC_n = m!$

9. ¿De cuántas maneras diferentes se puede elegir un comité de 4 personas en un grupo de 12 estudiantes?
   a) 485 b) 495 c) 80 d) 28

10. Un supermercado ofrece 6 marcas de duraznos enlatados y 8 marcas de maíz enlatado. Una compradora desea probar 2 marcas diferentes de duraznos y tres marcas distintas de maíz. ¿De cuántas maneras puede escoger las 5 latas?
   a) 28 b) 10 c) 840 d) 1080

11. ¿Cuántos triángulos se pueden formar colocando seis puntos en un plano, sin que haya tres de ellos en la misma línea recta?
   a) 10 b) 12 c) 18 d) 20

Distribuciones de Probabilidad



4

UNIDAD

Lección 4

Conceptos básicos: distribuciones de probabilidad, variable aleatoria, variables aleatorias discretas y continuas, función de probabilidad, valor esperado o esperanza matemática, media y desviación estándar de una distribución.

Objetivos: Entender que una variable aleatoria es una cantidad numérica cuyo valor depende de las condiciones y probabilidades asociadas con un experimento.
Entender la diferencia entre una variable aleatoria discreta y una continua.
Entender las similitudes y diferencias entre distribuciones de frecuencias y distribuciones de probabilidad.
Calcular, describir e interpretar la media y desviación estándar de una distribución de probabilidad.

A lo largo de este estudio, aprendiste diversas técnicas para calcular probabilidades. Para cerrar este primer encuentro formal con la probabilidad, estudiarás las distribuciones de probabilidad. Existen muchas distribuciones de probabilidad, pero en este curso sólo estudiaremos los elementos básicos de dos de ellas: la binomial y la normal. Antes de hacerlo, deberás comprender el concepto de variable aleatoria.

Actividad 4.1 a

Qué hacer

Estudia detenidamente la siguiente información. Realiza lo indicado.

- Se han lanzado tres monedas balanceadas, cien veces, obteniéndose los siguientes resultados:

aas	*aaa*	*ssa*	*sss*	*aas*	*sas*	*aaa*	*sss*	*ass*	*aaa*	*sss*	*saa*
ssa	*aaa*	*sss*	*ssa*	*ass*	*sss*	*saa*	*sss*	*sss*	*sas*	*sas*	*sss*
asa	*ssa*	*aas*	*aaa*	*aas*	*sas*	*sss*	*sas*	*aas*	*aaa*	*sss*	*aas*
saa	*aas*	*ass*	*asa*	*aas*	*ass*	*sas*	*asa*	*aas*	*saa*	*ssa*	*asa*
aaa	*sss*	*aas*	*asa*	*ass*	*ass*	*ass*	*saa*	*ass*	*saa*	*ssa*	*asa*
ass	*ssa*	*asa*	*asa*	*sss*	*ass*	*ssa*	*sas*	*sss*	*asa*	*ass*	*ssa*
aaa	*sas*	*aas*	*sss*	*ass*	*aas*	*sas*	*ssa*	*aaa*	*ssa*	*aas*	*ssa*
asa	*aaa*	*saa*	*asa*	*ssa*	*sss*	*ass*	*saa*	*saa*	*ssa*	*aaa*	*sss*
saa	*ssa*	*sas*	*sss.*								

- ¿Qué nos informan estos datos? Recuerda que para poder encontrar un patrón en los datos, debemos organizarlos en una distribución de frecuencias.

Actividad 4.1 a (Cont.)

Recuerda que la distribución de frecuencias de una variable, es una descripción de las frecuencias con que se presenta cada una de las modalidades o valores de esa variable. La variable, es el fenómeno o característica que nos interesa estudiar. Dado un experimento, nos puede interesar una o más variables. Por tanto, necesitamos definir la variable que estudiaremos. En los experimentos aleatorios, lo que necesitamos es precisar una variable "que actúe" sobre cada resultado, asignándole un valor.

Por ejemplo, en el experimento de lanzar tres monedas consideremos la variable "*número de águilas que aparece*". ¿Cuántas águilas pueden aparecer en una ejecución del experimento?_

Tu respuesta debe ser parecida a la siguiente:

pueden aparecer 0 águilas → *sss*
puede aparecer 1 águila → *ass, sas, ssa*
pueden aparecer 2 águilas → *aas, asa, saa*
pueden aparecer 3 águilas → *aaa*

Entonces, 0, 1, 2 y 3 águilas, son los posibles valores de la variable "*número de águilas al lanzar tres monedas*". En otras palabras, la variable "*número de águilas*", le asigna un 0 al resultado *sss*, un 1 a los resultados *ass, sas, ssa*, un 2 a los resultados *aas, asa, saa*, y un 3 al resultado *aaa*.

Por tanto, los resultados anteriores, obtenidos al lanzar cien veces tres monedas, bajo la variable "*número de águilas*", se transforman en:

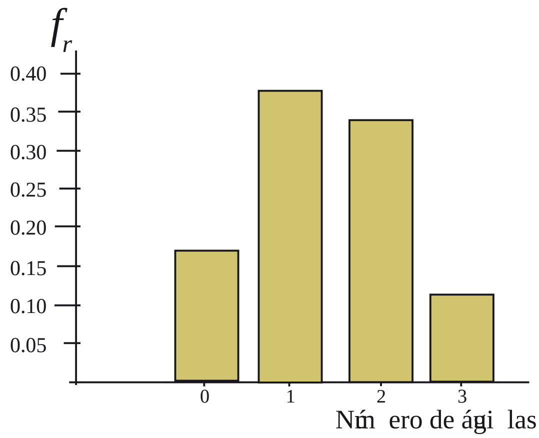
2	3	1	0	2	1	3	0	1	3	0	2
1	3	0	1	1	0	2	0	0	1	1	0
2	1	2	3	2	1	0	1	2	3	0	2
2	2	1	2	2	1	1	2	2	2	1	2
3	0	2	2	1	1	1	2	1	2	1	2
1	1	2	2	0	1	1	1	0	2	1	1
3	1	2	0	1	2	1	1	3	1	2	1
2	3	2	2	1	0	1	2	2	1	3	0
2	1	1	0								

Con esta información, construye una distribución de frecuencias absolutas y relativas.

Número de águilas	Recuento	f	f_r
0			
1			
2			
3			

Actividad 4.1 a (Cont.)

Verifica que el siguiente gráfico de barras corresponde a la distribución de frecuencias relativa qe acab s de construir.

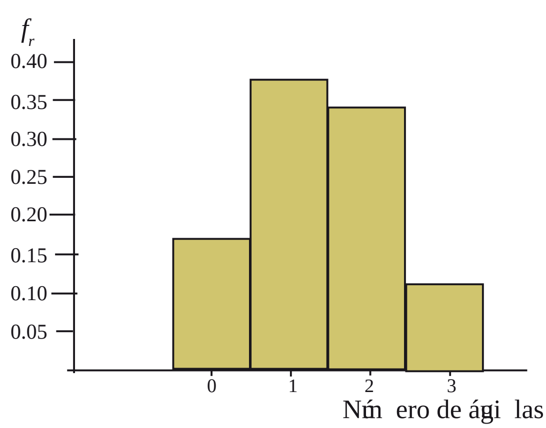


Si atendemos la definición frecuentista de la probabilidad, una distribución de frecuencias relativas tamb én puede llamarse distribc ión de prob b lidad.

> La ***il strib ciń d p b lidd*** de una variab e, es una descripción de las prob bilidades con qe ocurren los diversos valores potenciales de la variab e.

Para representar gáficamente una distribución de frecuencias de la variable "*nḿ ero de águilas*", la cual es una variable discreta, se usó un gráfico de barras. Sin embargo, cuando hablamos de distribuciones de probabilidad, el gráfico que se usa con mayor frecuencia es el *h stograma*, aunqe la variable sea discreta.

A continuación, se muestra el h stog ama correspondiente a la distribc ión de prob bilidad de la variab e "*nḿ ero de águilas*" ob enido al lanzar tres monedas, 100 veces.



Actividad 4.1 b

Para la distribución anterior, calcula:

a) La media: $\overline{X}$ = _

b) La desviación estándar: s = _

Número de águilas	f	
0		
1		
2		
3		

Una distribución de probabilidad como la anterior, que proveniene de observaciones realizadas, recibe el nombre de ***distribución empírica de probabilidad***.

Pero, si en lugar del enfoque frecuentista aplicamos la definición de probabilidad teórica y las reglas que la rigen, obtenemos una distribución teórica de probabilidad.

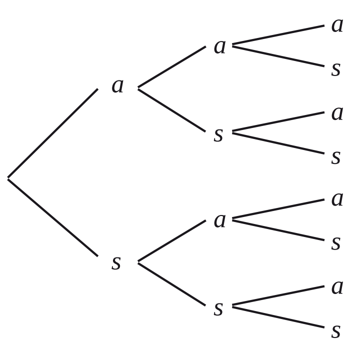
Para construir la distribución empírica, enfocamos la atención en el número de águilas obtenido cada vez que se realizó el experimento y enseguida aplicamos las herramientas estadísticas. En cambio, en el caso de probabilidades teóricas, recuerda que no repetimos los experimentos, sino que trabajamos sobre los posibles resultados distintos. Es decir, analizamos el espacio muestral. Entonces, para construir una distribución teórica de probabilidad, primero obtenemos el espacio muestral, después le aplicamos la variable implicada a cada resultado,y a continuación asignamos probabilidades según la regla de Laplace, a cada posible valor de la variable. A continuación, vamos a construir la distribución de probabilidad teórica del experimento de lanzar tres monedas.

Analiza cada uno de los pasos.

a) *Experimento*: Lanzar al aire tres monedas balanceadas.

b) *Descripción del experimento*: El experimento puede considerarse compuesto de tres etapas; en cada etapa los resultados posibles son: a o s.

c) *Diagrama de árbol y espacio muestral:*



Espacio muestral:

$S = \{aaa, aas, asa, ass, saa, sas, ssa, sss\}$

La variable "*número de águilas*" convierte estos resultados posibles en:

$\{32, 2, 1, 2, 1, 1, 0\}$

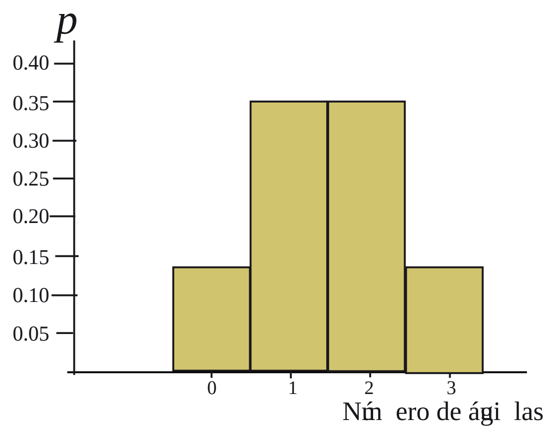
Puesto que las monedas están balanceadas, tenemos ocho resultados igualmente probables.

Ejemplo

Entonces, la distribución de probabilidad <u>teórica</u> es:

Número de águilas	N° Resultados favorables	**p**
0	1	1/8
1	3	3/8
2	3	3/8
3	1	1/8
Total	8	1.0

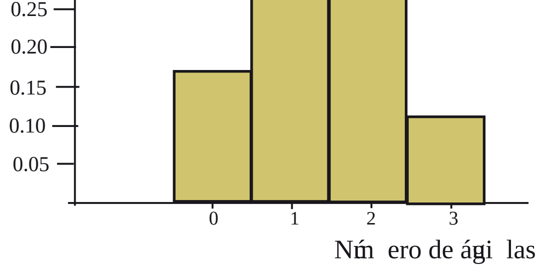
El histograma correspondiente a esta distribución es:

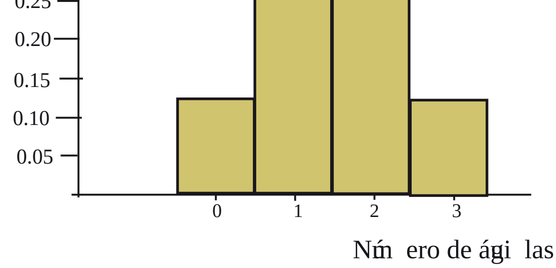


Actividad 4.1 C

A continuación, se muestran los dos histogramas correspondientes a las distribuciones de probabilidad empírica y teórica respectivamente, para el experimento de lanzar tres monedas. Analízalas y contesta:

a. ¿Qué semejanzas encuentras entre ambas distribuciones?
b La distribución empírica se contruyó a partir de 100 repeticiones del experimento. ¿Qué pasaría si aumentamos más y más el número de repeticiones? Argumenta tu respuesta.





Actividad 4.1 d

a) Considera el experimento de lanzar dos dados. ¿Cuáles son los posibles valores de la variable "*suma de puntos de cada cara*".

b) Se han lanzado dos dados 1000 veces, registrándose los valores correspondientes a la variable "*suma de puntos de cada cara*". A partir de los resultados obtenidos, se construyó la siguiente distribución de frecuencias:

Suma de puntos	*f*
2	10
3	78
4	82
5	106
6	142
7	170
8	135
9	106
10	78
11	61
12	42
Total	1000

1) A partir de esta distribución, construye la distribución empírica de probabilidad y su representación gráfica.
2) Calcula la media y desviación estándar de la distribución.
3) Construye la distribución teórica de probabilidad.
4) Compara las dos distribuciones. Argumenta en qué condiciones éstas distribuciones serían prácticamente idénticas.

Estamos ya, en posibilidades de definir un concepto clave en probabilidad: el de variable aleatoria.

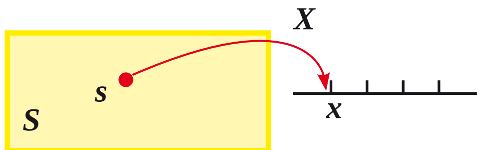
Variable aleatoria

Para un espacio muestral dado de algún experimento, una variable aleatoria es cualquier regla que asocia un número con cada resultado de dicho espacio muestral.

Puede apreciarse, que una variable aleatoria es realmente una función cuyo domino es el espacio muestral y cuyo rango es el conjunto de números reales.

Se acostumbra a denotar las variables aleatorias con letras mayúsculas, tales como X, Y. Las letras minúsculas se usan para representar el valor asociado por la variable a un resultado muestral específico.

La notación X (s) significa que x es el valor asociado con el resultado s por la variab e aleatoria X.



