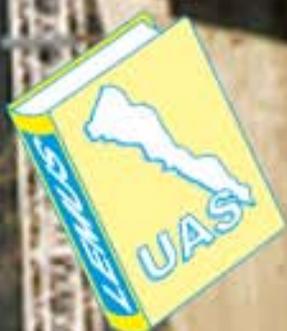


Estática y Rotación del Sólido

Bachillerato universitario

José Alberto Alvarado Lemus
José de Jesús Caro Corrales
José Bibiano Varela Nájera
Olivia Hernández Mondaca





DIRECTORIO

Dr. Víctor Antonio Corrales Burgueño
Rector

DR. José Alfredo Leal Orduño
Secretario General

LAE y MA Manuel de Jesús Lara Salazar
Secretario de Administración y Finanzas

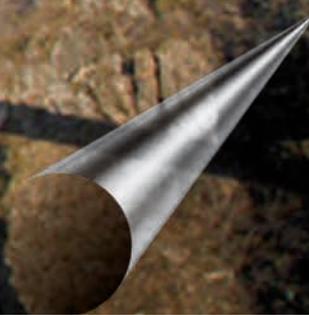
Q.F.B. Ofelia Loiza Flores
Director de Servicios Escolares

Dr. Armando Flórez Arco
Director de DGE

Estática y Rotación del Sólido

Bachillerato universitario

José Alberto Alvarado Lemus
José de Jesús Caro Corrales
José Bibiano Varela Nájera
Olivia Hernández Mondaca



Dr. José Alberto Alvarado Lemus
Dr. José de Jesús Caro Corrales
Dr. José Bibiano Varela Nájera
Dr. Olivia Hernández Mondaca

Estática y Rotación del Sólido

Bachillerato universitario

Prohibida la reproducción total o parcial de esta obra, por cualquier medio, sin autorización escrita del autor.

Estática y Rotación del Sólido

Bachillerato universitario

**Dr. José Alberto Alvarado Lemus
Dr. José de Jesús Caro Corrales
Dr. José Bibiano Varela Nájera
Dr. Olivia Hernández Mondaca**

Diseño de Portada: Dr. José Alberto Alvarado Lemus
Diseño de interiores: Dr. José Alberto Alvarado Lemus
Revisión Técnica: Dr. José Bibiano Varela Nájera

Primera edición, julio2012

Once Ríos Editores
Río Usumacinta 821 Col. Industrial Bravo
Culiacán, Sinaloa, México

3500 ejemplares

Impreso en México
Printed in Mexico



Contenido Temático

Alineado al programa de estudio de *Estática y Rotación del Sólido*, plan 2009 del Bachillerato de la Universidad Autónoma de Sinaloa, con enfoque en competencias.

Competencia es la capacidad de movilizar reflexivamente saberes integrados de un contexto a otro, para resolver exitosamente problemas a lo largo de la vida. El saber pensar, el saber decir, el saber hacer y el querer hacer.

1



CONDICION DE EQUILIBRIO DE LOS CUERPOS RÍGIDOS

1.1. Equilibrio de traslación	17
1.2. Equilibrio de rotación	34
1.2.1. Momento de torsión	35
1.2.2. Par de fuerzas	41
1.2.3. Condición de equilibrio de rotación	45
1.3. Equilibrio estático y dinámico	55
1.3.1. Centro de masa y centro de gravedad	55
1.4. Actividades de sistematización y consolidación	61
1.4.1. Sopa de letras con palabras clave del capítulo	61
1.4.2. Conexión de conceptos e ideas	62
1.4.3. Crucigrama	63
1.4.4. Actividades de repaso	64
1.4.5. Ejercicios de repaso	65

2



ELASTICIDAD DE LOS CUERPOS

2.1. Cuerpos elásticos e inelásticos	73
2.2. Tipos de esfuerzos y de deformación en los sólidos	74
2.3. Esfuerzo normal y deformación normal	78
2.4. Esfuerzo de corte y deformación de corte	90
2.5. Torsión	99
2.6. Esfuerzo de volumen y deformación de volumen	109
3.7. Actividades de sistematización y consolidación	112
3.7.1. Sopa de letras con palabras clave del capítulo	112
3.7.2. Conexión de conceptos e ideas	113
3.7.3. Crucigrama	114
3.7.4. Actividades de repaso	115
3.7.5. Ejercicios de repaso	116

3



ROTACIÓN DEL SÓLIDO RÍGIDO

3.1. Movimiento de rotación de un cuerpo rígido	123
3.1.1. Tipos de movimiento de los cuerpos rígidos	123
3.1.2. Movimiento de rotación alrededor de un eje fijo	125
3.2. Dinámica de la rotación	139
3.2.1. Energía cinética de rotación y momento de inercia	139
3.2.2. Teorema de Steiner	143
3.2.3. Momento de una fuerza y momento angular en la rotación de un cuerpo rígido	145
3.2.4. Ecuación fundamental de la dinámica de la rotación	148
3.2.5. Rodadura pura	157
3.3. Ley de conservación del momento angular	164
3.3.1. Utilización de la ley de conservación de momento angular para el análisis de diversas situaciones	168
3.4. Actividades de sistematización y consolidación	172
3.4.1. Sopa de letras con palabras clave del capítulo	172
3.4.2. Conexión de conceptos e ideas	173
3.4.3. Crucigrama	174
3.4.4. Actividades de repaso	175
3.4.5. Ejercicios de repaso	177

Presentación

A estudiantes y profesores.

El presente libro forma parte de los materiales curriculares elaborados para apoyar la introducción del Plan 2009 en el bachillerato de la Universidad Autónoma de Sinaloa. El primer capítulo profundiza en las condiciones de equilibrio de traslación y rotación cuyo estudio los alumnos iniciaron en Mecánica II y amplía la diversidad de situaciones prácticas que allí se analizaron. Los otros dos capítulos se dedican a importantes temas de la Mecánica no examinados anteriormente.

En el segundo capítulo se estudian los diferentes tipos de deformación que pueden experimentar los cuerpos al aplicar fuerzas sobre ellos. Esto es importante, por cuanto en Mecánica I y II los cuerpos se consideraron como rígidos, mientras que en la vida práctica y la ingeniería son numerosas las situaciones en que se hace necesario tener en cuenta sus deformaciones. El tercer capítulo examina el movimiento de rotación y la combinación de traslación y rotación, lo cual extiende las posibilidades de los estudiantes para analizar numerosas situaciones de la vida diaria y la tecnología.

De este modo, *Estática y Rotación del Sólido* desarrolla la visión general de la Mecánica que tienen los estudiantes, su cultura científico-tecnológica, al tiempo que los prepara para el estudio posterior de la Física y diversas ramas de la ingeniería.

El enfoque didáctico del libro es consecuente con la restructuración del currículo de bachillerato de la Universidad Autónoma de Sinaloa en base a competencias. El propósito es que los estudiantes alcancen un nivel de integración de conocimientos, procedimientos, actitudes y valores, que les permita desempeñarse eficazmente en la vida social y en sus estudios futuros. Esto requiere que a lo largo del curso realicen una serie de actividades especialmente concebidas para ello. Por eso, acompañando al texto del libro, se ha incluido un gran número de preguntas, actividades a realizar y ejercicios resueltos. Luego, al final de cada capítulo, aparecen

otras actividades que complementan las anteriores y ayudan a consolidar y sistematizar lo estudiado.

La idea central es que el libro sea, más allá de un libro de texto, un material de trabajo, pues solo reflexionando detenidamente sobre lo leído, planteándose interrogantes y realizando numerosas actividades alrededor del material, es decir, trabajando conscientemente, podrán los alumnos adquirir las competencias que se esperan.

Finalmente, nos parece necesario subrayar, que realizar con efectividad un enfoque del proceso de enseñanza-aprendizaje dirigido a la formación de competencias, no será posible si dicho proceso no es acompañado por un sistema de evaluación acorde con las competencias declaradas y las actividades desarrolladas.

Los autores

1

CONDICIÓN DE EQUILIBRIO DE LOS CUERPOS RÍGIDOS





En el segundo grado te relacionaste con nociones fundamentales de la **Mecánica**, de gran relevancia en la Física, la ingeniería y la vida cotidiana. Durante el tercer semestre, en Mecánica I, iniciaste el estudio del movimiento mecánico de los cuerpos. En general, este consiste en el cambio de posición del cuerpo como un todo, o de sus partes, en relación con otro cuerpo elegido como referencia. Con el propósito de simplificar su estudio, allí centramos la atención en el movimiento de **cuerpos rígidos**, es decir, cuerpos que no se deforman al aplicar fuerzas sobre ellos, o lo que es equivalente, cuyas partes no varían las posiciones relativas entre ellas. En esos casos el movimiento puede ser de **traslación**, de **rotación**, o una combinación de ambos.

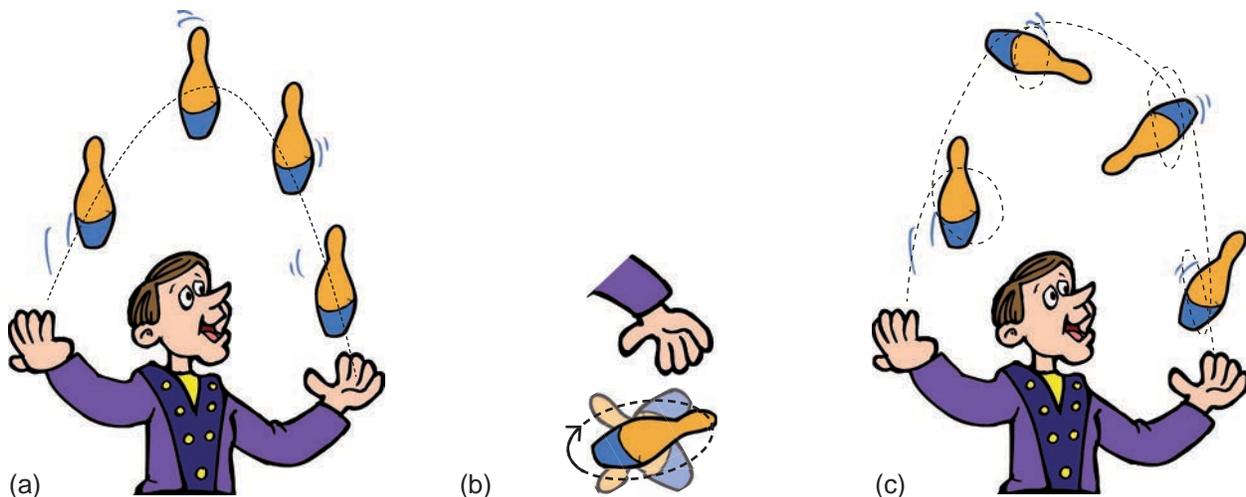


Fig. 1.1. Distintos tipos de movimiento: (a) traslación, (b) rotación, (c) combinación de traslación y rotación.