Por ejemplo, en el epxe rimento de lanzar tres monedas, la variab e aleatoria *nm ero de águilas* la denotaremos con la letra X. Las asiga ciones qe ha ce esta variab e a los resultados del espacio muestral correspondiente, se indican a continuación:

$X(aaa) = 1$	$X(saa) = 2$
$X(aas) = 2$	$X(sas) = 1$
$X(asa) = 2$	$X(ssa) = 1$
$X(ass) = 1$	$X(sss) = 0$

Actividad 4.1 e

Considera el epxe rimento de lanzar dos dados. Llama Y a la variab e aleatoria "*suma de pn tos en cada cara*". Simbl iza las asiga ciones qe ha ce esta variab e sob e cada uno de los resultados del espacio muestral.

Va ib lesh eta ɒ ia discreta y ɒ tinua

En tu curso de estadística clasificaste las variables a partir de la naturaleza de sus valores, en discretas y continuas. Esta clasificación también se aplica para las variab es aleatorias.

Va ib leh eta ɒ id iscreta, es una variab e cuantitativa qe puede tomar una cantidad numerab e de valores.

Va ib leh eta ɒ ia ɒ tinua, es una variab e cuantitativa qe puede tomar una cantidad innumerab e de valores.

Ejemplos de variab es aleatorias discretas:
- Nm ero de h jos por familia.
- Suma de puntos al lanzar dos dados.

Ejemplos de variab es aleatorias continuas:
- La estatura de un g upo de personas.
- El tiempo en qe se realiza una tarea.

Funciones de probabilidad

Algunas veces es conveniente escribir una regla que exprese algebraicamente la probabilidad de un suceso en términos del valor de la variable aleatoria. Esta expresión suele escribirse como una fórmula y se denomina función de probabilidad.

Función de probabilidad, es una función expresada por medio de una fórmula matemática que nos permite calcular las probabilidades asociadas con los diversos valores de una variable aleatoria.

Las funciones de probabilidad las representaremos con la letra ***p***, y, puesto que ***x*** representa el valor que asigna la variable aleatoria al resultado del espacio muestral, la notación ***p*(*x*)** representa la probabilidad que corresponde al valor ***x***.

Ejemplo

Consideremos el experimento de lanzar un dado una sola vez. Sea la variable aleatoria "*número de puntos en la cara que queda hacia arriba*". Si ***x*** representa el resultado del experimento bajo esta variable, entonces podemos plantear que los valores posibles de la distribución del número de puntos que pueden resultar al lanzar un dado, son:

$$x = 1, 2, 3, 4, 5, 6$$

Ahora, puesto que:

$$p(1) = 1/6 \qquad p(4) = 1/6$$
$$p(2) = 1/6 \qquad p(5) = 1/6$$
$$p(3) = 1/6 \qquad p(6) = 1/6$$

la función de probabilidad para el experimento de lanzar un dado, es:

$$\boldsymbol{p}(x) = 1/6 \quad \text{para } x = 1, 2, 3, 4, 5, 6$$

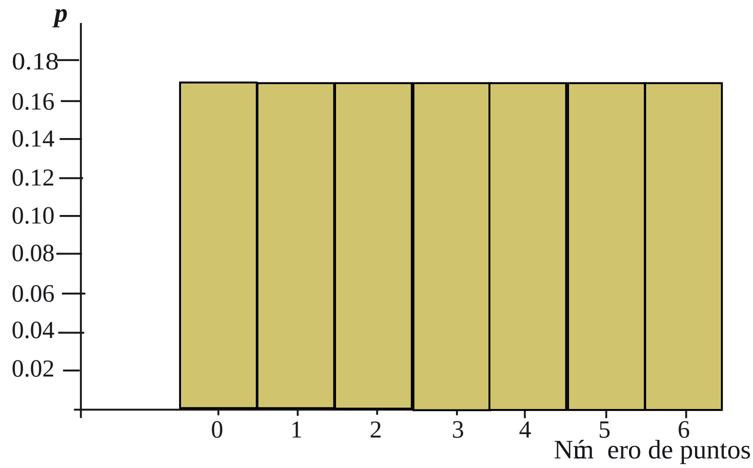
En forma de distribución:

x	*p*(*x*)
1	1/6
2	1/6
3	1/6
4	1/6
5	1/6
6	1/6

Al igual que en tus cursos de matemáticas, a esta función en particular, se le denomina función de probabilidad constante, porque el valor de *p*(*x*), no cambia cuando varía el de *x*.

Ejemplo (Cont.)

La representación gráfica de esta función de probabilidad es la siguiente:



Puesto que los valores de una función de probabilidad son probabilidades, deben cumplir las propiedades de la probabilidad, en particular las dos siguientes:

1) La probabilidad asignada a cada valor de la variable aleatoria debe estar entre 0 y 1, inclusive; es decir, $0 \le p(x) \le 1$.
2) La suma de las probabilidades asignadas a cada uno de los valores de la variable aleatoria debe ser igual a 1, es decir, $\Sigma p(x) = 1$

Existen varias funciones de probabilidad de gran interés. En las próximas lecciones estudiaremos únicamente dos: la binomial y la normal.

Valor esperado o esperanza matemática

El valor esperado o esperanza matemática, es un concepto muy importante en probabilidad. En la siguiente actividad, podrás explorar este concepto.

Actividad 4.1

Dos jugadores A y B, van a participar en un juego que consiste en lanzar dos dados simultáneamente y calcular la diferencia de puntos entre el mayor y el menor punto mostrado por las caras que quedan hacia arriba. Las reglas son las siguientes:

a) Si resulta una diferencia de 0, 1 ó 2 entonces A gana un peso.
b) Si resulta 3, 4 ó 5 quien gana es B.
c) Comienzan con un total de 20 pesos y el juego termina cuando agotan dicha cantidad.

Actividad 4.1 f (Cont.)

Contesta:

1) ¿Cuál es la variable aleatoria implicada en el experimento?_ _
2) ¿Te parece que este juego es equitativo o justo? Si tuvieras que jugar, ¿cuál jugador preferirías ser?_
3) Practica con un compañero(a) 20 veces este juego. ¿Consideras que debes cambiar la decisión que tomaste en la pregunta 2?

En el juego planteado en la actividad anterior, tuviste que enfrentarte ante un problema de decisión. La probabilidad, proporciona las bases para ayudarte a tomar la mejor decisión ante situaciones de incertidumbre. Los conceptos de variable aleatoria y de distribución de probabilidad, nos permiten sistematizar el análisis para el logro de este propósito.

A continuación, analizaremos la distribución de probabilidad teórica del experimento de lanzar dos dados y observar "*la diferencia de puntos de las caras superiores*".

Experimento. Lanzar dos dados balanceado.

Descripción del experimento. El experimento puede considerarse compuesto de dos etapas: en cada etapa los resultados posibles son: 1, 2, 3, 4, 5 ó 6

Espacio muestral.

$$S = \left\{ \begin{matrix} (1,1) & (1,2) & (1,3) & (1,4) & (1,5) & (1,6) \\ (2,1) & (2,2) & (2,3) & (2,4) & (2,5) & (2,6) \\ (3,1) & (3,2) & (3,3) & (3,4) & (3,5) & (3,6) \\ (4,1) & (4,2) & (4,3) & (4,4) & (4,5) & (4,6) \\ (5,1) & (5,2) & (5,3) & (5,4) & (5,5) & (5,6) \\ (6,1) & (6,2) & (6,3) & (6,4) & (6,5) & (6,6) \end{matrix} \right\}$$

La variable "*diferencia de puntos*", convierte el espacio muestral en:

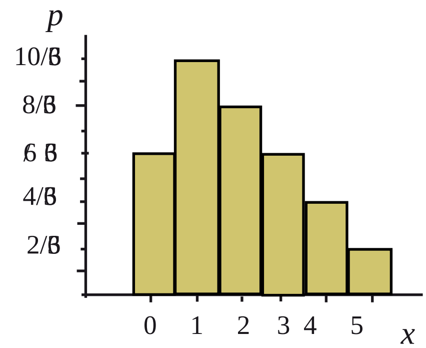
$$\begin{matrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & 0 \end{matrix}$$

Haz el recuento de todas las diferencias posibles de puntos.

x	*Recuento*	*f*
0		
1		
2		
3		
4		
5		

Tenemos 36 resultados igualmente probables. Por lo que, la distribución de probabilidad teórica es:

x	$p(x)$
0	6/36
1	10/36
2	8/36
3	6/36
4	4/36
5	2/36



Ahora, volvamos a la actividad 4.1 f:

A gana un peso, si sale 0, 1 ó 2.

B gana un peso, si sale 3, 4 ó 5.

¿Quién tiene más posibilidades de ganar?

x	$p(x)$
0	6/36
1	10/36
2	8/36
3	6/36
4	4/36
5	2/36

Probabilidad de que gane A:
6/36 + 10/36 + 8/36 = 24/36

Probabilidad de que gane B:
6/36 + 4/36 + 2/36 = 12/36

Por lo tanto, el jugador A tiene ventaja sobre B, puesto que, de los 36 resultados posibles, en 24 gana A y sólo en 12 gana B.
Sin embargo, cambiando las reglas, podríamos convertir este juego, en uno equitativo. Para ello, debemos primero entender el siguiente concepto:

Esperanza matemática: si las probabilidades de obtener los importes a_1, a_2, a_3,...a_k son p_1, p_2, p_3, ...p_k, donde $p_1 + p_2 + p_3 + ...p_k = 1$, entonces la esperanza matemática es:

$$E = a_1 p_1 + a_2 p_2 + a_3 p_3 + \ ... + a_k p_k$$

Cada cantidad se multiplica por la probabilidad correspondiente y la esperanza matemática E, se obtiene por medio de la suma de todos estos productos. En notación $\sum$:

$$E = \sum a \bullet p$$

Los valores de los importes son positivos cuando representan beneficios, triunfos o ganancias y son negativos cuando representan pérdidas, sanciones o déficits.

Calculemos los valores de la esperanza matemática que corresponde a cada jugador A y B del juego que estamos analizando.

x	$p(x)$
0	6/36
1	10/36
2	8/36
3	6/36
4	4/36
5	2/36

Si cae 0, 1 ó 2, A gana un peso.

$$E_A = 1\times\frac{6}{36} + 1\times\frac{10}{36} + 1\times\frac{8}{36} + 0\times\frac{6}{36} + 0\times\frac{4}{36} + 0\times\frac{2}{36} = \frac{24}{36}$$

Si cae 3, 4 ó 5, B gana un peso.

$$E_B = 0\times\frac{6}{36} + 0\times\frac{10}{36} + 0\times\frac{8}{36} + 1\times\frac{6}{36} + 1\times\frac{4}{36} + 1\times\frac{2}{36} = \frac{12}{36}$$

Hemos corroborado, que A tiene ventaja sobre B.

El valor esperado debemos interpretarlo como el valor que debemos esperar que ocurra a la larga. En otras palabras, decir que el jugador A tiene ventaja sobre B, no significa que A siempre vaya a ganar, pero, a largo plazo, el jugador A tiene una esperanza matemática de 24/36 = 2/3. Esto significa que en "*promedio*" de cada 3 pesos que se juegan, él gana 2.

Juego equitativo

En situaciones de azar, un criterio para "apostar" es esperar un juego justo o equitativo. A continuación, convertiremos el juego entre *A* y *B* en uno equitativo, con los siguientes cambios:

- Si sale 0, 1 ó 2 el jugador *A* gana un peso.
- Si sale 3, 4 ó 5 el jugador *B* gana dos pesos.

En este caso, la esperanza matemática (esperanza de ganancia) para cada jugador será:

$$E_A = 1\times\frac{6}{36} + 1\times\frac{10}{36} + 1\times\frac{8}{36} + 0\times\frac{6}{36} + 0\times\frac{4}{36} + 0\times\frac{2}{36} = \frac{24}{36}$$

$$E_B = 0\times\frac{6}{36} + 0\times\frac{10}{36} + 0\times\frac{8}{36} + 2\times\frac{6}{36} + 2\times\frac{4}{36} + 2\times\frac{2}{36} = \frac{24}{36}$$

Puesto que la esperanza de ganar es la misma para cada jugador, el juego se considera justo.

Un **juego se quita ivo**, si la esperanza de la cantidad ganada por cada jugador es la misma.

Actividad 4.1

Contesta:

Un juego consiste en lanzar dos dados balanceados y calcular la suma de puntos. El jugador *A* gana una ficha si resulta una suma de 6, 7, 8 ó 9. El jugador *B* gana una ficha si la suma es distinta de esas señaladas. Calcula la esperanza matemática de *A* y de *B*. ¿Qué prefieres ser, jugador *A* o *B*? Justifica.

La media de una distribución de probabilidad

Al igual que para describir conjuntos de datos se utilizan los promedios y las medidas de dispersión, para describir una distribución de probabilidad se usan la media y la desviación estándar.

La media de una variable aleatoria discreta, denotada con la letra griega μ (mu), se encuentra al multiplicar cada valor posible de *x* por su probabilidad y después sumar todos los productos.

En símbolos: si una variable aleatoria toma los valores $x_1, x_2, x_3, \dots x_k$, con las probabilidades $p(x_1), p(x_2), p(x_3), \dots p(x_k)$, la media o valor esperado denotado por μ *es*

$$\mu = x_1 \cdot p(x_1) + x_2 \cdot p(x_2) + x_3 \cdot p(x_3) + \dots + x_k \cdot p(x_k)$$

En la notación abreviada, escribimos:

$$\mu = \sum x \cdot p(x)$$

Puesto que la media es un valor que se espera ocurra a la larga, también se le llama valor esperado.

$$\mu = E(x) = \sum x \cdot p(x)$$

La media de una distribución de probabilidad denotada con la letra griega μ (mu) se define como el valor esperado de la variable aleatoria.

Varianza y desviación estándar de una distribución de probabilidad

En tu curso de estadística estudiaste que no es suficiente conocer la media de un conjunto de datos. La media, debe siempre acompañarse de una medida de dispersión, la cual generalmente es la varianza o la desviación estándar.

El cálculo de la varianza de una distribución de probabilidad, se hace casi de la misma manera que ya conoces, pero en vez de promediar las desviaciones cuadráticas de la media, obtenemos su valor esperado.

En general, si una variable aleatoria toma los valores $x_1, x_2, x_3, \dots x_k$, con las probabilidades $p(x_1), p(x_2), p(x_3), \dots p(x_k)$, la varianza de la distribución de probabilidad denotada como σ^2**,** se define como el valor esperado (la media), de las desviaciones con respecto a la media, elevadas al cuadrado:

$$\sigma^2 = (x_1-\mu)^2 \cdot p(x_1) + (x_2-\mu)^2 \cdot p(x_2) + \ldots + (x_k-\mu)^2 \cdot p(x_k)$$

En notación sigma:

$$\sigma^2 = \Sigma (x-\mu)^2 \cdot p(x)$$

La raíz cuadrada positiva de la varianza, es la desviación estándar de la distribución de probabilidad.

$$\sigma = \sqrt{\Sigma (x-\mu)^2 \cdot p(x)}$$

Observación. Recuerda que la media de una muestra se denota con $\overline{X}$. La media de una población, y de una distribución de probabilidad, se denotan con la letra griega μ. Estas notaciones usadas para las distribuciones de probabilidad, se debe a que éstas se pueden usar para representar poblaciones teóricas. Por tanto, se usan parámetros de poblaciones para describir las distribuciones de probabilidad, igual que se usan estadígrafos muestrales para describir muestras.

Ejemplo

Hallar la media y la desviación estándar de la distribución de probabilidad correspondiente al número de águilas obtenidas al lanzar tres monedas.

Solución

La distribución de este experimento y de la variable aleatoria indicada, ya la obtuvimos en páginas anteriores:

x	$p(x)$
0	1/8
1	3/8
2	3/8
3	1/8
	1.0

Cálculo de la media $\mu = E(x) = \sum x \cdot p(x)$

$$= 0 \times \left(\frac{1}{8}\right) + 1 \times \left(\frac{3}{8}\right) + 2 \times \left(\frac{3}{8}\right) + 3 \times \left(\frac{1}{8}\right)$$

$$= 1.5$$

Observación. El valor esperado de los resultados de lanzar tres monedas y observar el número de águilas no es "literalmente significativo", puesto que nunca se puede obtener 1.5 águilas. Lo que ésto significa es que a la larga, deaspués de muchos lanzamientos el valor promedio sería 1.5 águilas.

Ejemplo (Cont.)

Cálculo de la varianza

$$\sigma^2 = \Sigma(x-\mu)^2 \bullet p(x)$$

$$= (0-1.5)^2 \times \left(\frac{1}{8}\right) + (1-1.5)^2 \times \left(\frac{1}{8}\right) + (2-1.5)^2 \times \left(\frac{3}{8}\right) + (3-1.5)^2 \left(\frac{1}{8}\right)$$

$$= 0.75$$

Cálculo de la desviación estándar

$$\sigma = \sqrt{\Sigma(x-\mu)^2 \bullet p(x)}$$

$$= \sqrt{0.75} = 0.87$$

Actividad 4.1 h

Una familia planea procrear tres hijos. asumiendo que existe la misma probabilidad de tener niña o niño, determina:

a) La distribución de probabilidad.

b) la media, la varianza y la desviación estándar.

Ejercicio

1. Explica con tus propias palabras, cada uno de los siguientes conceptos. Ejemplifica.
   a. Variable aleatoria.
   b. Variable aleatoria discreta.
   c. Variable aleatoria continua.
   d. Distribución de frecuencias.
   e. Distribución de probabilidad.

2. ¿Cuál es la diferencia entre variable aleatoria discreta y variable aleatoria continua?
3. ¿Cuáles son las semejanzas y diferencias entre las distribuciones de frecuencias y las de probabilidad?

4. A continuación, se presentan dos distribuciones de probabilidad:

a)

x	1	2	3	4	5
$p(x)$	0.6	0.1	0.1	0.1	0.1

b)

x	1	2	3	4	5
$p(x)$	0.1	0.2	0.4	0.2	0.1

Para cada distribución:

a) Traza el histograma y describe la forma de la distribución.

b) Calcula el valor esperado y la desviación estándar.

c) ¿Cuál es la probabilidad de que un valor de x se encuentre entre $\mu - \sigma$ y $\mu + \sigma$

Lección 4 Permutaciones con repetición

Objetivo: Comprender el concepto de permutaciones con repetición y aplicarlo en la solución de problemas.

El concepto de permutaciones con repetición, lo utilizaremos como un conocimiento previo muy importante para entender las distribuciones binomiales.

Actividad 4.2 a

Qué hacer

Regresa a la lección (34) y repasa los conceptos y procedimientos de cálculo de las permutaciones y las combinaciones.

Recordemos que una permutación de *m* elementos diferentes es una ordenación de dichos elementos de tal manera que un elemento sea 1°, otro sea 2°, otro más sea 3° y así sucesivamente.

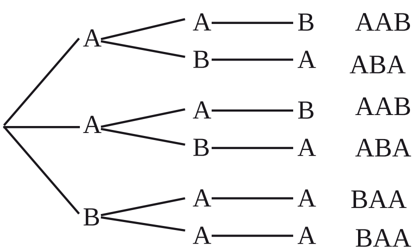
Por ejemplo, las permutaciones de *A*, *B* y *C*, son:

ABC *BAC* *CAB*
ACB *BCA* *CBA*

Supongamos, ahora, que se pide hallar las permutaciones posibles de las letras *A*, *A*, *B*.
El número total de permutaciones, de estas letras sería:

$$_3P_3 = 3! = 3 \times 2 = 6$$

Pero, no todos estos arreglos serían distinguibles porque hay dos letras “A” en la lista.



¿Cuantas permutaciones diferentes son?

AAB
ABA
~~AAB~~
~~ABA~~
BAA
~~BAA~~

Son tres permutaciones diferentes: *AAB*, *ABA* y *BAA*.

Veamos otro ejemplo: ¿Cuántas palabras de tres letras puedes escribir con las letras de la palabra *OSA*? ¿Y con la palabra *OSO*?

Con la palabra *OSA*, ya sabemos que hay $P_3 = 3! = 6$ y son:

OSA *ASO* *SOA*
SAO *AOS* *OAS*

Al convertir la *A* en *O*, cada dos palabras ($P_2 = 2! = 2$) se transforman en una.

OSA *ASO* → *OSO*; *SOA* *SAO* → *SOO*; *AOS* *OAS* → *OOS*

Hemos formado permutaciones con repetición de 3 elementos de orden 2 (es decir, palabras con dos letras iguales y la tercera distinta) y hemos visto que:

$$PR_2^3 = \frac{3!}{2!} = 3$$

En general, si un conjunto de m objetos tiene m_1 de una clase, m_2 de una segunda clase, m_3 de una tercera clase, y así sucesivamente, con $m = m_1 + m_2 + ... + m_k$, entonces, el número de permutaciones de los m objetos es:

$$PR^m_{m_1, m_2, ..., m_k} = \frac{m!}{m_1!\,m_2!...m_k!}$$

Ejemplo

¿En cuantas formas distinguibles pueden escribirse las letras de *BANANA?*

Solución

Esta palabra tiene seis letras, de las cuales tres son *A*, dos son *N* y una es *B*. Por lo tanto, el número de formas distinguibles en que las letras pueden escribirse es:

$$PR^6_{3,2,1} = \frac{6!}{3!\,2!\,1!} = 60$$

Equivalencia entre el número de permutaciones con repetición y el número de combinaciones

Sea el experimento de lanzar una moneda cuatro veces seguidas. ¿De cuantas maneras pueden obtenerse un sello y tres águilas sin importar el orden?

Obtener en cuatro lanzamientos un sello y tres águilas, sería por ejemplo: *saaa;* pero, como no importa el orden este resultado puede darse de

$$PR^4_{3,1} = \frac{4!}{3!\,1!} = 4 \text{ maneras} \left\{ \begin{array}{l} saaa \\ asaa \\ aasa \\ aaas \end{array} \right.$$

Si pensamos en la variable aleatoria "*número de sellos*" por ejemplo, la pregunta: ¿de cuántas maneras puede darse el resultado un sello y tres águilas?, puede cambiarse a: ¿<u>en cuáles de cuatro lugares disponibles puede colocarse un sello</u>?

$$\begin{array}{cccc} \boldsymbol{s} & \boldsymbol{a} & \boldsymbol{a} & \boldsymbol{a} \\ \square & \square & \square & \square \\ \boldsymbol{L_1} & \boldsymbol{L_2} & \boldsymbol{L_3} & \boldsymbol{L_4} \end{array}$$

Se elige un lugar de cuatro disponibles, para colocar un sello.

Si se elige L_1, el resultado supuesto es: *saaa*

L_1 es ocupado por s.

Si se elige L_2, el resultado supuesto es: *asaa*

L_2 es ocupado por s.

Si se elige L_3, el resultado supuesto es: *aasa*

L_3 es ocupado por s.

Si se elige L_4, el resultado supuesto es: *aaas*

L_4 es ocupado por s.

Pero, elegir un lugar de cuatro sin importar el orden, es una combinación de cuatro elementos tomado uno a la vez.

$${}_4C_1 = \frac{4!}{3!1!} = 4$$

Puede observarse la siguiente equivalencia:

$$PR^4_{3,1} = {}_4C_1 = \frac{4!}{3!1!} = 4$$

Consideremos el mismo experimento y la misma variable aleatoria, pero ahora la pregunta es: ¿de cuántas maneras se pueden obtener dos sellos?

Obtener en cuatro lanzamientos dos sellos, y, por consiguiente dos águilas, sería por ejemplo: *ssaa;* pero, como no importa el orden este resultado puede darse de

$$PR^4_{2,2} = \frac{4!}{2!2!} = 6 \text{ maneras} \left\{ \begin{array}{l} aass \\ asas \\ assa \\ saas \\ sasa \\ ssa \end{array} \right.$$

Ahora, si pensamos en cuatro lugares, de los cuales tomaremos dos para colocar en cada uno un sello tenemos:

$$\begin{array}{cccc} \boldsymbol{s} & \boldsymbol{s} & \boldsymbol{a} & \boldsymbol{a} \\ \square & \square & \square & \square \\ \boldsymbol{L_1} & \boldsymbol{L_2} & \boldsymbol{L_3} & \boldsymbol{L_4} \end{array}$$

Se eligen dos lugares de cuatro disponibles, para colocar dos sellos

Si se eligen $L_1\,L_2$, el resultado supuesto es: *ssaa*

$L_1\,L_2$, son ocupados por un s cada uno.

Si se eligen $L_1\,L_3$, el resultado supuesto es: *sasa*

$L_1\,L_3$, son ocupados por un s cada uno.

Si se eligen $L_1\,L_4$, el resultado supuesto es: *saas*

$L_1\,L_4$, son ocupados por un s cada uno.

Si se eligen L_2L_3, el resultado supuesto es: *assa*

L_2L_3, son ocupados por un s cada uno.

Si se eligen L_2L_4, el resultado supuesto es: *asas*

L_2L_4, son ocupados por un s cada uno.

Si se eligen $L_2\,L_4$, el resultado supuesto es: *assa*

L_2L_4, son ocupados por un s cada uno.

Pero, elegir dos lugares de cuatro sin importar el orden, es una combinación de cuatro elementos tomado dos a la vez.

$${}_4C_2 = \frac{4!}{2!\,2!} = 6$$

Puede observarse la siguiente equivalencia:

$$PR^4_{2,2} = {}_4C_2 = \frac{4!}{2!\,2!} = 6$$

En general, si m objetos están divididos en una clase m_1 y una segunda clase m_2, con $m = m_1 + m_2$, se cumple que :

$$PR^{m}_{m_1 m_2} = {}_{m}C_{m_1} = {}_{m}C_{m_2} = \frac{m!}{m_1!\ m_2!}$$

Ejercicio 2

1. Tienes cuatro monedas de un peso. ¿De cuántas formas puedes colocarlos sin importar el orden si siempre se ven las dos águilas y los dos sellos? En otras palabras, ¿de cuántas maneras puedes escribir?

2. ¿Cuántos números de 8 cifras puedes escribir con 4 tres, 2 cincos, un seis y un siete?

3 En cada caso, encuentra el número de permutaciones con repetición en cada grupo dado de letras.

a) A, A, G, E, E, E, M.
b) A, A, Y, Y, Y, Y, X, X, X.
c) A, L, G, E, B, R, A.
d) a, a, s
e) a, s, s.
f) C, X, X, X, X.

Objetivos: Entender los elementos clave de un experimento binomial y ser capaces de definir *x, n, p* y *q*
Saber y ser capaz de calcular y aplicar probabilidades binomiales usando la función de probabilidad binomial.
Calcular, describir e interpretar la media y la desviación estándar de una distribución de probabilidad binomial.

La distribución binomial se aplica en una gran cantidad de situaciones, como las mostradas a continuación:

- Se va a inspeccionar un lote de lámparas producido por cierta fábrica. Se sabe por experiencia, que en condiciones normales de uso, el 70% durará 2000 horas encendidas. Queremos conocer la probabilidad de que entre seis de estas lámparas, 4 duren 2000 horas encendidas.
- ¿Es fácil aprobar por adivinación? Para que un estudiante apruebe, debe contestar correctamente por lo menos 6 preguntas de 10 de opción múltiple (cada una con cuatro opciones). ¿Qué tan probable es que un alumno apruebe por adivinación?

Para que una situación o fenómeno sea considerado binomial, debe cumplir las siguientes propiedades:

1. Cada observación se puede clasificar en una y sólo una de dos categorías: *éxito* o *fracaso* (experimento dicotómico).
2. El resultado (es decir, el éxito o fracaso) de cualquier observación, es independiente del resultado de cualquier otra observación. Para que se cumpla esta condición, se considera que cada observación es producto de una *población infinita sin reposición* o de una *población finita con reposición.*
3. Como consecuencia de la propiedad 2, la probabilidad de que una observación sea clasificada como éxito, es constante de una observación a otra; por lo tanto, la probabilidad de que una observación sea clasificada como fracaso, también es constante a lo largo de todas las observaciones.

Para resolver problemas catalogados como binomiales, se usa una fórmula (función de probabilidad), que proporciona de manera directa las probabilidades. También es usual utilizar tablas elaboradas para dicho fin.
Sin embargo, para que puedas entender lo que hay detrás de esa función binomial, debes estudiar detenidamente la siguiente actividad.

Actividad 4.3a

Qué hacer

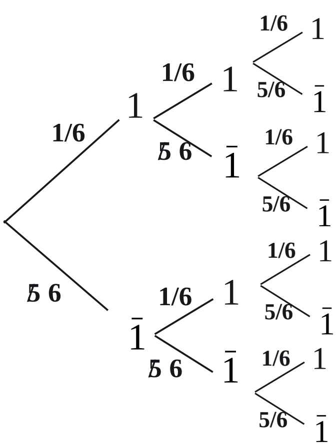
Estudia detenidamente los sigi entes ejemplos:

1. Sea el expe rimento qe consiste en lanzar un dado ba lanceado tres veces. ¿Cuál es la proba b lidad de ob ener exa ctamente dos unos?