Pero en Mecánica I restringimos todavía más el estudio del movimiento, ya que dedicamos la atención casi exclusivamente al movimiento de **traslación**, y solo nos referimos a la rotación muy brevemente. Puesto que en la traslación todos los puntos del cuerpo realizan igual movimiento, basta uno solo de ellos para describirlo. Esto condujo al concepto de **partícula**: todo cuerpo cuya deformación y rotación no se tienen en cuenta durante el movimiento.

En Mecánica II, además de iniciar el estudio de las leyes de conservación de la energía y de la cantidad de





Fig. 1.2. Sistema en equilibrio de traslación y rotación, respectivamente.



Fig. 1.3. Cuerpos rígidos en un estado de equilibrio.

movimiento, ampliamos el estudio de la Mecánica en otros dos aspectos. En primer lugar, al estudiar la ley de conservación de la cantidad de movimiento, consideramos situaciones en que las partes de un sistema se mueven unas en relación a otras, e introducimos el concepto de **centro de masa** para describir el movimiento del sistema como un todo. En segundo lugar, en el último capítulo, Equilibrio mecánico de los cuerpos, examinamos las condiciones de equilibrio de los cuerpos rígidos.



Fig. 1.4. ¿Cuántos de nosotros, a lo largo de la vida, hemos perdido el equilibrio?

Esta asignatura, **Estática y Rotación del sólido**, comienza con una primera unidad dedicada a profundizar en la última de las cuestiones mencionadas, es decir, las condiciones de equilibrio de los cuerpos, así como en la aplicación de ellas para el análisis de diversas situaciones prácticas. Luego, en las otras dos unidades, se estudian dos importantes temas de la Mecánica no considerados hasta ahora: los diversos tipos de deformaciones que pueden experimentar los cuerpos al aplicar fuerzas sobre ellos y el movimiento de rotación. Esto completa la visión general de la Mecánica que comenzó a desarrollarse en el primer grado y prepara para el estudio posterior de la Física y diversas ramas de la ingeniería en la universidad.



1.1. Equilibrio de traslación

En Mecánica II se aprendió que el punto denominado **centro de masa** CM de un sistema describe el movimiento de traslación de un **sistema de partículas**, en particular de un **cuerpo rígido**. En general en los sólidos regulares simétricos el centro de masa se encuentra en su centro geométrico mientras que en el resto de los cuerpos el centro de masa puede o no estar dentro del objeto. Así, por ejemplo, el centro de masa de una esfera de densidad uniforme está situado en el centro de la misma esfera, el centro de masa de una varilla cilíndrica de densidad uniforme está situado a la mitad de su eje.

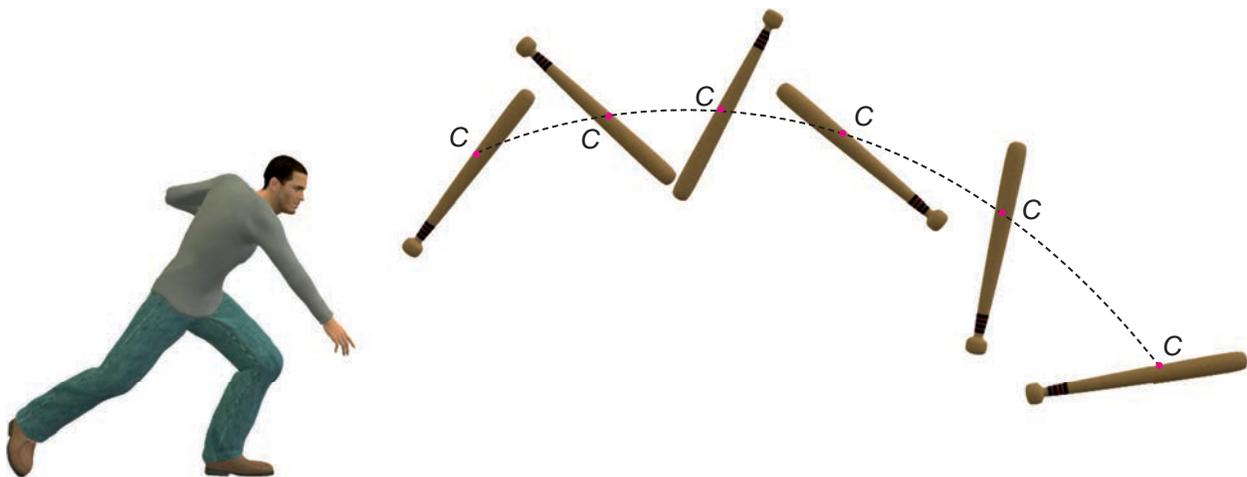


Fig.1.5. Los diferentes puntos de un bat lanzado al aire realizan un movimiento complejo. Sin embargo, el análisis se simplifica al considerar el movimiento del bat como una combinación de traslación y rotación alrededor de su centro de masa.

El movimiento de traslación de un cuerpo rígido puede analizarse mediante las leyes de Newton, al considerarlo como si la masa del cuerpo estuviera concentrada en el centro de masa del cuerpo y como si la fuerza externa total se aplicara en ese punto. De esta manera la **segunda ley de Newton** expresa que la suma de las fuerzas externas ejercidas sobre un cuerpo es igual al producto de la masa del cuerpo por la aceleración que adquiere el centro de masas de dicho cuerpo respecto a un sistema de referencia.

$$\Sigma \vec{F}_{\text{ext}} = m \vec{a}_{\text{cm}}$$





Fig. 1.6. Un auto que viaja por una carretera en un tramo recto y con una velocidad constante es un ejemplo de movimiento rectilíneo uniforme.

De aquí se deduce que si la suma de las fuerzas externas es cero, entonces el centro de masa del cuerpo se encuentra en equilibrio de traslación, es decir en movimiento rectilíneo uniforme o en reposo. Así

$$\Sigma \vec{F}_{\text{ext}} = 0 \quad (\text{asegura el equilibrio de traslación})$$

La ecuación anterior se conoce como la **primera condición de equilibrio** para los cuerpos rígidos y se puede enunciar de la siguiente manera: Un cuerpo sólido está en equilibrio de traslación cuando la suma de las fuerzas externas aplicadas sobre él es nula.

Esta primera condición establece que cuando la suma de las fuerzas externas aplicadas sobre un cuerpo es cero, entonces la aceleración del centro de masas del cuerpo también es cero. El hecho de que la aceleración sea cero implica que el objeto puede estar en movimiento en línea recta con rapidez constante y no únicamente en reposo.

$$\Sigma \vec{F}_{\text{ext}} = 0 \quad \rightarrow \quad \begin{cases} \text{MRU} \\ \text{reposo} \end{cases}$$

Cuando un cuerpo se mueve con velocidad constante (MRU) respecto a un sistema de referencia, entonces se encuentra en equilibrio *cinético* y cuando la velocidad del centro de masas es cero con relación al sistema de referencia, el cuerpo se encuentra en equilibrio *estático*.

La ecuación de equilibrio de traslación se puede expresar en términos de ecuaciones escalares que corresponden a ejes mutuamente perpendiculares en un sistema cartesiano:

$$\vec{\mp} \Sigma F_{\text{ext}, x} = 0 \quad + \uparrow \Sigma F_{\text{ext}, y} = 0$$

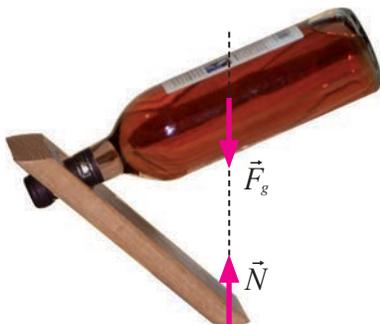


Fig. 1.7. Sistema botella-sopORTE se encuentra en un estado de equilibrio estático.

Para el empleo adecuado de la primera condición de equilibrio se necesita elaborar diagramas de cuerpo libre, también denominados diagramas de fuerzas. Un **diagrama de cuerpo libre** es un dibujo de un cuerpo en el que se han representado todas las fuerzas ejercidas **sobre** él por otros cuerpos. En dicho diagrama se muestra el cuerpo seleccionado solo, “libre” de otros cuerpos. No debe representarse en el diagrama del cuerpo elegido ninguna de las fuerzas ejercidas **por** él.



Es oportuno recordar que las fuerzas son ejercidas **por** un cuerpo **sobre** otro. Para dibujar las fuerzas que actúan sobre un cuerpo es necesario determinar *cuáles otros cuerpos* ejercen algún efecto sobre él. No se debe inventar fuerzas inexistentes; para cada fuerza que se dibuja se debe precisar cuál es el cuerpo del entorno que la está aplicando, así se evita incluir fuerzas ficticias o imaginarias como cuando un cuerpo se mueve en *línea recta con rapidez constante* y en forma incorrecta se incluye una fuerza para *mantenerlo en movimiento* o cuando un cuerpo está *acelerado* y de manera errónea se incluye una fuerza para mantenerlo en *equilibrio*.

Las fuerzas pueden ser de contacto o pueden actuar a distancia mediante un campo de fuerzas. Por el momento la única fuerza de acción a distancia que se incluirá en los diagramas es la fuerza de gravedad ($\vec{F}_g = m\vec{g}$) que la Tierra ejerce sobre un cuerpo y que se denomina peso ejercido **sobre** el cuerpo, por lo que para distinguir cuáles otros cuerpos actúan *sobre* el objeto elegido se debe prestar atención a los cuerpos que están *en contacto* con él.



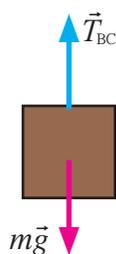
Fig. 1.8. Estructura de ocho pisos que perdió el equilibrio en el terremoto ocurrido el jueves 19 de septiembre de 1985, en la ciudad de México.



Ejemplo 1.1. Un bloque de 20 kg cuelga en equilibrio de una cuerda de 5 kg. Calcular (a) la fuerza ejercida sobre el bloque por la cuerda, (b) la fuerza ejercida sobre la cuerda por el bloque y (c) la fuerza ejercida sobre la cuerda por el techo.

(a) Para calcular la fuerza T_{BC} ejercida sobre el bloque por la cuerda se construye un diagrama de cuerpo libre para el bloque. Se dibuja la fuerza de gravedad que sobre el bloque ejerce la Tierra y se observa cuáles cuerpos están en contacto directo con él. La cuerda está en contacto con el bloque pero el techo no lo toca directamente. Así que sólo habrá dos fuerzas en el diagrama de cuerpo libre del bloque, la fuerza de gravedad mg que sobre el bloque ejerce la Tierra, dirigida hacia abajo y la fuerza T_{BC} ejercida sobre el bloque por la cuerda, dirigida hacia arriba pues es la que sostiene al bloque. Si ambas fuerzas estuviesen dirigidas hacia abajo, el bloque caería. Al aplicar la primera condición de equilibrio (1ª ley de Newton) debido a que no existen fuerzas horizontales se tiene





$$+\uparrow \Sigma F_{\text{ext},y} = 0$$

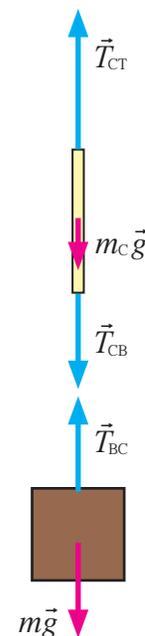
$$+T_{BC} - mg = 0$$

$$T_{BC} = mg = (20 \text{ kg})\left(9.8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right) = 196 \text{ N}$$

La fuerza T_{BC} ejercida sobre el bloque por la cuerda es de 196 N, dirigida hacia arriba.

(b) La fuerza T_{CB} ejercida sobre la cuerda por el bloque es de igual magnitud y sentido opuesto a la fuerza T_{BC} ejercida sobre el bloque por la cuerda (3ª ley de Newton). Por lo tanto, la fuerza T_{CB} ejercida sobre la cuerda por el bloque es de 196 N, dirigida hacia abajo.

(c) Para calcular la fuerza T_{CT} ejercida sobre la cuerda por el techo se elabora un diagrama de cuerpo libre para la cuerda. Se dibuja la fuerza de gravedad que sobre la cuerda ejerce la Tierra y se observa que la cuerda está en contacto con el bloque y con el techo. En el diagrama de cuerpo libre para la cuerda habrá tres fuerzas: la fuerza de gravedad $m_c g$ que sobre la cuerda ejerce la Tierra, dirigida hacia abajo, la fuerza T_{CB} ejercida sobre la cuerda por el bloque dirigida hacia abajo pues el bloque la jala y la fuerza T_{CT} que sobre la cuerda ejerce el techo, dirigida hacia arriba porque el techo jala a la cuerda. Al aplicar la primera condición de equilibrio





$$+\uparrow \Sigma F_{\text{ext},y} = 0$$

$$+T_{\text{CT}} - m_{\text{C}}g - T_{\text{CB}} = 0$$

$$T_{\text{CT}} = m_{\text{C}}g + T_{\text{CB}} = (5 \text{ kg})\left(9.8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right) + 196 \text{ N} = 245 \text{ N}$$

La fuerza T_{CT} ejercida sobre la cuerda por el techo es de 245 N.

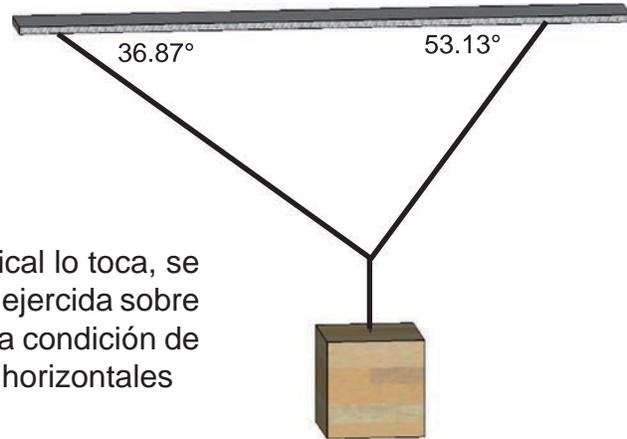
Es conveniente advertir que al aplicar la primera condición de equilibrio (1ª ley de Newton) las fuerzas se ejercen sobre un mismo cuerpo y que al aplicar la 3ª ley de Newton la pareja de fuerzas de acción y reacción se ejercen sobre cuerpos distintos. En el ejemplo anterior las fuerzas T_{BC} y mg tienen igual magnitud debido a la 1ª ley de Newton y actúan ambas sobre el bloque, no sobre cuerpos distintos. Por otra parte, las fuerzas T_{CB} y T_{BC} tienen igual magnitud por la 3ª ley de Newton y actúan sobre cuerpos distintos (T_{CB} sobre la cuerda y T_{BC} sobre el bloque).

Además, la cuerda está estirada pues en sus extremos se ejercen fuerzas que tiran de ella. El estiramiento de la cuerda indica que está sujeta a tensión o que se ejerce una tensión sobre ella. La **tensión** en cualquier punto es la magnitud de la fuerza que actúa sobre dicho punto. La tensión *sobre* la cuerda en su parte inferior es de 196 N y en su parte superior es de 245 N. Si la cuerda fuese ligera (masa muy pequeña), la fuerza de gravedad ejercida *sobre* la cuerda no se tomaría en cuenta, dando como resultado que las fuerzas de tensión *sobre* sus extremos fuesen de igual magnitud. Cuando una cuerda es ligera, las fuerzas de tensión *sobre* sus extremos son de igual magnitud y la cuerda transmite sin cambio, la fuerza de tensión.



Ejemplo 1.2. Un bloque de 50 kg cuelga en reposo de una cuerda ligera unida mediante un nudo a otras dos cuerdas ligeras atadas al techo que forman 36.87° y 53.13° con el techo. Calcular la fuerza de tensión sobre cada de una de las tres cuerdas.

Para calcular la tensión sobre cada cuerda se construyen dos diagramas de cuerpo libre, uno para el bloque y otro para el nudo. En el diagrama de cuerpo libre para el bloque se dibuja la fuerza de gravedad mg que sobre el bloque ejerce la Tierra y como solo la cuerda vertical lo toca, se representa la fuerza T dirigida hacia arriba ejercida sobre el bloque por la cuerda. Al aplicar la primera condición de equilibrio debido a que no existen fuerzas horizontales



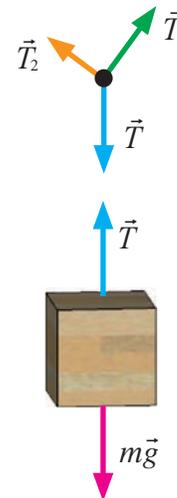
$$+\uparrow \Sigma F_{\text{ext},y} = 0$$

$$+T - mg = 0$$

$$T = mg = (50 \text{ kg})\left(9.8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right) = 490 \text{ N}$$

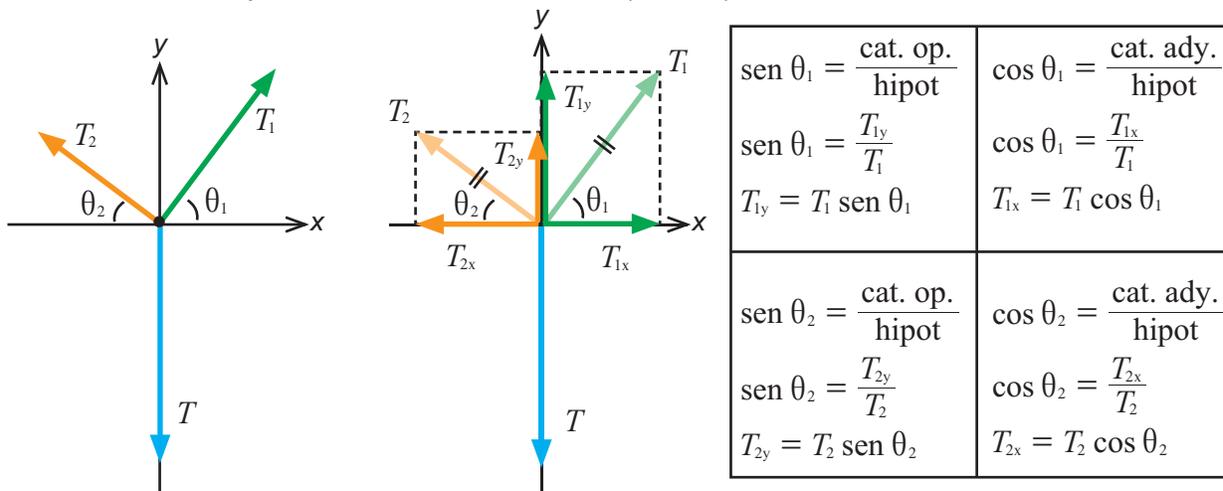
La fuerza T ejercida sobre el bloque por la cuerda es de 490 N, hacia arriba. La fuerza ejercida sobre la cuerda por el bloque es de igual magnitud y sentido opuesto a la fuerza ejercida sobre el bloque por la cuerda (3ª ley de Newton). Así, la fuerza de tensión T ejercida sobre la cuerda por el bloque es de 490 N, hacia abajo. Debido a que las tres cuerdas son *ligeras* (masa de las cuerdas muy pequeñas comparadas con la masa del bloque), las fuerzas de tensión sobre sus extremos son de igual magnitud y la cuerda transmite sin cambio, la fuerza de tensión. De esta manera, la tensión sobre la cuerda vertical es de 490 N.