Solución

Cuando estudiaste los exp erimentos dicotómicos, aprendiste a tratar este tipo de experimentos. Estamos frente a un expe rimento compuesto de tres etapas. Puesto qe nos interesa qe caig uno, en cada etapa las opciones son:

Verifica que el árbol de probabilidades es el
sigi ente:



En cada lanzamiento (etapa), tenemos qe :

P(éxito) = P(ob ener uno) = $1/6$

P(fracaso) = P(no ob ener uno) = $5/6$

La proba b lidad de ob ener dos unos es favorecido por:

$$\{11\bar{1},\ 1\bar{1}1,\ \bar{1}11\}$$

Entonces,

$$P(\text{obtener 2 unos}) = P(11\bar{1}) + P(1\bar{1}1) + P(\bar{1}11)$$
$$= \underbrace{(1/6)(1/6)(5/6) + (1/6)(5/6)(1/6) + (5/6)(1/6)(1/6)}$$
$$= 3 \times P(11\bar{1})$$

Es decir, la proba b lidad de este expe rimento b nomial, es un mlí tipo de la proba b lidad de un resultado qe llamaremos ***resultd bá ico*** En este ejemplo el resultado bá sico es: $11\bar{1}$.

La pregnt a q e nos falta contestar es: ¿cómo surg ese mlí tiplo?

El mlí tipo 3, s urg del sigi ente ha ch:

Actividad 4.3a (Cont.)

El arreglo $11\bar{1}$ se puede ordenar de tres maneras distintas:

$11\bar{1}$
$1\bar{1}1$
$\bar{1}11$

Pero, estas tres maneras distintas, son las permutaciones de tres objetos ($11\bar{1}$) con dos idénticos (11).

$$PR_{2,1}^{3} = \frac{3!}{2!1!} = 3$$

Entonces: *P(dos unos en tres lanzamientos) =*

$$= PR_{2,1}^{3} \times P(11\bar{1}) = \frac{3!}{2!1!} \times \left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{5}{6}\right) = 3 \times \frac{5}{216} = \frac{15}{216}$$

Obtien:

P(dos unos en tres lanzamientos) =

$$= {}_3C_2 \times P(11\bar{1}) = \frac{3!}{2!1!} \times \left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{5}{6}\right) = 3 \times \frac{5}{216} = \frac{15}{216}$$

2. Sea el experimento que consiste en lanzar un dado cinco veces. ¿Cuál es la probabilidad de obtener exactamente dos unos?

Solución

Obtener dos unos en cinco intentos, tiene como resultado básico: $11\bar{1}\,\bar{1}\,\bar{1}$

La probabilidad del resultado básico es: $P(11\bar{1}\,\bar{1}\,\bar{1}) = (1/6)(1/6)(5/6)(5/6)(5/6) = 5^3/6^5$

Pero, como no importa el orden en que aparezcan los unos, debemos multiplicar esta probabilidad por el número de permutaciones de 5 objetos con un grupo de 2 repetidos (11) y otro de 3 ($\bar{1}\,\bar{1}\,\bar{1}$).

Entonces:

P(2 unos en 5 lanzamientos) =

$$= PR_{2,3}^{5} \times P(11\bar{1}\bar{1}\bar{1}) = \frac{5!}{2!3!} \times \left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{5}{6}\right)\left(\frac{5}{6}\right)\left(\frac{5}{6}\right) = 10 \times \frac{5^3}{6^5}$$

Recuerda que el factor 10 que multiplica la probabilidad del resultado básico, puede también verse como una combinación de 5 objetos tomados 2 a la vez.

P(2 unos en 5 lanzamientos) =

$$= {}_5C_2 \times P(11\bar{1}\bar{1}\bar{1}) = \frac{5!}{2!3!} \times \left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{5}{6}\right)\left(\frac{5}{6}\right)\left(\frac{5}{6}\right) = 10 \times \frac{5^3}{6^5}$$

Actividad 4.3b

Vuelve a considerar el experimento que consiste en lanzar un dado cinco veces.

a) Verifica mediante un árbol de probabilidades el resultado obtenido para el suceso "*obtener exactamente dos unos*.

b) Determina la probabilidad de obtener exactamente tres cincos.

Obtención de la función de probabilidad binomial (modelo matemático)

A continuación desarrollaremos el modelo matemático de una distribución binomial. El modelo está basado en las siguientes consideraciones:

- En los problemas de probabilidad binomial, estamos interesados en la probabilidad de obtener "*x éxitos* en *n* intentos".

  En otras palabras: "*x éxito* y
  n - *x fracasos* en *n* intentos"

$$\overbrace{\underbrace{\qquad\qquad}_{x\text{ éxitos}}\underbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad}_{n\,-\,x\text{ fracasos}}}^{n\text{ intentos (muestra de tamaño } n)}$$

- Hay un número fijo de intentos (etapas o repeticiones) del experimento, y la probabilidad de éxito es la misma para cada intento.
- Llamaremos ***p*** a la probabilidad de un éxito y ***q* = *1* - *p*** la probabilidad de un fracaso.
- La probabilidad de obtener *x éxitos y n - x fracasos* en algún orden específico (***resultado básico***) es:

$$P(\text{obtener } x \text{ éxitos en un órden específico}) = p^x(1-p)^{n-x}$$

- Para considerar todas las posibles maneras en que puede darse el resultado básico, *multiplicamos la probabilidad de éste, por un factor*, que indica el número de maneras en que se puede ordenar dicho resultado básico.
- La manera en que se pueden colocar sin importar el orden, un resultado que en *n* intentos tiene *x* éxitos y *n* - *x* fracasos, es:

$$\underbrace{e\,e\ldots e}_{x\text{ éxitos}}\;\underbrace{f\,f\,f\ldots f}_{n\,-\,x\text{ fracasos}} \qquad\qquad PR^{n}_{x,n-x}=\frac{n!}{x!(n-x)!}$$

Ésto último, equivale a la manera en que se pueden tomar x lugares de n disponibles; ésto, representa una combinación de n objetos tomados x a la vez:

$$_nC_x = \frac{n!}{x!(n-x)!}$$

- Por tanto, la probabilidad de obtener x éxitos en n intentos independientes es:

$$P(x) = PR^n_{x,n-x} \bullet p^x(1-p)^{n-x} = {_nC_x} \bullet p^x(1-p)^{n-x} = \frac{n!}{x!(n-x)!} \bullet p^x(1-p)^{n-x}$$

Para $x = 0, 1, 2, \ldots$ o n.

Ejemplo

Según encuesta realizada por el Sindicato Nacional de Trabajadores de la Educación (SNTE), 1/3 de los estudiantes de nivel secundaria, se sienten inseguros dentro de su escuela. Si elegimos al azar a 5 estudiantes de secundaria, determina la probabilidad que entre los 5, sientan inseguridad:

a) 0 b) 1 c) 2 d) 3 e) 4 f) 5

Solución

Descripción del experimento: el experimento consiste en 5 intentos o repeticiones independientes; por tanto, $n = 5$. Si llamamos éxito al resultado "*siente inseguridad*", entonces, la probabilidad de éxito para cada intento que consiste en preguntar a un estudiante sobre su sentimiento de inseguridad es, $p = 1/3$, y se considera siempre la misma. La probabilidad de que no se sienta inseguridad es: $q = 1 - p = 1 - 1/3 = 2/3$

Solución del inciso a): $n = 5, x = 0, n - x = 5$

$$P(0) = {_5C_0} = \frac{5!}{0!5!}\left(\frac{1}{3}\right)^0\left(\frac{2}{3}\right)^5 = 1 \bullet 1 \bullet \left(\frac{32}{243}\right) = \frac{32}{243} = 0.1317$$

Por tanto, la probabilidad de que entre cinco estudiantes de secundaria, elegidos al azar, ninguno sienta inseguridad es 0.1317

Solución del inciso b): $n = 5, x = 1, n - x = 4$

$$P(1) = {_5C_1} = \frac{5!}{1!4!}\left(\frac{1}{3}\right)^1\left(\frac{2}{3}\right)^4 = 5 \bullet \frac{1}{3} \bullet \left(\frac{16}{81}\right) = \frac{80}{243} = 0.3292$$

Así, la probabilidad de que entre cinco estudiantes de secundaria, elegidos al azar, exactamente uno sienta inseguridad es 0.3292

Ejemplo
(Cont.)

Solución del inciso c): $n = 5, x = 2, n - x = 3$

$$P(2) = \frac{5!}{2!3!}\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^3 = 10\left(\frac{1}{9}\right)\left(\frac{8}{27}\right) = \frac{80}{243} = 0.3292$$

Así, la probabilidad de que entre cinco estudiantes de secundaria, elegidos al azar, exactamente dos sientan inseguridad es 0.3292

Solución del inciso d): $n = 5, x = 3, n - x = 2$

$$P(3) = \frac{5!}{3!2!}\left(\frac{1}{3}\right)^3\left(\frac{2}{3}\right)^2 = 10\left(\frac{1}{27}\right)\left(\frac{4}{9}\right) = \frac{40}{243} = 0.1646$$

Por tanto, la probabilidad de que entre cinco estudiantes de secundaria, elegidos al azar, exactamente tres sientan inseguridad es 0.1646

Solución del inciso e): $n = 5, x = 4, n - x = 1$

$$P(4) = \frac{5!}{4!1!}\left(\frac{1}{3}\right)^4\left(\frac{2}{3}\right)^1 = 5\left(\frac{1}{81}\right)\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{10}{243} = 0.0412$$

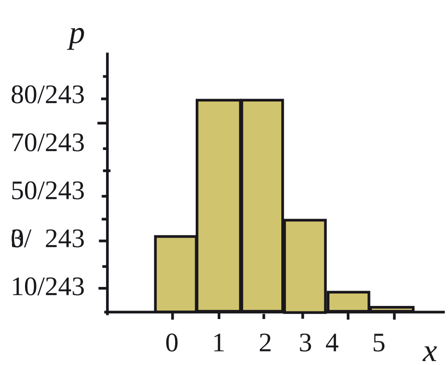
Por tanto, la probabilidad de que entre cinco estudiantes de secundaria, elegidos al azar, exactamente cuatro sientan inseguridad es 0.0412

Solución del inciso f): $n = 5, x = 5, n - x = 0$

$$P(5) = \frac{5!}{5!0!}\left(\frac{1}{3}\right)^5\left(\frac{2}{3}\right)^0 = 1\left(\frac{1}{243}\right)(1) = \frac{1}{243} = 0.0041$$

Por tanto, la probabilidad de que entre cinco estudiantes de secundaria, elegidos al azar, exactamente cinco sientan inseguridad es 0.0041

Puesto que hemos calculado las probabilidades para cada uno de los valores posibles de la variable aleatoria, a saber: $x = 0, 1, 2, 3, 4, 5$, podemos trazar el histograma de la distribución. Observa la figura y contesta: ¿qué forma tiene el histograma?_



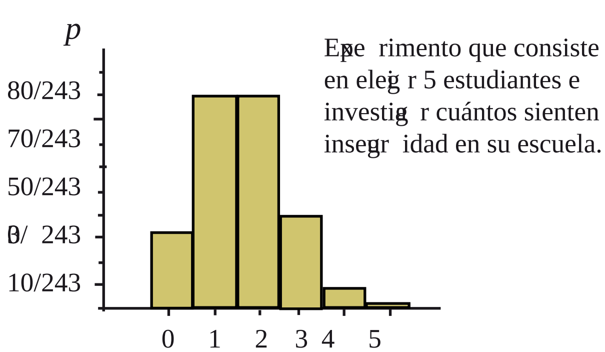
Actividad 4.3c

Considera los siguientes experimentos y la variable aleatoria indicada:

1) Tres lanzamientos de un dado balanceado. Determina la probabilidad que entre los 3 lanzamientos aparezcan 0, 1, 2 ó 3 veces la cara con tres puntos. Traza el histograma.
   a) Verifica mediante un árbol de probabilidades el resultado obtenido para el suceso "*obtener exactamente dos unos*.
   b) Determina la probabilidad de obtener exactamente tres cincos.
2) Cuatro lanzamientos de una moneda balanceada. Determina la probabilidad que entre los 4 lanzamientos aparezcan 0, 1, 2, 3 ó 4 veces la cara con águila. Traza el histograma.
   a) Verifica mediante un árbol de probabilidades el resultado obtenido para el suceso "*obtener exactamente dos unos*.
   b) Determina la probabilidad de obtener exactamente tres cincos.

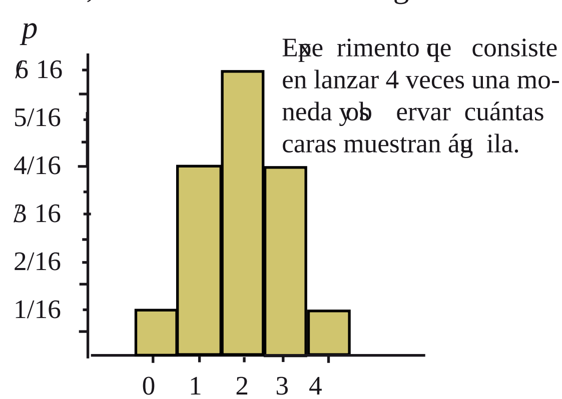
Forma de una distribución binomial.

Los resultados de la actividad (4.3 c), te permiten confirmar la siguiente afirmación: una distribución binomial puede ser simétrica o sesgada. Siempre que p sea igual a 0.5, la distribución binomial será simétricas. Sin embargo, cuando p sea diferente de cero, la distribución será sesgada.



x: número de estudiantes que se sienten inseguros.

Distribución binomial con $p = 1/3$ (Sesgada a la derecha)



x: número de águilas.

Distribución binomial con $p = 1/2$ (Simétrica)

La media y la desviación estándar de una distribución binomial

Recuerda que la media y la desviación estándar, ayudan a describir una distribución. A continuación estableceremos las fórmulas para calcular la media y la desviación estándar de una distribución binomial. Para que cuentes con un apoyo para el entendimiento de dichas fórmulas, utilizaremos el siguiente experimento: Un matrimonio desea procrear cuatro hijos. Asumiendo que existe la misma probabilidad de que nazca niño o niña en cada nacimiento, realiza lo indicado para la variable aleatoria "*número de niños*":

a) Construye la distribución de probabilidad
b) Calcula la media y desviación estándar.