En el diagrama de cuerpo libre para el nudo, como las cuerdas son ligeras, la masa del nudo se puede despreciar y por tanto la fuerza de gravedad sobre él no se toma en cuenta. El nudo está en contacto con tres cuerdas, por lo que se dibujan solo tres fuerzas, la fuerza $T = 490 \text{ N}$ que la cuerda vertical ejerce sobre el nudo, hacia abajo y las dos fuerzas T_1 y T_2 que las otras dos cuerdas ejercen sobre el nudo dirigidas a lo largo de





las cuerdas. Para aplicar la primera condición de equilibrio al nudo se eligen los ejes cartesianos (x, y) y se observa que las fuerzas T_1 y T_2 están inclinadas respecto a los ejes, por lo que se pueden reemplazar por sus componentes rectangulares. El ángulo θ_1 que la fuerza T_1 forma con el eje horizontal y el ángulo que la cuerda inclinada de la derecha forma con el techo (53.13°) son iguales pues son alternos internos. De igual forma, el ángulo θ_2 que la fuerza T_2 forma con el eje horizontal y el ángulo que la cuerda inclinada de la izquierda forma con el techo (36.87°) son alternos internos.



$$\begin{aligned} \vec{\Sigma} F_{\text{ext}, x} &= 0 & +\uparrow \Sigma F_{\text{ext}, y} &= 0 \\ +T_{1x} - T_{2x} &= 0 & +T_{1y} + T_{2y} - T &= 0 \\ +T_1 \text{ cos } \theta_1 - T_2 \text{ cos } \theta_2 &= 0 & +T_1 \text{ sen } \theta_1 + T_2 \text{ sen } \theta_2 - T &= 0 \end{aligned}$$

Se tienen dos ecuaciones con dos incógnitas T_1 y T_2 , se puede despejar T_2 de la ecuación de equilibrio correspondiente al eje x y sustituir en la ecuación correspondiente al eje y

$$T_2 = T_1 \frac{\text{cos } \theta_1}{\text{cos } \theta_2} \quad \text{al sustituir} \quad T_1 \text{ sen } \theta_1 + \frac{T_1 \text{ cos } \theta_1}{\text{cos } \theta_2} \text{ sen } \theta_2 - T = 0$$

Al multiplicar la ecuación por $\text{cos } \theta_2$

$$T_1 (\text{sen } \theta_1 \text{ cos } \theta_2 + \text{sen } \theta_2 \text{ cos } \theta_1) = T \text{ cos } \theta_2$$

y usando la relación de trigonometría $\text{sen}(\theta_1 + \theta_2) = \text{sen } \theta_1 \text{ cos } \theta_2 + \text{sen } \theta_2 \text{ cos } \theta_1$

$$T_1 = \frac{T \text{ cos } \theta_2}{\text{sen}(\theta_1 + \theta_2)} = \frac{(490 \text{ N})(\text{cos } 36.87^\circ)}{\text{sen}(53.13^\circ + 36.87^\circ)} = 392 \text{ N}$$

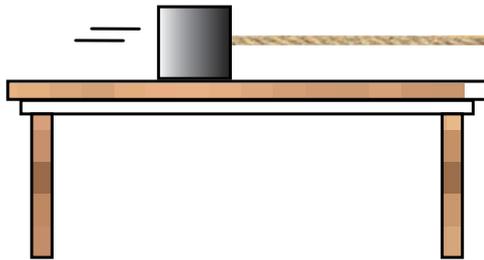
Al sustituir en T_2

$$T_2 = T_1 \frac{\text{cos } \theta_1}{\text{cos } \theta_2} = (392 \text{ N}) \frac{\text{cos } 53.13^\circ}{\text{cos } 36.87^\circ} = 294 \text{ N}$$



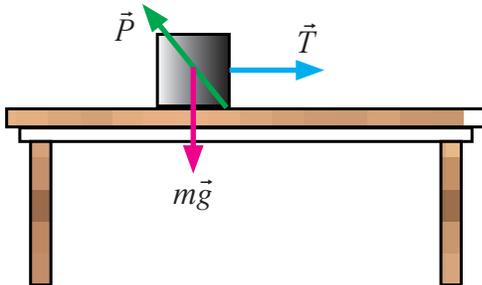
Las fuerzas de tensión sobre cada cuerda son 490 N (cuerda vertical), 392 N (cuerda inclinada de la derecha) y 294 N (cuerda inclinada de la izquierda). Las cuerdas tienen un límite para soportar tensión, al superar dicho límite la cuerda se rompe. El material y el espesor de la cuerda sobre la que se ejerce mayor tensión (cuerda vertical) deben seleccionarse adecuadamente para que no se rompa. Se debe advertir que la cuerda que forma un ángulo más pequeño con la horizontal es la que soporta menos fuerza de tensión.

Ejemplo 1.3. Un baúl de 2 kg se mueve con rapidez constante sobre una mesa horizontal rugosa (con rozamiento) atado a una cuerda horizontal que lo jala con 10 N. Calcular el coeficiente de fricción cinético entre el baúl y la mesa.



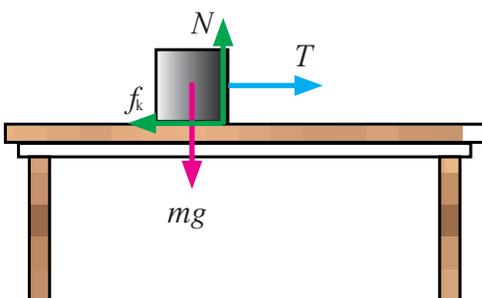
El baúl se mueve con rapidez constante en línea recta (MRU), por lo que su aceleración es cero y se encuentra en equilibrio. Al baúl lo tocan la cuerda y la mesa. Así, el diagrama de cuerpo libre para el baúl consiste de tres fuerzas, la fuerza de gravedad mg ejercida por la Tierra, la fuerza T que ejerce la cuerda dirigida a lo largo de la cuerda y

la fuerza P ejercida por la mesa rugosa dirigida hacia arriba e inclinada en contra del movimiento, puesto que la suma de las tres fuerzas debe ser cero. Aunque el baúl está en movimiento, se encuentra en equilibrio. Si en forma incorrecta se pensase que sólo actúan la fuerza de gravedad mg y la fuerza T que la cuerda aplica al baúl, éste no estaría en equilibrio (y se hundiría en la mesa).



Debido a que existe rozamiento, la fuerza que la mesa ejerce sobre el baúl está inclinada en contra del movimiento. Dicha fuerza inclinada P se reemplaza por sus componentes rectangulares y a la componente de P paralela a la mesa se le denomina fuerza de rozamiento cinético f_k , además a la componente perpendicular (o normal)

a la mesa se le llama fuerza normal N . El diagrama sólo incluye tres fuerzas: la fuerza de gravedad mg , la fuerza T que aplica la cuerda y la fuerza P ejercida por la mesa.



No se aplican cuatro fuerzas al baúl, sino que la fuerza de fricción cinética f_k y la fuerza normal N son solo las componentes de la fuerza única ejercida por la mesa sobre el baúl. Si la superficie de la mesa fuese lisa, no habría fricción, y la fuerza P ejercida por la mesa lisa estaría dirigida verticalmente hacia arriba, no inclinada.



Se ha establecido una relación entre las componentes rectangulares de la fuerza P que ejerce una superficie sobre un objeto: La fuerza de fricción cinética es igual al producto de un coeficiente de fricción cinético μ_k por la magnitud de la fuerza normal, $f_k = \mu_k N$. Al aplicar la primera condición de equilibrio

$$\begin{aligned} \vec{\uparrow} \Sigma F_{\text{ext}, X} &= 0 & +\uparrow \Sigma F_{\text{ext}, y} &= 0 \\ +T - f_k &= 0 & +N - mg &= 0 \end{aligned}$$

La magnitud de la fuerza normal N siempre se obtiene al despejarla de la ecuación de equilibrio correspondiente al eje y , es decir, de la ecuación $+\uparrow \Sigma F_{\text{ext}, y} = 0$. En este ejemplo, $N = mg$, la fuerza normal tiene igual magnitud que la fuerza de gravedad, pero la fuerza normal la mayoría de las veces *no* tendrá igual magnitud que la fuerza de gravedad.

$$N = mg = (2 \text{ kg})\left(9.8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right) = 19.6 \text{ N}$$

Al emplear $f_k = \mu_k N$ y recordar que la cuerda jala al baúl con $T = 10 \text{ N}$,

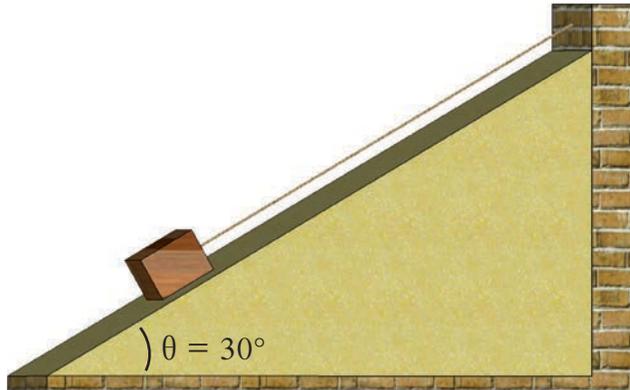
$$+T - \mu_k N = 0$$

$$\mu_k = \frac{T}{N} = \frac{10 \text{ N}}{19.6 \text{ N}} = 0.51$$

El coeficiente de fricción cinético entre el baúl y la mesa es 0.51 y es un número adimensional, sin unidades. Cuanto mayor sea el coeficiente de rozamiento, tanto mayor será la fuerza de rozamiento cinético y por tanto será menor el ángulo entre la superficie y la fuerza P ejercida por dicha superficie sobre el objeto.



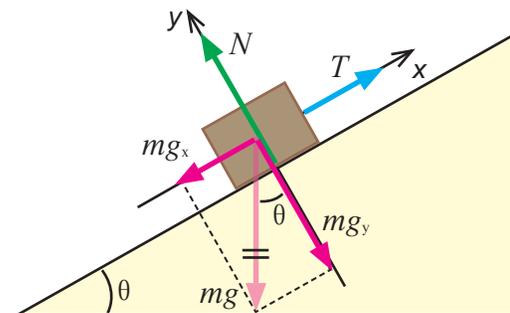
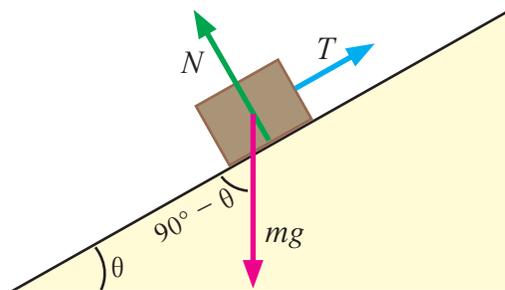
Ejemplo 1.4. Una caja de 15 kg está en reposo en un plano liso inclinado 30° mediante una cuerda ligera paralela al plano. Calcular la tensión sobre la cuerda y la fuerza ejercida sobre la caja por el plano inclinado.



Tensión sobre la cuerda. La fuerza ejercida sobre la cuerda por la caja (a lo largo de la cuerda y hacia abajo) es de igual magnitud y sentido opuesto a la fuerza ejercida sobre la caja por la cuerda (a lo largo de la cuerda y hacia arriba). Para calcular la fuerza ejercida sobre la caja por la cuerda y la fuerza normal ejercida sobre la caja por el plano se dibuja el diagrama de cuerpo libre para la caja. Se traza la fuerza de gravedad

que sobre la caja ejerce la Tierra y se localizan los objetos que están en contacto con la caja: que son la cuerda y el plano inclinado. La pared no ejerce directamente una fuerza sobre la caja, por tanto en el diagrama de cuerpo libre de la caja se dibujan sólo tres fuerzas: la fuerza de gravedad mg que la Tierra ejerce hacia abajo, la fuerza T que aplica la cuerda a lo largo de ella y la fuerza ejercida por el plano, la cual debido a que el plano es liso (sin rozamiento) es perpendicular (o normal N) al plano y hacia arriba.

Cuando una superficie se encuentra inclinada es conveniente seleccionar al eje x paralelo a la superficie. De esta manera se facilita el análisis del movimiento y sus ecuaciones son más sencillas de interpretar. La fuerza de gravedad está inclinada respecto a los ejes, por lo que se puede reemplazar por sus componentes rectangulares. El plano está inclinado un ángulo $\theta = 30^\circ$. El ángulo entre el plano inclinado y la fuerza de gravedad es $60^\circ (= 90^\circ - \theta)$ por lo que el ángulo entre la fuerza de gravedad y el eje y es θ . Al aplicar la primera condición de equilibrio





$\text{sen } \theta = \frac{\text{cat. op.}}{\text{hipot}}$	$\text{cos } \theta = \frac{mg_y}{mg}$
$\text{sen } \theta = \frac{mg_x}{mg}$	$\text{cos } \theta = \frac{mg_y}{mg}$
$mg_x = mg \text{ sen } \theta$	$mg_y = mg \text{ cos } \theta$

$$+\nearrow \Sigma F_{\text{ext}, x} = 0$$

$$+T - mg_x = 0$$

$$T - mg \text{ sen } \theta = 0$$

$$T = mg \text{ sen } \theta$$

$$+\searrow \Sigma F_{\text{ext}, y} = 0$$

$$+N - mg_y = 0$$

$$N - mg \text{ cos } \theta = 0$$

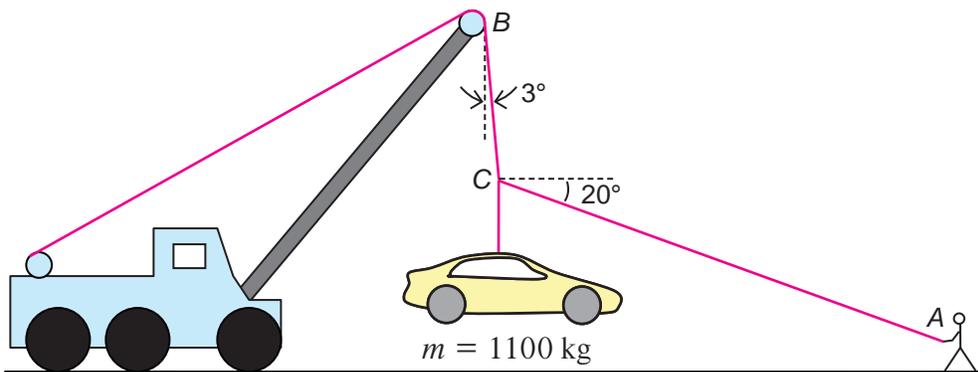
$$N = mg \text{ cos } \theta$$

$$T = (15 \text{ kg})\left(9.8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right)\text{sen } 30^\circ = 73.5 \text{ N}$$

$$N = (15 \text{ kg})\left(9.8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right)\text{cos } 30^\circ = 127.3 \text{ N}$$

La tensión sobre la cuerda ejercida por la caja es de igual magnitud que la fuerza $T = 73.5 \text{ N}$ dirigida a lo largo de la cuerda, ejercida sobre la caja por la cuerda. Por tanto, la tensión sobre la cuerda es de 73.5 N y la fuerza ejercida por el plano inclinado sobre la caja es 127.3 N , perpendicular al plano (pues no hay fricción).

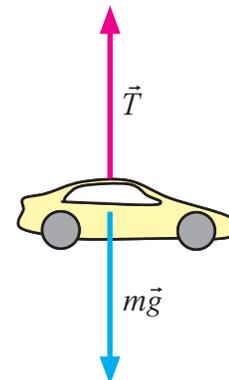
Ejemplo 1.5. Una grúa levanta un auto de 1100 kg mediante un cable que forma 3° con la vertical mientras una persona jala el cable AC que forma 20° con la horizontal como muestra la figura. Desprecie la masa de los cables y calcule la tensión sobre los cables AC y BC .



Para calcular la tensión sobre cada cable se construyen dos diagramas de cuerpo libre, uno para el auto y otro para el punto C. Al auto solo lo toca el cable vertical, por lo que el diagrama de cuerpo libre para el auto consiste de la fuerza de gravedad mg que ejerce la Tierra y la fuerza T ejercida por el cable vertical. Al aplicar la primera condición de equilibrio

$$+\uparrow \Sigma F_{\text{ext}, y} = 0$$

$$+T - mg = 0$$

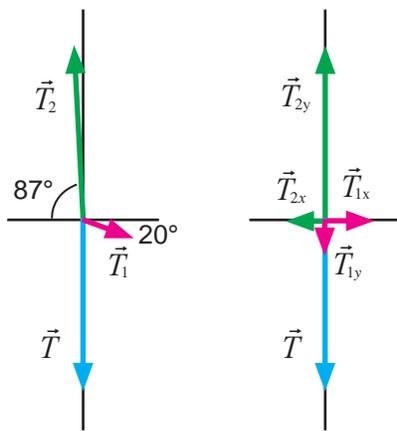




$$T = mg = (1100 \text{ kg})\left(9.8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right) = 10780 \text{ N} = 10.78 \text{ kN}$$

La fuerza ejercida sobre el cable por el auto es de igual magnitud y sentido opuesto a la fuerza ejercida sobre el auto por el cable (3ª ley de Newton). Debido a que las masas de los cables son muy pequeñas comparadas con la masa del auto, las fuerzas de tensión sobre sus extremos son de igual magnitud y los cables transmiten sin cambio, la fuerza de tensión. De esta manera, la tensión sobre el cable vertical es de 10.78 kN.