Descripción del experimento: el experimento consiste en 4 intentos o repeticiones independientes; por tanto, $n = 4$. Si llamamos éxito al resultado "*nace niño*", entonces, la probabilidad de éxito para cada intento que consiste en verificar el sexo de cada bebé es, $p = 1/2$ y se considera siempre la misma. La probabilidad de que no sea niño es:

$q = 1 - p = 1 - 1/2 = 1/2$

Probabilidad de tener:

$$0 \text{ niños}: \quad P(0) = \frac{4!}{0!4!}\left(\frac{1}{2}\right)^0\left(\frac{1}{2}\right)^4 = 1 \bullet 1 \bullet \left(\frac{1}{16}\right) = \frac{1}{16}$$

$$1 \text{ niño}: \quad P(1) = \frac{4!}{1!3!}\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^3 = 4 \bullet \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{8}\right) = \frac{4}{16}$$

$$2 \text{ niños}: \quad P(2) = \frac{4!}{2!2!}\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^2 = 6 \bullet \left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{6}{16}$$

$$3 \text{ niños}: \quad P(3) = \frac{4!}{3!1!}\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^1 = 4 \bullet \left(\frac{1}{8}\right)\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{4}{16}$$

$$4 \text{ niños}: \quad P(4) = \frac{4!}{4!0!}\left(\frac{1}{2}\right)^4\left(\frac{1}{2}\right)^0 = 1 \bullet \left(\frac{1}{16}\right)(1) = \frac{1}{16}$$

Distribución de probabilidad:

x	$p(x)$
0	6/16
1	4/16
2	6/16
3	4/16
4	1/16

Cálculo de la media

$$\mu = E(x) = \Sigma x \bullet p(x)$$

$$= 0\times\left(\frac{1}{16}\right) + 1\times\left(\frac{4}{16}\right) + 2\times\left(\frac{6}{16}\right) + 3\times\left(\frac{4}{16}\right) + 4\times\left(\frac{1}{16}\right)$$

$$= 2$$

Con base en este resultado, haremos las siguientes observaciones:

- El experimento consiste en cuatro etapas: n = 4.
- La probabilidad de éxito en cada etapa es: $p = 1/2$ y de fracaso es: $q = 1/2$.
- El valor de la media puede escribirse:

$$\mu = 4 \bullet \frac{1}{2} = n \bullet p = 2$$

En general, se cumple que:

> La media de una distribución binomial es
>
> $$\mu = n \cdot p$$

Calculemos ahora, la desviación estándar de la distribución anterior:

$$\sigma^2 = \Sigma(x-\mu)^2 \bullet p(x)$$

$$= (0-2)^2 \times \left(\frac{1}{16}\right) + (1-2)^2 \times \left(\frac{4}{16}\right) + (2-2)^2 \times \left(\frac{6}{16}\right) + (3-2)^2 \times \left(\frac{4}{16}\right) + (4-2)^2 \times \left(\frac{1}{16}\right)$$

$$= 4 \times \left(\frac{1}{16}\right) + 1 \times \left(\frac{4}{16}\right) + 0 \times \left(\frac{6}{16}\right) + 1 \times \left(\frac{4}{16}\right) + 4 \times \left(\frac{1}{16}\right) = 1$$

$$\sigma = \sqrt{1} = 1$$

Observa que:

$$\sigma^2 = 4\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) = 1$$

$$= n \bullet p \bullet q$$

En general, este resultado siempre es válido.

> La desviación estándar de una distribución binomial es:
>
> $$\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot q} = \sqrt{n \cdot p\,(1-p)}$$

Ejercicio 4

1. La probabilidad de que una persona lea un volante que se le entrega en la vía pública es 0.4. Supongamos que el volante se entrega a tres personas, cuyas decsisones de leerlo son independientes. a) Construya la distribución de probabilidades binomial del número de personas que estarán dispuestas a leer el volante. b) Calcule la media y desviación estándar. c) Describa la distribución obtenida. d) ¿Cuál es la probabilidad de que al menos 2 personas lean el volante?
2. En una caseta revisión fitosanitaria, la probabilidad de que un automóvil lleve frutas es de 0.01 y el que un automóvil lleve o no frutas no depende de que cualquier otro automóvil la lleve. ¿Cuál es la probabilidad de que no se encuentren frutas en una revisión de 1000 automóviles?
3 Se sabe que si tanto la mamá como el papá son zurdos, el 50% de sus hijos también lo será. ¿Cuál es la probabilidad de que en diez familias en las que ambos papás son zurdos, haya al menos un hijo zurdo?

Lección 4 Distribución de probabilidad normal

Objetivos: Entender que una curva normal es una curva en forma de campana, con área total bajo la curva igual a 1.
Entender que la curva normal es simétrica alrededor de la media, con un área de 0.5000 en cada lado de la media.
Entender la relación entre la regla empírica y la curva normal.
Entender y ser capaz de utilizar la tabla de áreas de distribución normal estándar.
Calcular probabilidades para intervalos definidos en la distribución.
Determinar valores z para intervalos correspondientes en la distribución normal estándar.
Aplicar la distribución normal en situaciones diversas.

Actividad 4.4 a

Qué hacer

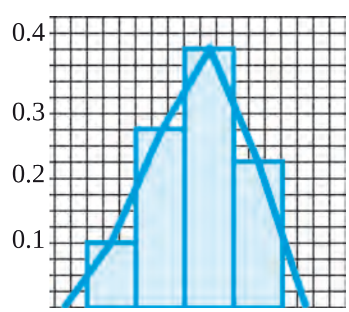
En tu curso de estadística estudiaste el concepto curva de frecuencia. Puesto que este concepto es importante para el tema que nos ocupa, a continuación deberás estudiar con mucha atención la forma en que se genera una curva de frecuencias.

- Consideremos los siguientes datos:
  Se ha anotado el peso en kilogramos de 40 estudiantes de una escuela.

41	46	46	46	51	51	52	54	54
57	58	58	58	59	60	61	61	61
64	64	65	65	66	67	67	67	68
68	68	69	69	72	72	73	74	75
75	78	78	80					

- Si agrupamos los datos de 10 en 10 kg obtenemos la siguiente distribución de frecuencias con su histograma y polígono de frecuencias asociado.

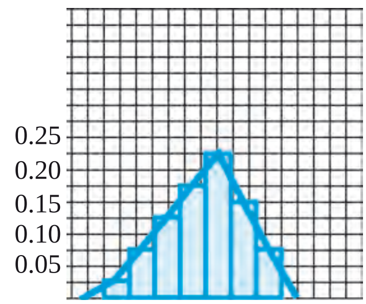
Intervalos	f	fr
[41,51)	4	0.100
[51,61)	11	0.275
[61,71)	16	0.400
[71,81)	9	0.225
Total	40	1.000



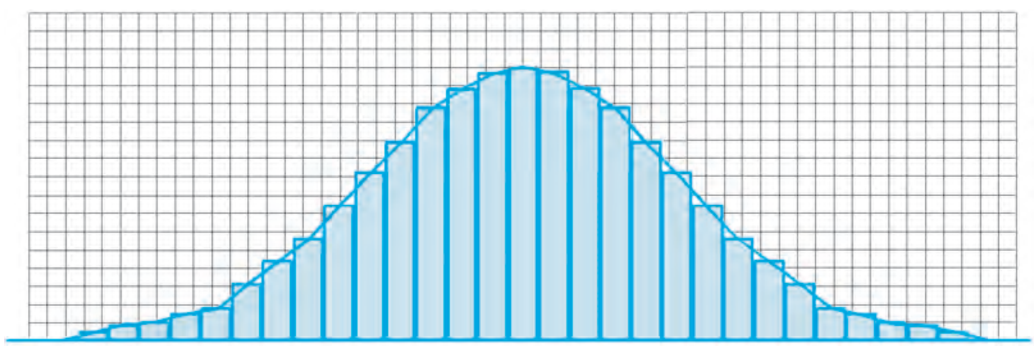
Actividad 4.4 a (Cont.)

- Si agrupamos los datos de 5 en 5 kg obtenemos la siguiente distribución de frecuencias con su histograma y polígono de frecuencias asociado.

Intervalos	f	fr
[41,46)	1	0.025
[46,51)	3	0.075
[51,56)	5	0.125
[56,61)	6	0.150
[61,66)	7	0.175
[66,71)	9	0.225
[71,76)	6	0.150
[76,81)	3	0.075
Total	40	1.000



- Si se hace el mismo estudio para todos los individuos de un país y agrupamos los datos aproximados por los decigramos y centigramos obtenemos un polígono de frecuencias que se aproxima a una curva que se llama **curva de frecuencia**.

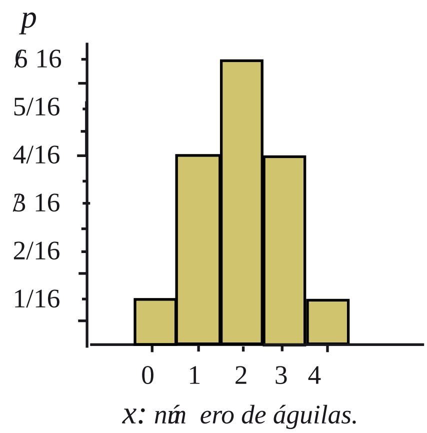


Como ya lo hemos mencionado, las curvas de frecuencias más comunes son la simétrica (normal) y las sesgadas (a la derecha o a la izquierda). La curva de frecuencia anterior es una curva de frecuencias normal, acampanada o gaussiana. En las páginas siguientes, estudiaremos los aspectos básicos de esta curva.

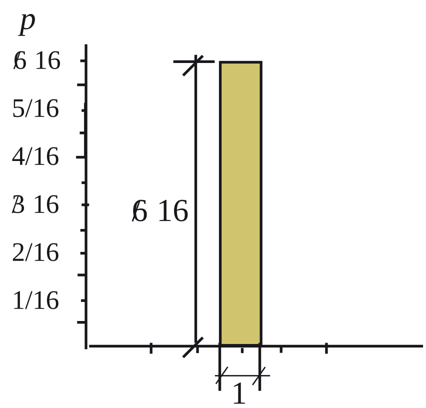
Introducción a las Distribuciones continuas

Al representar una distribución de probabilidad discreta mediante un histograma, la probabilidad de un valor cualquiera de la variable aleatoria, viene dado por la altura del rectángulo correspondiente.

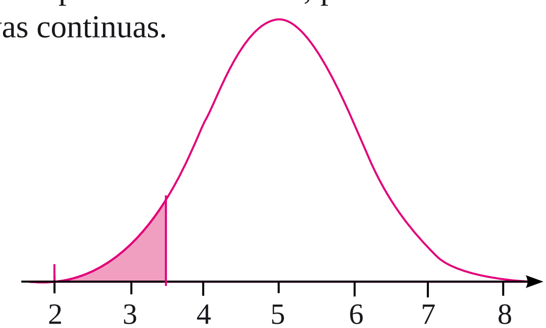
Por ejemplo, sea el histograma adjunto que corresponde al experimento que consiste en lanzar 4 veces una moneda y observar cuántas caras muestran águila. La probabilidad de $x = 2$ puede observarse que es 6/16. Sin embargo, si consideramos que la base del rectángulo es una unidad, la probabilidad también puede leerse como el área del rectángulo: en el ejemplo sería un rectángulo cuya base tiene por límites 2.5 y 3.5



$$P(3) = \text{área del rectángulo}$$
$$= \text{base por altura}$$
$$= 1 \times \frac{1}{16} = \frac{1}{16}$$



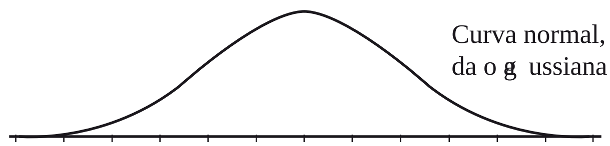
Al trabajar con probabilidades relacionadas con variables aleatorias continuas, el lugar de los histogramas lo ocupan las curvas continuas. En este caso, las probabilidades también se representan por medio de áreas, pero no de áreas de rectángulos, sino de áreas bajo curvas continuas.



En la figura, la probabilidad de que la variable tome un valor de 2.5 a 3.5, por ejemplo, viene dada por el área de la zona coloreada que se halla debajo de la curva. Aprender a calcular estas probabilidades, es uno de los objetivos inmediatos en este curso.

LA DISTRIBUCIÓN DE PROBABILIDAD NORMAL

Existe una cantidad muy diversa de distribuciones continuas. Sin embargo, la más importante es la llamada distribución normal. En la actividad (4.4 a), se analizó la variable peso y se obtuvo un histograma aproximadamente simétrico en forma de montículo o de campana. Se ha verificado que para poblaciones grandes, la distribución de la variable aleatoria peso, siempre es en forma de campana. Estas distribuciones se denominan *normales, acampanadas o gaussianas*. Son muchas las variables cuyo comportamiento presenta esta forma; por ejemplo, estaturas, pesos, calificaciones, entre muchas otras.



Curva normal, acampanada o gaussiana

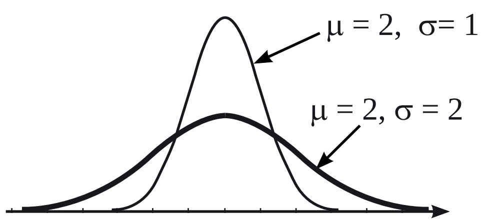
La función de probabilidad (fórmula matemática) de esta curva es:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

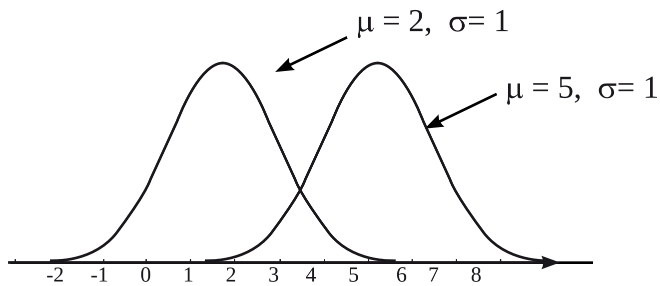
Para $-\infty < x < \infty$, donde ***e*** es el número irracional 2.71828...

Para valores fijos de μ y σ, nos queda una expresión en función de *x*. Al asignar valores a *x*, podemos calcular los valores respectivos de la función. Al graficar los pares coordenados, obtenemos la curva ya mecionada en forma de campana, simétrica con respecto a una recta vertical que pasa por su centro (media) y que se extiende indefinidamente en ambas direcciones.

Una característica importante de estas curvas normales, es que para cada par de valores μ y σ, hay una y sólo una distribución normal.