El diagrama de cuerpo libre para el punto C consiste de tres fuerzas: la fuerza T que el cable vertical ejerce hacia abajo y las dos fuerzas T_1 y T_2 que los otros dos cables ejercen dirigidas a lo largo de los cables. Las fuerzas T_1 y T_2 están inclinadas respecto a los ejes, por lo que se reemplazan por sus componentes rectangulares. Los ángulos θ_1 y θ_2 que las fuerzas T_1 y T_2 forman con la horizontal son 20° y $87^\circ (= 90^\circ - 3^\circ)$. Al aplicar la primera condición de equilibrio



$\text{sen } \theta_1 = \frac{\text{cat. op.}}{\text{hipot}}$ $\text{sen } \theta_1 = \frac{T_{1y}}{T_1}$ $T_{1y} = T_1 \text{ sen } \theta_1$	$\text{cos } \theta_1 = \frac{\text{cat. ady.}}{\text{hipot}}$ $\text{cos } \theta_1 = \frac{T_{1x}}{T_1}$ $T_{1x} = T_1 \text{ cos } \theta_1$
$\text{sen } \theta_2 = \frac{\text{cat. op.}}{\text{hipot}}$ $\text{sen } \theta_2 = \frac{T_{2y}}{T_2}$ $T_{2y} = T_2 \text{ sen } \theta_2$	$\text{cos } \theta_2 = \frac{\text{cat. ady.}}{\text{hipot}}$ $\text{cos } \theta_2 = \frac{T_{2x}}{T_2}$ $T_{2x} = T_2 \text{ cos } \theta_2$

$$\vec{\uparrow} \Sigma F_{\text{ext}, x} = 0$$

$$+\uparrow \Sigma F_{\text{ext}, y} = 0$$

$$+T_{1x} - T_{2x} = 0$$

$$+T_{2y} - T_{1y} - T = 0$$

$$+T_1 \text{ cos } \theta_1 - T_2 \text{ cos } \theta_2 = 0$$

$$+T_2 \text{ sen } \theta_2 - T_1 \text{ sen } \theta_1 - T = 0$$

Se tienen dos ecuaciones con dos incógnitas T_1 y T_2 , se puede despejar T_2 de la ecuación de equilibrio correspondiente al eje x y sustituir en la del eje y

$$T_2 = T_1 \frac{\text{cos } \theta_1}{\text{cos } \theta_2} \quad \text{al sustituir} \quad \frac{T_1 \text{ cos } \theta_1}{\text{cos } \theta_2} \text{ sen } \theta_2 - T_1 \text{ sen } \theta_1 - T = 0$$

Al multiplicar la ecuación por $\text{cos } \theta_2$

$$T_1 (\text{sen } \theta_2 \text{ cos } \theta_1 - \text{sen } \theta_1 \text{ cos } \theta_2) = T \text{ cos } \theta_2$$



y usando la relación de trigonometría $\text{sen}(\theta_2 - \theta_1) = \text{sen} \theta_2 \cos \theta_1 - \text{sen} \theta_1 \cos \theta_2$

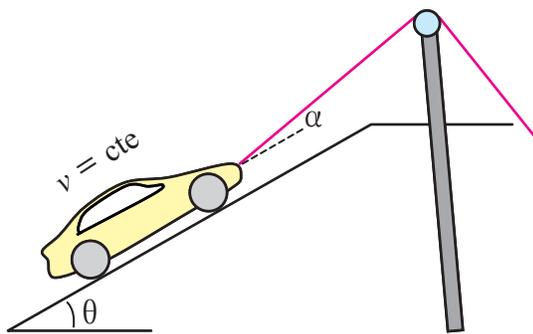
$$T_1 = \frac{T \cos \theta_2}{\text{sen}(\theta_2 - \theta_1)} = \frac{(10780 \text{ N}) \cos 87^\circ}{\text{sen}(87^\circ - 20^\circ)} = 613 \text{ N}$$

Al sustituir en T_2

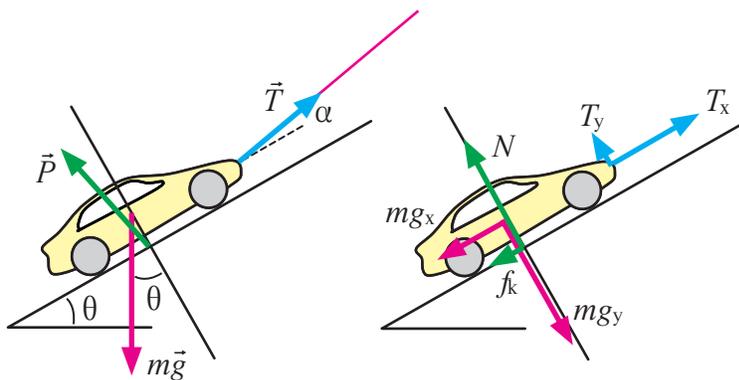
$$T_2 = T_1 \frac{\cos \theta_1}{\cos \theta_2} = (613 \text{ N}) \frac{\cos 20^\circ}{\cos 87^\circ} = 11005 \text{ N}$$

Las fuerzas de tensión sobre los cables AC y BC son 613 N y 11005 N. La persona ejerce una fuerza de 613 N, lo que equivale a levantar un objeto de 63 kg .

Ejemplo 1.6. Un auto de 1100 kg se sube con rapidez constante por una rampa inclinada un ángulo $\theta = 30^\circ$ por medio de un cable que forma $\alpha = 10^\circ$ con la rampa. El coeficiente de rozamiento cinético entre la rampa y las llantas es 0.20. Los frenos y la transmisión del auto están sueltos. Calcular la tensión sobre el cable.



El auto se sube con rapidez constante en línea recta, por lo que está en equilibrio. Al auto lo tocan el cable y la rampa. La polea no ejerce directamente una fuerza sobre el auto. El diagrama de cuerpo libre para el auto consiste de tres fuerzas, la fuerza de gravedad mg ejercida por la Tierra, la fuerza T que ejerce el cable dirigida a lo largo de él y la fuerza P ejercida por la rampa con fricción en contra del movimiento. Aunque el auto se mueva, está en equilibrio.



$\text{sen} \theta = \frac{\text{cat. op.}}{\text{hipot}}$	$\cos \theta = \frac{mg_y}{mg}$
$\text{sen} \theta = \frac{mg_x}{mg}$	$\cos \theta = \frac{mg_y}{mg}$
$mg_x = mg \text{ sen} \theta$	$mg_y = mg \cos \theta$
$\text{sen} \alpha = \frac{\text{cat. op.}}{\text{hipot}}$	$\cos \alpha = \frac{\text{cat. ady.}}{\text{hipot}}$
$\text{sen} \alpha = \frac{T_y}{T}$	$\cos \alpha = \frac{T_x}{T}$
$T_y = T \text{ sen} \alpha$	$T_x = T \cos \alpha$



El eje coordenado x se elige paralelo a la rampa; las tres fuerzas están inclinadas respecto a los ejes, por lo que se pueden reemplazar por sus componentes rectangulares. La rampa está inclinada un ángulo $\theta = 30^\circ$, el ángulo entre la fuerza de gravedad y el eje y también es θ . El ángulo entre el cable y el eje x es $\alpha = 10^\circ$. Existe rozamiento, por lo que la fuerza P que la rampa ejerce sobre el auto está inclinada en contra del movimiento. La componente de P en el eje x es la fuerza de fricción cinética f_k y la componente en el eje y es la fuerza normal N . El diagrama sólo incluye tres fuerzas: la fuerza de gravedad mg , la fuerza T que ejerce el cable y la fuerza P ejercida por la rampa. No se ejercen seis fuerzas sobre el auto, sino que la fuerza de fricción cinética f_k y la fuerza normal N son las componentes de la fuerza única ejercida por la rampa; las fuerzas mg_x y mg_y son las componentes de la fuerza de gravedad y las fuerzas T_x y T_y son las componentes de la fuerza de tensión que ejerce el cable. Al aplicar la primera condición de equilibrio

$$+\nearrow \Sigma F_{\text{ext}, x} = 0$$

$$+\searrow \Sigma F_{\text{ext}, y} = 0$$

$$+T_x - mg_x - f_k = 0$$

$$+N + T_y - mg_y = 0$$

$$T \cos \alpha - mg \sin \theta - \mu_k N = 0$$

$$N + T \sin \alpha - mg \cos \theta = 0$$

Se tienen dos ecuaciones con dos incógnitas T y N , se puede despejar N de la ecuación de equilibrio correspondiente al eje y y sustituir en la correspondiente al eje x

$$N = mg \cos \theta - T \sin \alpha$$

La fuerza normal *no* tiene igual magnitud que la fuerza de gravedad, ni que su componente $mg \cos \theta$. Al sustituir N en la primera ecuación

$$T \cos \alpha - mg \sin \theta - \mu_k (mg \cos \theta - T \sin \alpha) = 0 \quad \text{se despeja } T$$

$$T(\cos \alpha + \mu_k \sin \alpha) = mg \sin \theta + \mu_k mg \cos \theta$$

$$T = \frac{mg(\sin \theta + \mu_k \cos \theta)}{\cos \alpha + \mu_k \sin \alpha} = \frac{(1100 \text{ kg})\left(9.8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right)[\sin 30^\circ + (0.20) \cos 30^\circ]}{\cos 10^\circ + 0.20 \sin 10^\circ} = 7118 \text{ N}$$

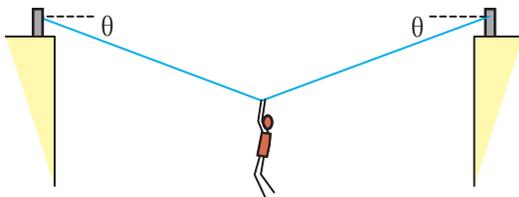
La magnitud de la fuerza normal es

$$N = mg \cos \theta - T \sin \alpha = (1100 \text{ kg})\left(9.8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right) \cos 30^\circ - (7118 \text{ N}) \sin 10^\circ = 8100 \text{ N}$$

La tensión sobre el cable es 7118 N. En este ejemplo la magnitud mínima para la tensión se logra cuando el ángulo entre el cable y la rampa es $\alpha = 11.3^\circ$ y para la fuerza normal cuando $\alpha = 60^\circ$, al subir el auto con rapidez constante.

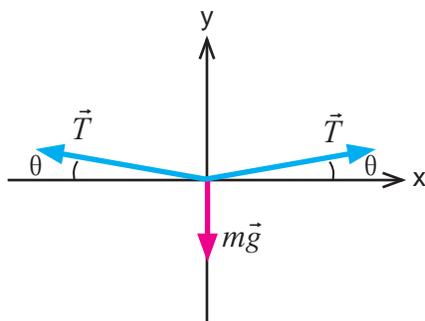


Ejemplo 1.7. Un deportista extremo cruza del techo de un edificio a otro colgado de una cuerda ligera estirada. Se detiene a la mitad para descansar. La masa del deportista es de 70 kg y la cuerda se rompe si la tensión sobre ella excede 8000 N. (a) Si el ángulo θ es de 10° , calcule la tensión sobre la cuerda. (b) ¿Qué valor mínimo puede tener el ángulo θ sin que se rompa la cuerda?



Se elabora el diagrama de cuerpo libre para el punto medio de la cuerda, el cual como la cuerda es ligera consiste de la fuerza que el deportista ejerce sobre la cuerda, cuya magnitud es igual a la fuerza de gravedad mg sobre el deportista, y las dos fuerzas T que se ejercen sobre el

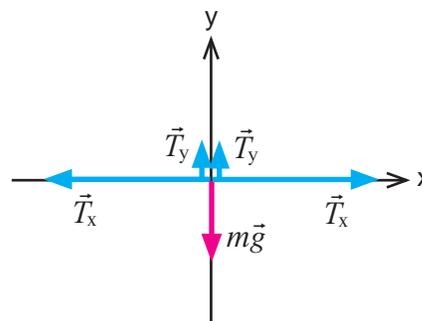
punto medio por cada sección de la cuerda. Estas dos fuerzas están inclinadas por lo que se pueden reemplazar por sus componentes rectangulares. Ambas fuerzas de tensión forman un ángulo θ con el eje horizontal, pues son alternos internos. Como los ángulos de cada fuerza de tensión son iguales, las magnitudes de dichas fuerzas de tensión también serán iguales. Las componentes de cada fuerza de tensión que ejerce la cuerda son T_x y T_y . Al aplicar la primera condición de equilibrio



$$+\sum F_{\text{ext}, x} = 0$$

$$+T_x - T_x = 0$$

$$T \cos \theta - T \cos \theta = 0$$



$$+\uparrow \sum F_{\text{ext}, y} = 0$$

$$+T_y + T_y - mg = 0$$

$$T \sin \theta + T \sin \theta - mg = 0$$

$\text{sen } \theta = \frac{\text{cat. op.}}{\text{hipot}}$
$\text{sen } \theta = \frac{T_y}{T}$
$T_y = T \text{sen } \theta$
$\text{cos } \theta = \frac{\text{cat. ady.}}{\text{hipot}}$
$\text{cos } \theta = \frac{T_x}{T}$
$T_x = T \text{cos } \theta$

(a) La tensión sobre la cuerda cuando el ángulo θ es de 10° , se obtiene de la ecuación de equilibrio correspondiente al eje y

$$2T \text{sen } \theta = mg$$

$$T = \frac{mg}{2 \text{sen } \theta} = \frac{(70 \text{ kg})(9.8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2})}{2 \text{sen } 10^\circ} = 1975 \text{ N}$$



(b) El valor mínimo que puede tener el ángulo θ sin que se exceda la fuerza de tensión que provocaría el rompimiento de la cuerda se puede calcular con la misma ecuación de equilibrio correspondiente al eje y

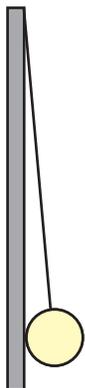
$$2T \sin \theta = mg$$

$$\sin \theta = \frac{mg}{2T} = \frac{(70 \text{ kg})(9.8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2})}{2(8000 \text{ N})} = 0.042875 \text{ al calcular el arcoseno o } \sin^{-1} \text{ de esta cantidad}$$

$$\theta = 2.5^\circ$$

Cuando el deportista de 70 kg está en el punto medio de la cuerda, si el ángulo θ es de 10° se origina una fuerza de tensión sobre la cuerda de 1975 N y el ángulo mínimo que puede formar la cuerda con la horizontal es de 2.5° pues para lograr un ángulo tan pequeño la cuerda tendría que estar demasiado estirada al producirse una fuerza de tensión sobre la cuerda de 8000 N.

Ejemplo 1.8. Un balón de 0.270 kg tiene un radio de 0.110 m y descansa junto al poste al que está atado. Si el cordel es ligero y mide 1.40 m, ¿qué tensión hay sobre el cordel y qué fuerza ejerce el poste sobre el balón?



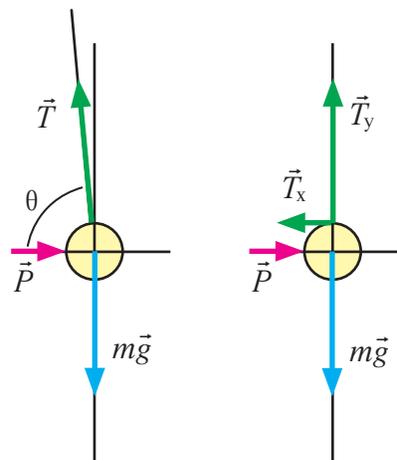
Al balón lo tocan el cordel y el poste. El diagrama de cuerpo libre para el balón consiste de la fuerza de gravedad, la fuerza T que ejerce el cordel y la fuerza ejercida por el poste, la cual es normal al poste pues se puede despreciar la fuerza de rozamiento estático entre el poste y el balón. La fuerza inclinada es la fuerza que ejerce el cordel y se reemplaza por sus componentes T_x y T_y . El ángulo θ que la fuerza T forma con la horizontal se calcula al notar que se forma un triángulo entre la línea de acción de la fuerza T (hipotenusa), el radio del balón (cateto adyacente) y el poste. La

longitud de la hipotenusa es 1.40 m + 0.110 m. Al aplicar la primera condición de equilibrio

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \frac{\text{cat. ady.}}{\text{hipot}} \\ \cos \theta &= \frac{0.110 \text{ m}}{1.510 \text{ m}} \\ \cos \theta &= 0.07285 \\ \theta &= 85.82^\circ \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sin \theta &= \frac{\text{cat. op.}}{\text{hipot}} \\ \sin \theta &= \frac{T_y}{T} \\ T_y &= T \sin \theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \frac{\text{cat. ady.}}{\text{hipot}} \\ \cos \theta &= \frac{T_x}{T} \\ T_x &= T \cos \theta \end{aligned}$$





$$\begin{aligned} \vec{\uparrow} \Sigma F_{\text{ext}, x} &= 0 & +\uparrow \Sigma F_{\text{ext}, y} &= 0 \\ +P - T_x &= 0 & +T_y - mg &= 0 \\ P - T \cos \theta &= 0 & T \text{sen} \theta - mg &= 0 \end{aligned}$$

La magnitud de la fuerza T se obtiene de la ecuación de equilibrio para el eje y

$$T \text{sen} \theta - mg = 0$$

$$T = \frac{mg}{\text{sen} \theta} = \frac{(0.270 \text{ kg})(9.8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2})}{\text{sen} 85.82^\circ} = 2.65 \text{ N}$$

La magnitud de la fuerza P se obtiene de la ecuación de equilibrio para el eje x

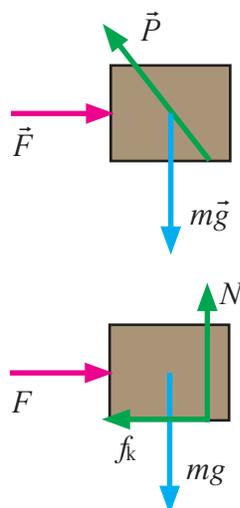
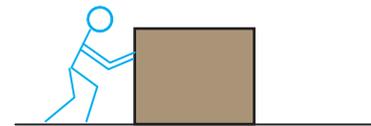
$$P - T \cos \theta = 0$$

$$P = T \cos \theta = (2.65 \text{ N}) \cos 85.82^\circ = 0.19 \text{ N}$$

La magnitud de la fuerza de tensión sobre el cordel es de 2.65 N y la de la fuerza que ejerce el poste sobre el balón es 0.19 N.

Ejemplo 1.9. Un trabajador empuja una caja de 12 kg en una superficie horizontal con rapidez constante. El coeficiente de fricción cinética entre la caja y la superficie es de 0.20. ¿Qué fuerza horizontal debe aplicar el trabajador para mantener el movimiento?

Debido a que hay rozamiento el trabajador debe aplicar una fuerza horizontal para que la caja se mueva en equilibrio. La caja está en contacto con el trabajador y



la superficie. El diagrama de cuerpo libre para la caja incluye tres fuerzas: la fuerza de gravedad mg sobre la caja, la fuerza horizontal F que ejerce el trabajador y la fuerza P ejercida por la superficie, inclinada en contra del movimiento pues hay rozamiento.

La fuerza inclinada P se reemplaza por sus componentes rectangulares: la fuerza de rozamiento cinético f_k y la fuerza normal N . El diagrama no incluye cuatro fuerzas, solo tres. Las fuerzas f_k y N son solo las componentes de la fuerza ejercida por la superficie sobre la caja. Al aplicar la primera condición de equilibrio



$$\begin{aligned} \vec{\uparrow} \Sigma F_{\text{ext}, x} &= 0 & + \uparrow \Sigma F_{\text{ext}, y} &= 0 \\ + F - f_k &= 0 & + N - mg &= 0 \\ F - \mu_k N &= 0 & N &= mg \end{aligned}$$

La fuerza normal N se obtiene de la ecuación de equilibrio para el eje y

$$N = mg = (12 \text{ kg})\left(9.8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right) = 117.6 \text{ N}$$

La fuerza F se obtiene de la ecuación de equilibrio para el eje x

$$F = \mu_k N = (0.20)(117.6 \text{ N}) = 23.52 \text{ N}$$

Debido a que existe fricción entre la caja y la superficie, el trabajador debe aplicar una fuerza horizontal de 23.52 N para que la caja se mueva en equilibrio, es decir con rapidez constante y en línea recta. En caso de que la superficie fuese lisa, sin rozamiento, ¿qué valor tendría la fuerza horizontal que debe aplicar el trabajador para mantener el movimiento?

1.2. Equilibrio de rotación



Fig. 1.9. El juego del Volador es un ritual indígena originario de mesoamérica que se caracteriza por el uso de aparatos giratorios y maniobras acrobáticas.