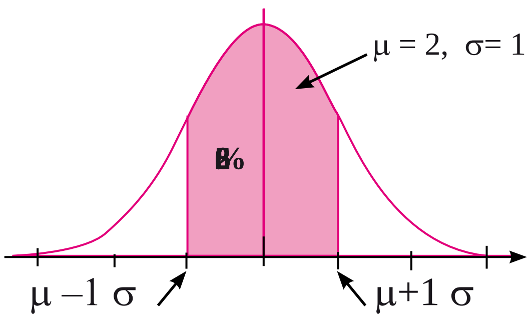
Dos curvas normales con medias iguales pero desviaciones estándar diferentes.

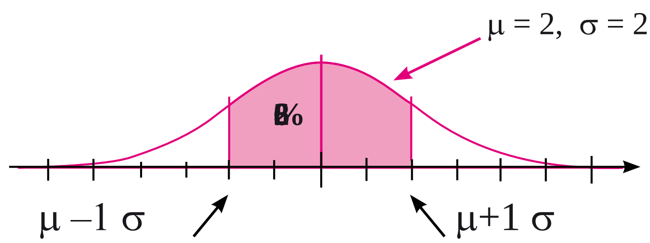


Dos curvas normales con medias distintas pero desviaciones estándar iguales.

Regla empírica

Una tarea clave que debemos hacer con las distribuciones normales, es calcular las áreas que se hallan bajo sus curvas. Para este propósito, debemos tener en cuenta algunas propiedades. Una de estas propiedades es la siguiente: Las curvas normales, tienen la misma proporción de área limitada por la curva y segmentos verticales ubicados a un mismo número de desviaciones estándar.

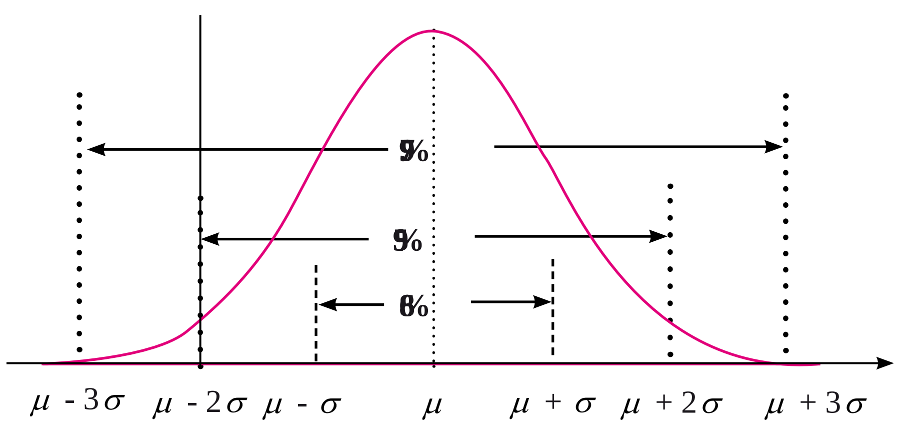




La denominada ***regla empírica*** establece estas proprociones para las siguientes regiones:

Para cualquier distribución normal:

- el área entre $\mu - \sigma$ y $\mu + \sigma$ es aproximadamente el 68% del área total.
- el área entre $\mu - 2\sigma$ y $\mu + 2\sigma$ es aproximadamente el 95% del área total.
- el área entre $\mu - 3\sigma$ y $\mu + 3\sigma$ es aproximadamente el 99.7% del área total.



Teóricamente, las colas de la curva nunca tocan el eje de las abscisas, sino que se extienden infinitamente en ambas direcciones.

Actividad 4.4 b

Con base en la regla empírica, contesta:

a. ¿Qué proporción de una distribución normal es mayor que la media?

b ¿Qué proporción de una distribución normal está a menos de una desviación estándar de la media?

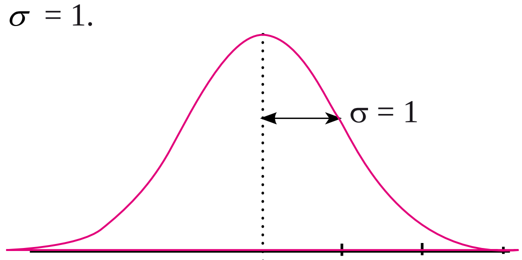
c. ¿Qué proporción es mayor que un valor que está a una desviación estándar por abajo de la media?

La regla empírica es una herramienta que resulta útil únicamente en aquellos casos en que se requieran encontrar probabilidades asociadas sólo con múltiplos de números enteros de la desviación estándar (a menos de una, dos o tres desviaciones estándar de la media). En consecuencia, nuestra próxima tarea es calcular las áreas que se hallan bajo sus curvas para cualesquier número (entero o decimal) de desviaciones estándar.

Hallar áreas bajo curvas a partir de su fórmula matemática, corresponde a la rama de la matemática denominada cálculo integral, por lo que no es materia de estudio en este curso. En la práctica estadística dichas áreas se obtienen a partir de tablas. Ahora bien, puesto que para cada par de valores de μ y σ, habrá una curva normal, existen muchas distribuciones normales, y tendríamos que elaborar infinidad de tablas. Sin embargo, esto último no será necesario; lo único que necesitamos es tabular estas áreas para la distribución normal con $\mu = 0$ y $\sigma = 1$. Este hecho, descansa en dos conceptos: *puntuación o valores z y distribución normal estándar.*

Distribución normal estándar

La distribución normal estándar, es aquella distribución con $\mu = 0$ y $\sigma = 1$.



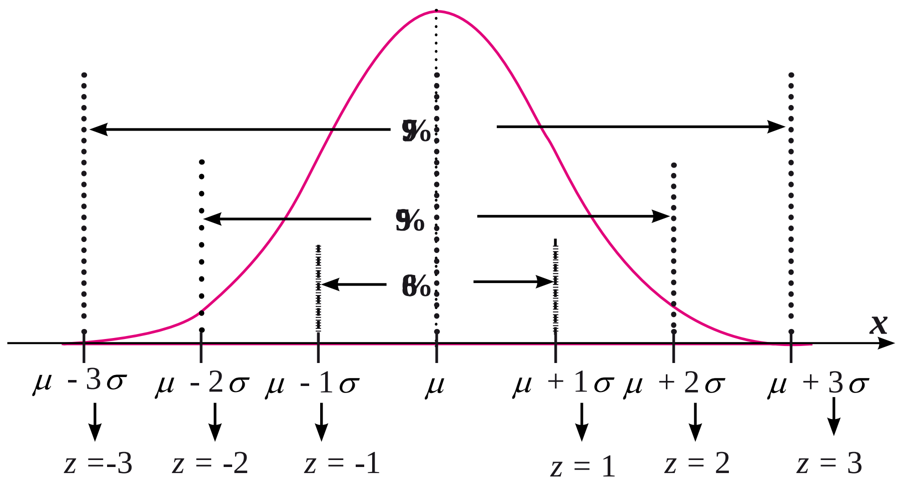
Valor o puntuación z

Para comprender el significado del valor **z**, estudia atentamente las siguientes cuestiones:

1. La regla empírica nos proporciona áreas comprendidas entre la curva y dos segmentos determinados por un número de desviaciones estándar antes y después de la media. *Ese número de desviaciones se llama valor z. Entonces, cada valor x puede de escribirse como:* $x = \mu + \mathbf{z}\sigma$

Así pues, la regla empírica también puede plantearse como:

- el área entre z = -1, z = 1 y la curva, es de 68%.
- el área entre z = -2, z = 2 y la curva, es de 98%.
- el área entre z = -3, z = 3 y la curva, es de 99.7%.



En el caso de una distribución normal estándar, puesto que $\mu = 0$ y $\sigma = 1$, la expresión $x = \mu + z\sigma$, se convierte en:

$$x = 0 + z(1) = z$$

Por esta razón, a la distribución normal estándar también se le conoce como la distribución normal de la *variable z.* A continuación se prsenta la tabla denominada: *Área de la distribución normal estándar.*

Los valores de esta tabla son las probabilidades de que una variable aleatoria que tiene la distribución normal estándar, tome un valor entre 0 y z; la probabilidad está representada por el área coloreada bajo la curva de la figura siguiente. Las áreas para valores negativos de z se obtienen por simetría.

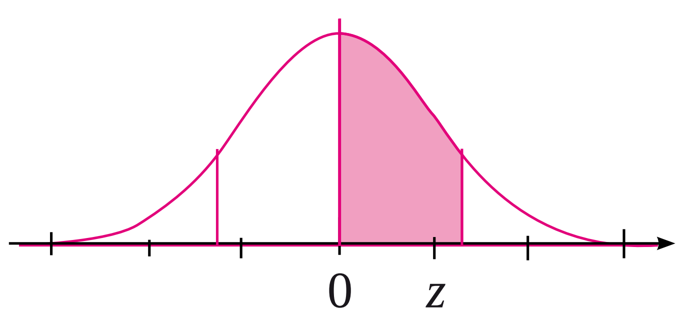


TABLA I:
Área de la distribución normal estándar

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.0000	0.0040	0.0080	0.0120	0.0160	0.0199	0.0239	0.0279	0.0319	0.0359
0.1	0.0398	0.0438	0.0478	0.0517	0.0557	0.0596	0.0636	0.0675	0.0714	0.0753
0.2	0.0793	0.0832	0.0871	0.0910	0.0948	0.0987	0.1026	0.1064	0.1103	0.1141
0.3	0.1179	0.1217	0.1255	0.1293	0.1331	0.1368	0.1406	0.1443	0.1480	0.1517
0.4	0.1554	0.1591	0.1628	0.1664	0.1700	0.1736	0.1772	0.1808	0.1844	0.1879
0.5	0.1915	0.1950	0.1985	0.2019	0.2054	0.2088	0.2123	0.2157	0.2190	0.2224
0.6	0.2257	0.2291	0.2324	0.2357	0.2389	0.2422	0.2454	0.2486	0.2517	0.2549
0.7	0.2580	0.2611	0.2642	0.2673	0.2704	0.2734	0.2764	0.2794	0.2823	0.2852
0.8	0.2881	0.2910	0.2939	0.2967	0.2995	0.3023	0.3051	0.3078	0.3106	0.3133
0.9	0.3159	0.3186	0.3212	0.3238	0.3264	0.3289	0.3315	0.3340	0.3365	0.3389
1.0	0.3413	0.3438	0.3461	0.3485	0.3508	0.3531	0.3554	0.3577	0.3599	0.3621
1.1	0.3643	0.3665	0.3686	0.3708	0.3729	0.3749	0.3770	0.3790	0.3810	0.3830
1.2	0.3849	0.3869	0.3888	0.3907	0.3925	0.3944	0.3962	0.3980	0.3997	0.4015
1.3	0.4032	0.4049	0.4066	0.4082	0.4099	0.4115	0.4131	0.4147	0.4162	0.4177
1.4	0.4192	0.4207	0.4222	0.4236	0.4251	0.4265	0.4279	0.4292	0.4306	0.4319
1.5	0.4332	0.4345	0.4357	0.4370	0.4382	0.4394	0.4406	0.4418	0.4429	0.4441
1.6	0.4452	0.4463	0.4474	0.4484	0.4495	0.4505	0.4515	0.4525	0.4535	0.4545
1.7	0.4554	0.4564	0.4573	0.4582	0.4591	0.4599	0.4608	0.4616	0.4625	0.4633
1.8	0.4641	0.4649	0.4656	0.4664	0.4671	0.4678	0.4686	0.4693	0.4699	0.4706
1.9	0.4713	0.4719	0.4726	0.4732	0.4738	0.4744	0.4750	0.4756	0.4761	0.4767
2.0	0.4772	0.4778	0.4783	0.4788	0.4793	0.4798	0.4803	0.4808	0.4812	0.4817
2.1	0.4821	0.4826	0.4830	0.4834	0.4838	0.4842	0.4846	0.4850	0.4854	0.4857
2.2	0.4861	0.4864	0.4868	0.4871	0.4875	0.4878	0.4881	0.4884	0.4887	0.4890
2.3	0.4893	0.4896	0.4898	0.4901	0.4904	0.4906	0.4909	0.4911	0.4913	0.4916
2.4	0.4918	0.4920	0.4922	0.4925	0.4927	0.4929	0.4931	0.4932	0.4934	0.4936
2.5	0.4938	0.4940	0.4941	0.4943	0.4945	0.4946	0.4948	0.4949	0.4951	0.4952
2.6	0.4953	0.4955	0.4956	0.4957	0.4959	0.4960	0.4961	0.4962	0.4963	0.4964
2.7	0.4965	0.4966	0.4967	0.4968	0.4969	0.4970	0.4971	0.4972	0.4973	0.4974
2.8	0.4974	0.4975	0.4976	0.4977	0.4977	0.4978	0.4979	0.4979	0.4980	0.4981
2.9	0.4981	0.4982	0.4982	0.4983	0.4984	0.4984	0.4985	0.4985	0.4986	0.4986
3.0	0.4987	0.4987	0.4987	0.4988	0.4988	0.4989	0.4989	0.4989	0.4990	0.4990
3.1	0.4990	0.4991	0.4991	0.4991	0.4992	0.4992	0.4992	0.4992	0.4993	0.4993
3.2	0.4993	0.4993	0.4994	0.4994	0.4994	0.4994	0.4994	0.4995	0.4995	0.4995
3.3	0.4995	0.4995	0.4995	0.4996	0.4996	0.4996	0.4996	0.4996	0.4996	0.4997
3.4	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4998
3.5	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998
3.6	0.4998	0.4998	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999
3.7	0.4999									
4.0	0.49997									
4.5	0.499997									
5.0	0.4999997									

CÁLCULO DE PROBABILIDADES UTILIZANDO LA CURVA NORMAL ESTÁNDAR

La tabla de áreas bajo la curva normal estándar, se utiliza para calcular áreas bajo cualquier curva normal. Este cálculo se basa en las siguientes consideraciones:

1. Es importante entender que en el cálculo de áreas bajo la curva, no se trabaja con valores *x*, sino con valores z; el acceso a la tabla es con valores *z*.
2. Debido a que la tabla estándar utiliza valores *z*, debemos convertir los valores *x* en valores *z*. Ésto se llama estandarizar los valores *x*. La estandarización se hace aplicando la fórmula:

$$x = \mu + z\sigma$$

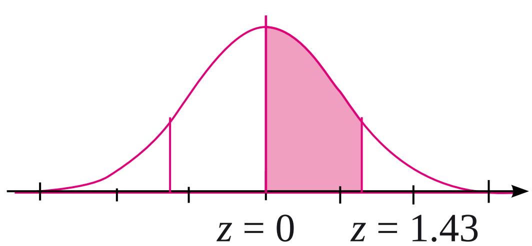
Despejando *z*:

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

3. El área bajo toda la curva normal es igual a 1.
4. La media divide el área a la mitad, 0.5 a cada lado.
5. Para valores negativos de *z*, el área se determina por simetría.
6. En la tabla I se enumeran todas las posibles áreas en los intervalos que empiezan en la media (localizada en $z = 0.0000$) y terminan en un valor específico de *z*.
7. Las probabilidades (áreas) de otros intervalos se encuentran usando los elementos de la tabla y aplicando operaciones de suma y resta, según las propiedades de la curva normal.

Ejemplo 1 Encuentra el área bajo la curva normal estándar entre $z = 0$ y $z = 1.43$

Solución



Éste es un caso de respuesta directa. El valor de z se localiza en el margen de la tabla, con las unidades y el dígito de los décimos escritos en el lado izquierdo y la cifra de los centécimos escrita a lo largo del margen superior.

Ejemplo 1
(Cont.)

z	0.00	0..01	0.02	0.03	...
.					
.					
.					
.					
1.4				0.42[illegible]...	

Para $z = 1.43$ se localizan el renglón identificado como 1.4 y la columna identificada como 0.03; en su intersección se encuentra 0.42[illegible] Este valor representa la medida del área o probabilidad para el intervalo $z = 0.000$ a $z = 1.43$

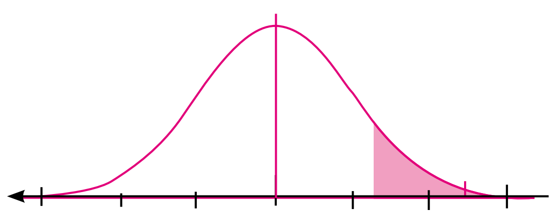
Por tanto, $P(0 < z <$ [illegible] $=$ [illegible]

Actividad 4.4 C

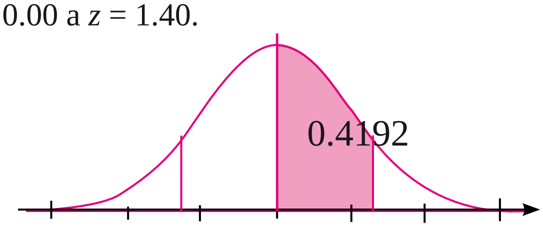
a. Encuentra el área bajo la curva normal estándar entre $z = 0$ y $z = 2.2$.
b Encuentra el área bajo la curva normal estándar entre $z = 0$ y $z = 1.83$
c. Encuentra el área bajo la curva normal estándar entre $z = 0$ y $z = 0.43$
d. Encuentra el área bajo la curva normal estándar entre $z = 0$ y $z =$ [illegible]8.
e. ¿Cuál es el valor z correspondiente a un área de 0.478?

Ejemplo 2 Encuentra el área bajo la curva normal estándar a la derecha de $z = 1.40$.

Solución



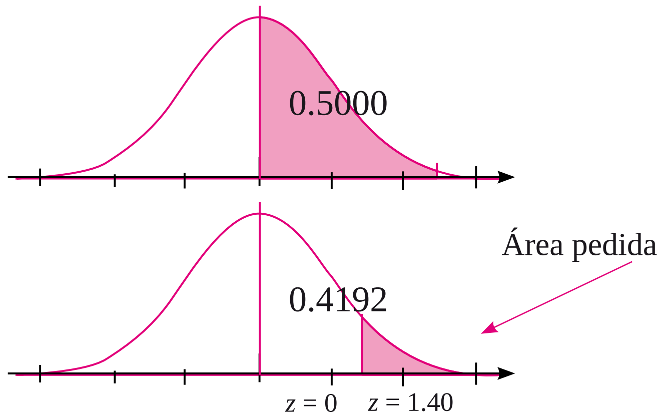
La tabla no proporciona directamente el área pedida.El área dada por la tabla, es la que va de $z = 0.00$ a $z = 1.40$.



Para determinar el área a la derecha de $z = 1.42$ tomamos en cuenta que *"toda el área a la derecha de la media es igual a* [illegible]

Entonces, para encontrar el área pedida, se resta 0.4192 de 0.5000.

$P(z > 1.40) = 0.5000 - 0.4192 = 0.0808$

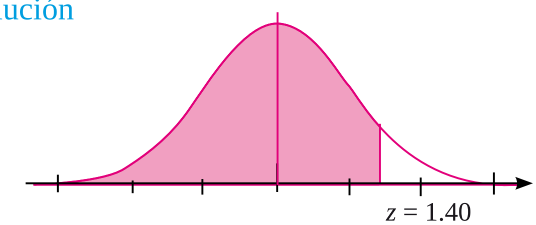


Actividad 4.4 d

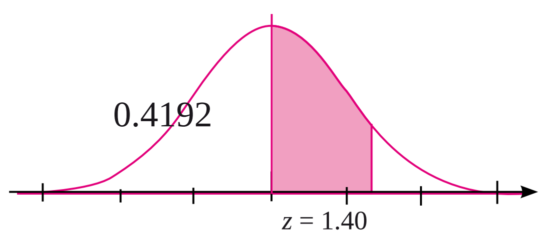
a. Encuentra el área bajo la curva normal estándar a la derecha de $z = 2.23$.
b Encuentra el área bajo la curva normal estándar a la derecha de $z = 0.40$.
c. Encuentra el área bajo la curva normal estándar a la derecha de $z = 0.08$.
d. Encuentra el área bajo la curva normal estándar a la derecha de $z = 3.20$.

Ejemplo 3 Encuentra el área bajo la curva normal estándar a la izquierda de $z = 1.40$.

Solución



Ya sabemos que la tabla proporciona el área de $z = 0.00$ a $z = 1.40$.



Para determinar el área a la izquierda de $z = 1.40$ tomamos en cuenta que "toda el área a la izquierda de la media es igual a 0.5000".

Entonces, para encontrar el área pedida, se suma 0.4192 de 0.5000.

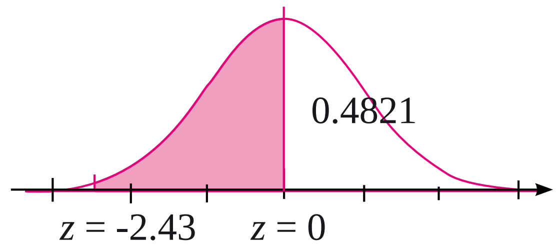
Por tanto, $P(z < 1.40) = 0.5000 + 0.4192 = 0.9192$.

Actividad 4.4 e

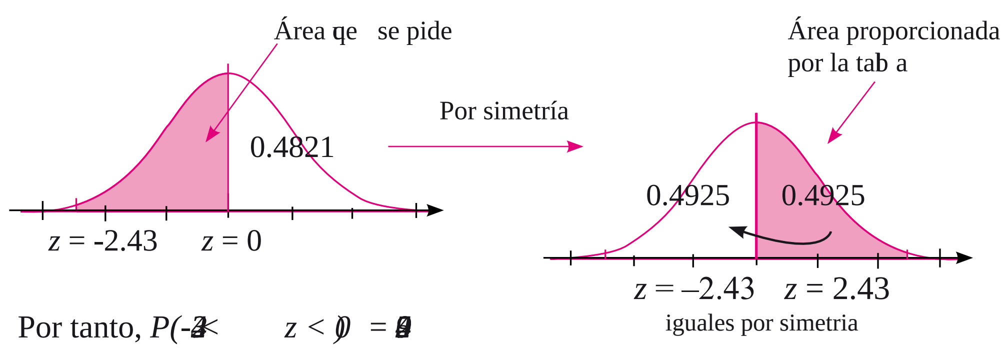
a. Encuentra el área bajo la curva normal estándar a la izquierda de $z = 2.3$[illegible].
b Encuentra el área bajo la curva normal estándar a la izquierda de $z = 0.40$.
c. Encuentra el área bajo la curva normal estándar a la izquierda de $z = 0.08$.
d. Encuentra el área bajo la curva normal estándar a la izquierda de $z = 3.20$.

Ejemplo 4 Encuentra el área bajo la curva normal estándar entre $z = 0$ y $z = -2.43$

Solución



Debido a la simetría, la determinación de las probabilidades asociadas con valores por abajo (a la izquierda) de la media, el área entre la media y un valor negativo de z, es exactamente la misma que el área entre la media y el mismo valor de z pero positivo.



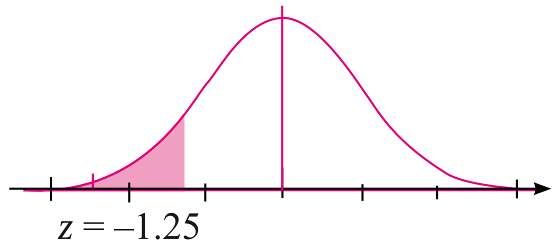
Por tanto, $P(-2.43 < z < 0) =$ [illegible]

Actividad 4.4 f

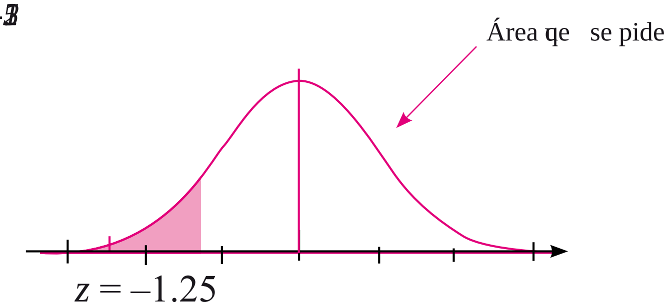
a. Encuentra el área bajo la curva normal estándar entre $z = 0$ y $z = -2.43$
b. Encuentra el área bajo la curva normal estándar entre $z = 0$ y $z = -0.40$.
c. Encuentra el área bajo la curva normal estándar entre $z = 0$ y $z = -0.08$.
d. Encuentra el área bajo la curva normal estándar entre $z = 0$ y $z = -3.20$

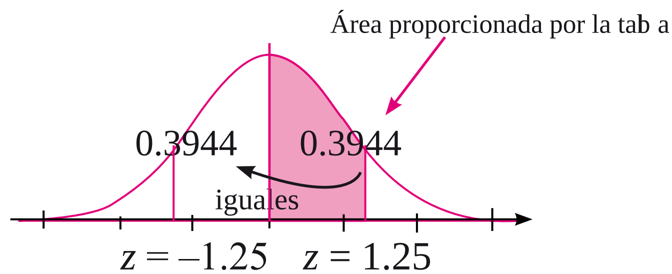
Ejemplo 5 Encuentra el área b jo la curva normal estándar a la izqi erda de z = –1.25.

Solución

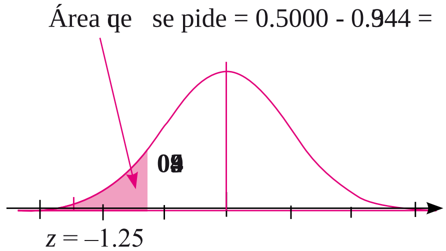


En estos casos, deb mos tener en cuenta qe la tab a proporciona el área de $z = 0$ a $z = 3$, la cual será iga l por simetría al área qe va de $z = 0$ a $z = -3$





Área qe se pide = 0.5000 - 0.944 = 0.1056



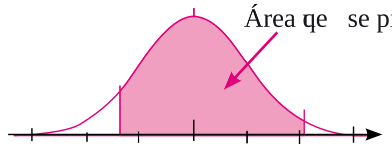
Por tanto, $P(z < -3)$ = 0 6

Actividad 4.4 g

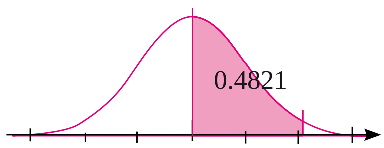
a. Encuentra el área b jo la curva normal estándar a la izqi erda de z = -2.43
bE ncuentra el área b jo la curva normal estándar a la izqi erda de z = -0.40.
c. Encuentra el área b jo la curva normal estándar a la izqi erda de z = -0.08.
d. Encuentra el área b jo la curva normal estándar a la izqi erda de z = -320

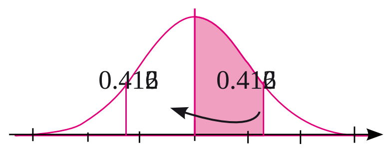
Ejemplo 6 Encuentra el área bajo la curva normal estándar entre $z = -1.38$ y $z = 2.10$

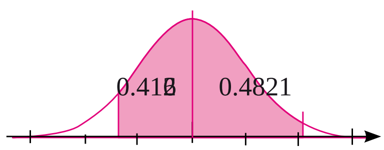
Solución



Áreas proporcionadas por la tabla:







Área pedida = 0.412 + 0.4821 = 0.8983

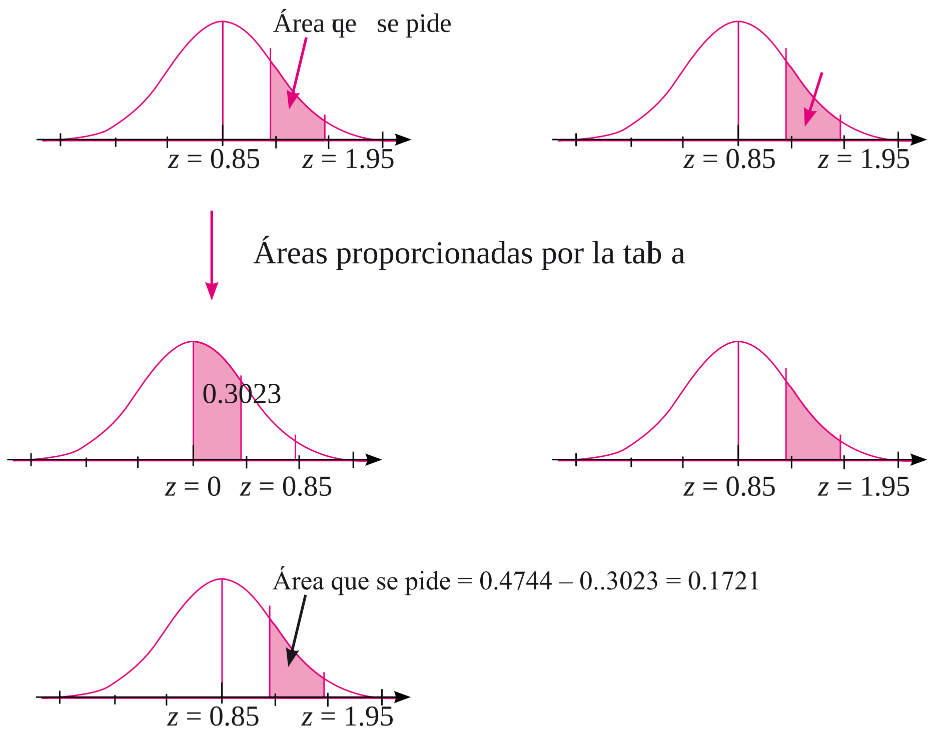
Por tanto, $P(-8 < z < 2) = 8$

Actividad 4.4 h

a. Encuentra el área bajo la curva normal estándar entre $z = -1.26$ y $z = 2.15$.
b. Encuentra el área bajo la curva normal estándar entre $z = -2.00$ y $z = 1.34$.
c. Encuentra el área bajo la curva normal estándar entre $z = -1.47$ y $z = 1.05$.
d. Encuentra el área bajo la curva normal estándar entre $z = -3.20$ y $z = 3.20$

Ejemplo 7 Encuentra el área bajo la curva normal estándar entre $z = 0.85$ y $z = 1.95$

Solución



Por tanto, *P*(08< z < 9) = 0

Actividad 4.4 i

a. Encuentra el área bajo la curva normal estándar entre $z = 1.26$ y $z = 2.15$.
b. Encuentra el área bajo la curva normal estándar entre $z = 1.4$ y $z = 2.00$
c. Encuentra el área bajo la curva normal estándar entre $z = 1.05$ y $z = 1.47$.
d. Encuentra el área bajo la curva normal estándar entre $z = 0.89$ y $z = 320$

Aplicaciones de la distribución normal

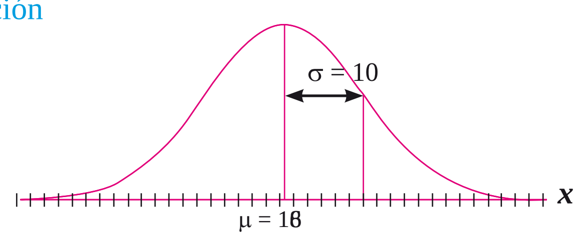
Una vez dominada la capacidad de calcular áreas bajo curva normal estándar, estamos en posibilidades de aplicar esta metodología a todas las distribuciones normales. La clave está en entender tres cuestiones:

1. La información asociada con una distribución estará en términos de valores x o probabilidades.
2. Para usar la tabla de áreas de una distribución normal estándar, debemos usar valores estandarizados z. En otras palabras, para poder utilizar la tabla que contiene las respuesta que se busca, debemos transformar la información dada (valores x), en valores z.
3 El valor estandarizado, z, se calcula mediante la fórmula:

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

Ejemplo 1 La estatura media de 1300 estudiantes de preparatoria es de 168 cm y la desviación estándar de 10 cm. si las estaturas se distribuyen normalmente, a) Calcula la probabilidad de que un alumno elegido al azar mida más de 175 cm. b) ¿Cuántos alumnos se puede esperar que midan más de 175 cm?

Solución

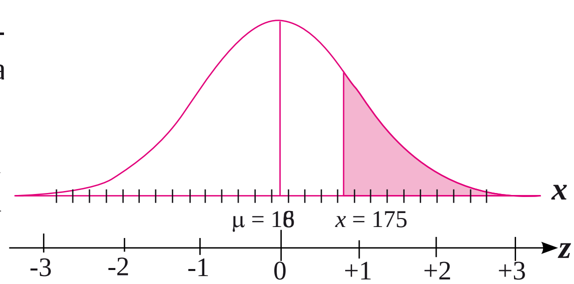


Sea x la estatura.

a) Se desea determinar la probabilidad de que un estudiante tenga una estatura mayor que 175 cm.

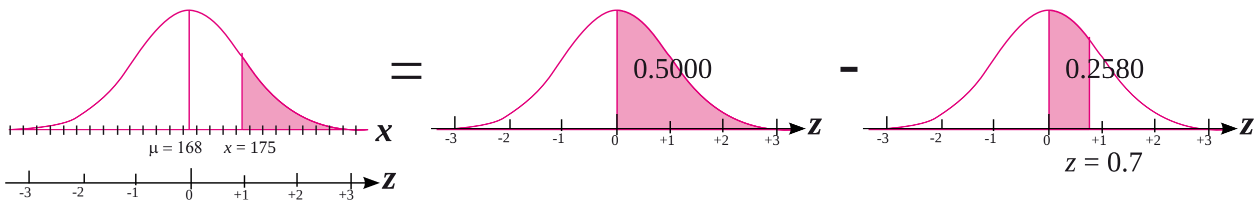
Para obtener esta probabilidad debemos encontrar el área coloreada en la figura.

Ahora, para poder utilizar la tabla de áreas de la distribución normal estándar, debemos estandarizar el valor de $x = 175$.



175 en unidades estándar: $z = \frac{x - \mu}{\sigma} = \frac{175 - 168}{10} = 0.7$

Recuerda que en este caso, primero determinamos la probabilidad de que la estatura se encuentre enre $z = 0$ y $z = 0.7$, y enseguida restamos este valor a 0.5



Entonces, la probabilidad de que un estudiante elegido al azar tenga una estatura mayor que 175 cm es de 0.500 - 0.258 = 0.242.

b) ¿Cuántos alumnos se puede esperar que midan más de 175 cm? Puesto que son 143 estudiantes se espera que (143) (0.242) = 34.6 ó 35 estudiantes midan más de 175 cm.

Actividad 4.4

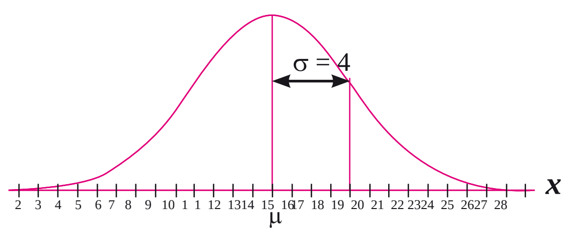
Con referencia al ejemplo 1 obtener la probabilidad de que la estatura del estudiante elegido se encuentre:

a) entre 150 cm y 170 cm.
b) sea menor que 160 cm.
c) sea mayor que 180.

Ejemplo 2

Un estudiante de preparatoria entra a la escuela a las 7:00 am y hace un promedio de 15 minutos desde que sale de su casa hasta que llega a su escuela, con una desviación estándar de 4 minutos. supóngase que la distribución de los tiempos de viaje es aproximadamente normal. Si siempre sale de su casa a las 6:50 a. m., ¿qué porcentaje de las veces llegará tarde?

Solución

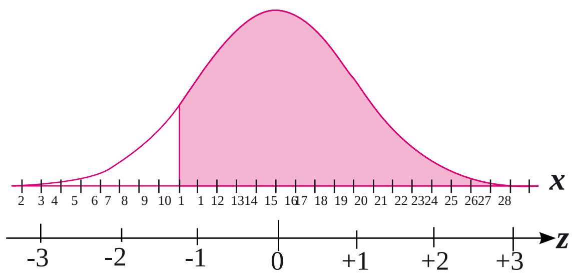


Sea x la variable aleatoria que denota el tiempo (en minutos) empleado por el estudiante, desde que sale de su casa hasta el momento en que entra a su escuela.

Por la hora en que el estudiante sale de su casa, le quedan 10 minutos antes de registrar retardo. Por tanto, nuestro problema cambia a: "*¿cuál es la probabilidad de que el estudiante emplee más de 10 minutos para llegar a la escuela*?".

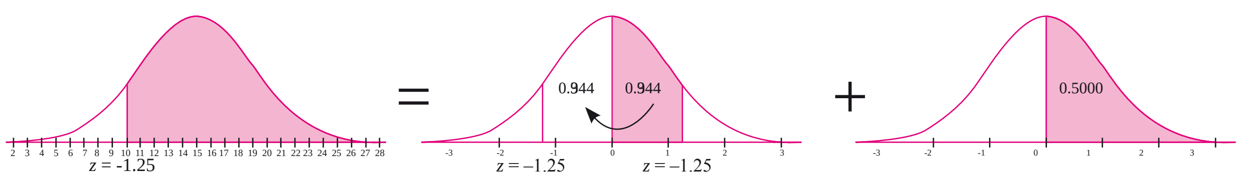
Ejemplo 2
(Cont.)

Por tanto, reqe rimos de la proba bilidad dada por el área coloreada en la figura:



10 en unidades estándar: $$z = \frac{x-\mu}{\sigma} = \frac{10-15}{4} = -1.25$$

Para ob ener esta proba bilidad de-
b mos encontrar el área coloreada
en la figura.



Entonces, la proba bilidad de qe el estudiante lleg tarde a la escuela es de 0.944 + 0.5000 = 0.8944.

Ejercicio 4

1. Los ing esos de una peqe ña empresa para el próx mo añ, se consideran qe son valores de una variab e aleatoria normal con media de $00,000.00 y desviación estándar de $0,000.00. D etermina la proba bilidad de qe :
   a. Los ing esos se encuentren entre $25,000.00 y $50,000.00.
   bL os ing esos ex edan a $0,000.00.

2. La media de los pesos de 500 estudiantes de una escuela es 75 kg con una desviación estándar de 7.5 kg Suponiendo qe los pesos se distribuy n normalmente, ha llar cuántos estudiantes pesan (a) entre 0 y 80 kg(b) más de 90 kg

3 El tiempo necesario para q e una ambl ancia llege a un estadio de futbl se distribuy según una variab e normal de media 25 minutos y desviación estándar 4 minutos. Calcula la proba bilidad de qe el tiempo de lleg da esté comprendido entre 20 minutos y 0 m inutos.

AUTOEVALUACIÓN IV

1. ¿Qué diferencias existen entre la distribución de probabilidad binomial y la normal?

2. La probabilidad de que una pieza de repuesto sea defectuosa es 0.3 y el hecho de que una pieza sea o no defectuosa es independiente de lo que se pueda decir de cualquier otra pieza. Hallar la probabilidad de que en una muestra de 5 piezas:
   a) Se encuentren exactamente 3 defectuosas.
   b) Ninguna defectuosa.
   c) Al menos cuatro defectuosas.

3 Si una moneda se lanza seis veces, ¿cuál es la probabilidad de obtener al menos 5 águilas?

4. Un examen de opción múltiple consiste de 10 preguntas con cuatro posibles respuestas para cada pregunta. Si un estudiante contesta al azar encuentra las probabilidades de que:
   a) Obtenga exactamente tres respuestas correctas;
   b) No obtenga ninguna respuesta correcta;
   c) A lo sumo obtenga cuatro respuestas correctas.

5. En una operación de llenado de latas, el peso de llenado está normalmente distribuido con una media de 21.3 onzas y una desviación estándar de 0.50. La etiqueta en la lata anuncia que el peso del llenado es 20 onzas. ¿Qué porcentaje de las latas contendrán menos de este peso especificado?

6. En un examen final de matemáticas las calificaciones están distribuidas normalmente con una media de 68 y una desviación estándar 13. Si se elige un estudiante examinado,
   a) ¿Cuál es la probabilidad de que haya obtenido arriba de 80?
   b) ¿Cuál es la probabilidad de que haya obtenido menos de 60?

7. La media de los diámetros interiores de una tuerca es 0.502 pulgadas y la desviación estándar 0.005 pulgadas. El propósito para el que se destinan estas tuercas permite una tolerancia máxima de en el diámetro de 0.496 a 0.508 pulgadas, de otro modo las tuercas se consideran defectuosas. Determinar el porcentaje de tuercas defectuosas producido por la máquina, suponiendo que los diámetros se distribuyen normalmente.

Bibliografía

J. Díaz Godino, Ma. C. Batanero, Ma. J. Cañizares. *Azar y probabilidad*, editorial Síntesis, Madrid, España, 1996

Robert Johnson, Patricia Kuby. *Estadística Elemental*, tercera edición, Thomson, México, 2004.

Robert Johnson, Patricia Kuby. *Estadística Elemental*, décima edición, Cengage, México, 2008.

John E. Freund, Gary A. Simon. *Estadística elemental*, octava edición, Pearson, México, 1992.

José Alfredo Juárez Duarte, Armando Flórez, Arturo Ylé, José Alberto Alvarado. *Estadística y probabilidad*, DGEP-UAS, México, 2002.

Miguel de Guzmán, José Colera y Adela Salvador. *Matemáticas III*, ediciones Anaya, Madrid, 1988.

Ma. José Asencio, José A. Romero y Estrella de Vicente. *Estadística*. Mc Graw Hill, Bogotá, Colombia, 1999.

Jay L. Devore, *Probabilidad y Estadística para ingeniería y ciencias*, cuarta edición, Thomson, México, 1998.

Jay L. Devore, *Probabilidad y Estadística para ingeniería y ciencias*, séptima edición, Cengage Learning México, 2008.

Carmen Batanero. *Didáctica de la estadística*. Departamento de Didáctica de la Estadística. Universidad de Granada, España.

ALEA, grupo portugués que promueve la enseñanza de la estadística. http://alea-estp.ine.pt/html/nocoes/html.

Piotr Marion W., Gabriel Velasco S. *Problemario de probabilidad*, editorial Thomson, México, 2001.

Mark L. Berenson, david M. Levine. *Estadística Básica en Administración*, editorial Prentice-Hall, México, 1992.

G. A. Whitmore, John Neter, William Wasserman. *Problemas de estadística, método autodidáctico*, editorial CECSA, México, 1981.

L. H. Longley Cook *Problemas de estadística y cómo resolverlos*, editorial CECSA, México, 1981.

Jorge Domínguez D., Jorge Axel Domínguez. *Estadística y probabilidad*, Oxford, México, 2006

Diego Bricio Hernández, Alberto Ruiz M. *Probabilidad y estadística*, editorial CECSA, México, 1981.

Luis Magaña Cuéllar. *Matemáticas III. Estadística y probabilidad*, editorial Nueva Imagen, México, 2006

Gabriel Velasco S. *Problemario de probabilidad*, editorial Thomson, México, 2001.

Gabriel Velasco Sotomayor. *Estadística con excel*, editorial Trillas, México, 2005.

Agustín Montaño. *Estadística I*, editorial Pac, México, 1992.

Esenciales de estadística, editorial Santillana, México, 2008.

PROBABILIDAD
José Alfredo Juárez Duarte, Arturo Ylé Martínez
Armando Flórez Arco y Santiago Inzunsa Cázares

Se terminó de imprimir en el mes de enero de 2012,
en los talleres gráficos de SERVICIOS EDITORIALES ONCE
RÍOS, S.A. DE C.V., Río Usumacinta 821, Col. Industrial
Bravo, C.P. 80200. Tel. 712-29-50. Culiacán, Sin.

Esta edición consta de 4,000 ejemplares