Un cuerpo se encuentra en movimiento de rotación cuando todos los puntos del cuerpo describen circunferencias *centradas sobre el mismo eje fijo* llamado eje de rotación. Existen muchos ejemplos de movimiento de rotación, por ejemplo, el movimiento de la Tierra que genera el día y la noche es un movimiento de rotación alrededor de su propio eje; el movimiento de un abanico de techo, de las hélices de un helicóptero, de una polea con eje fijo, de un disco compacto, de la turbina de un avión; de un trompo cuando está en funcionamiento; el movimiento de una puerta cuando la abrimos o la cerramos y el movimiento de los voladores de Papantla, Veracruz. Para entender el movimiento de rotación de un cuerpo sólido y el equilibrio de éste se estudiarán los conceptos de momento de torsión y brazo de palanca.



1.2.1. Momento de torsión

La **posición** de la **línea de acción** de una fuerza determina la eficacia de dicha fuerza para causar o alterar el movimiento de rotación. Si se quiere abrir una puerta, es mucho más eficaz empujarla lejos del eje de rotación (cerca de la perilla) que cerca de él (cerca de las bisagras). Cuando se requiere aflojar un tornillo apretado (Fig. 1.10), la fuerza F_1 aplicada a mayor distancia del eje de rotación es más eficaz que la fuerza F_2 de igual magnitud aplicada cerca del tornillo. La fuerza F_3 no tiende a producir un giro en el tornillo pues su línea de acción pasa por el eje de rotación del tornillo. La capacidad de una fuerza para causar o alterar el movimiento de rotación se denomina **momento de torsión respecto a un eje**. En ocasiones también se le denomina **torca** o **momento de la fuerza respecto a un eje**.

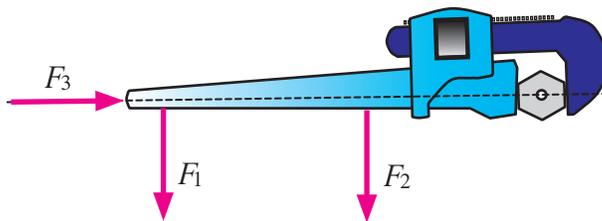


Fig 1.10. De las tres fuerzas de igual magnitud, F_1 tiene mayor capacidad de aflojar el tornillo.

En la Figura 1.11 se muestra una fuerza F que actúa sobre un cuerpo el cual puede girar alrededor del eje vertical que pasa por el punto O . La **tendencia** de la fuerza a causar una rotación alrededor del eje depende de su magnitud F y de la distancia perpendicular d entre la línea de acción de la fuerza y el eje de rotación; distancia perpendicular a la que se le denomina **brazo de palanca respecto al eje**. La magnitud del momento de torsión respecto al eje O es el producto

$$M_o = Fd$$

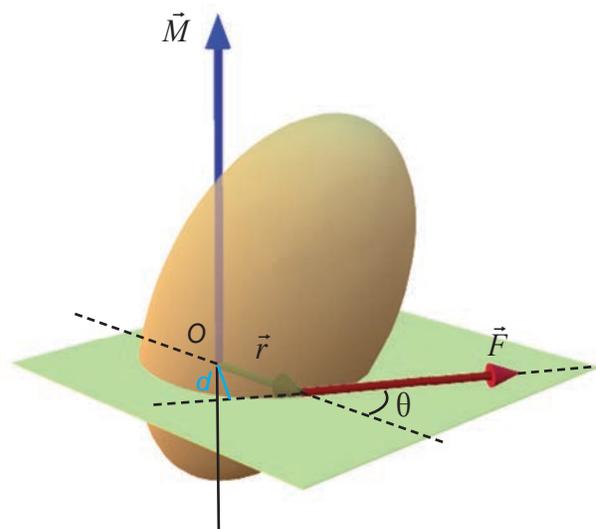


Fig. 1.11. Vector de posición (\vec{r}), fuerza (\vec{F}) y el momento de la fuerza (\vec{M}), respectivamente.



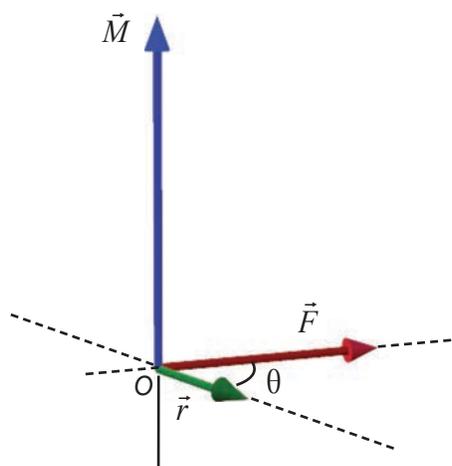


Fig. 1.12. El vector momento de la fuerza es perpendicular al plano que contiene a los vectores de posición y fuerza.

Al determinar el brazo de palanca se *prolonga* la línea de acción de la fuerza para encontrar la distancia perpendicular d entre la línea de acción de la fuerza y el eje de rotación.

Se puede considerar como *positivos* a los momentos de torsión que tienden a causar una *rotación en sentido opuesto al de las manecillas del reloj* y como *negativos* a los momentos de torsión que tienden a causar una *rotación en el mismo sentido que las manecillas del reloj*.

La unidad del momento de torsión respecto a un eje en el Sistema internacional es el newton metro, Nm. En el caso de energía y trabajo a esta combinación se le denomina joule, pero el momento de torsión es un vector y no energía, así que se debe expresar en newton metro, no en joules.

La definición formal del momento de torsión respecto a un eje es

$$\vec{M}_o = \vec{r} \times \vec{F}$$

El vector momento de torsión \vec{M}_o es perpendicular tanto al vector posición \vec{r} como al vector fuerza \vec{F} . En matemáticas a $\vec{r} \times \vec{F}$ se le conoce como *producto vectorial* de dos vectores y su módulo es

$$M_o = rF \text{sen} \theta$$

Donde θ es el ángulo formado por los vectores \vec{r} y \vec{F} al dibujarse **con un origen común** y la dirección de \vec{M}_o es perpendicular al plano que conforman dichos vectores.

Regla de la mano derecha: Dibujemos los vectores \vec{r} y \vec{F} intersecándose en sus orígenes, imaginando un eje perpendicular al plano de \vec{r} y \vec{F} a través de su origen. Doblamos hacia adentro los dedos de la mano derecha alrededor de este eje y empujamos el vector \vec{r} hacia el vector \vec{F} a través del ángulo más pequeño entre ellos con las puntas de los dedos, manteniendo el pulgar extendido; la dirección del pulgar da entonces el sentido del vector \vec{M}_o .



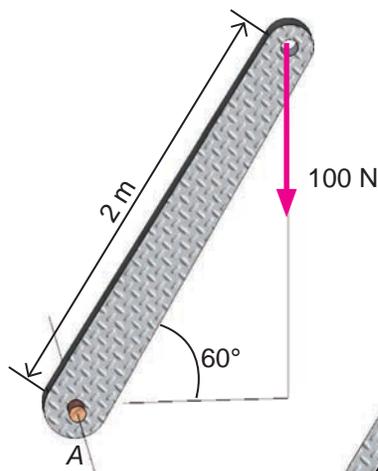


Cuando el ángulo θ entre el vector posición y el vector fuerza es 0° o bien 180° , el momento de torsión será cero, pues $\sin 0^\circ = 0$ y $\sin 180^\circ = 0$, lo que significa que los vectores \vec{r} y \vec{F} son paralelos o antiparalelos.

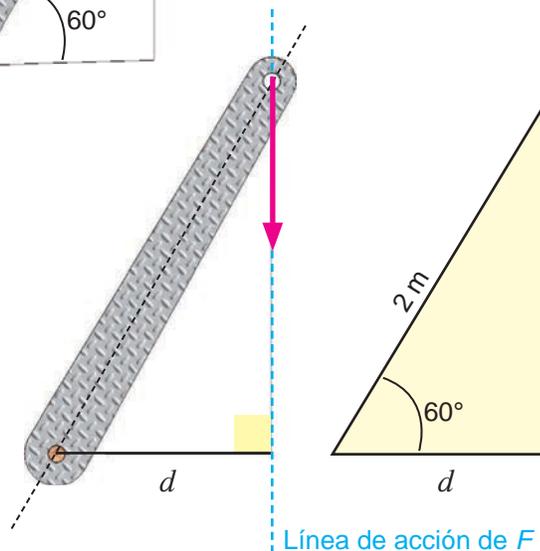
Es común indicar con un punto dentro de un círculo que un vector sale del plano, dando la idea de que se observa la punta de una flecha que sale del plano y con una cruz dentro de un círculo a un vector que entra al plano, como si fuera la cola de una flecha.

- ⊙ El vector momento es positivo si sale del plano
- ⊗ El vector momento es negativo si entra al plano

Ejemplo 1.10. Se aplica una fuerza vertical de 100 N en el extremo de una palanca que se fija a un eje que pasa por "A". Determinar el momento de la fuerza de 100 N con respecto a "A".



Utilizando el concepto de brazo de palanca el módulo del vector momento se determina con la ecuación $M_A = Fd$. Se sabe que $F = 100$ N y se desconoce el valor del brazo de palanca (d) de la fuerza, se tendrá que calcular utilizando el triángulo rectángulo que se forma en la figura y aplicando las funciones trigonométricas que relacionan lo conocido con lo desconocido.



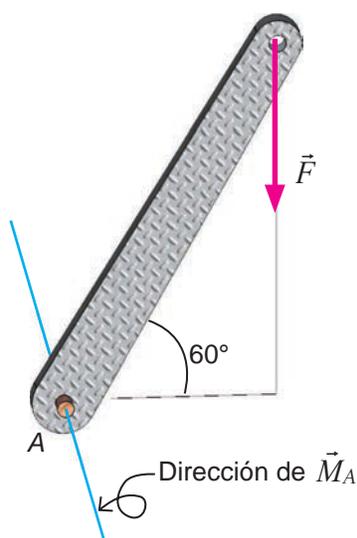
$$\cos 60^\circ = \frac{d}{2 \text{ m}}$$

$$d = (2 \text{ m}) \cos 60^\circ = 1 \text{ m}$$

Sustituyendo:

$$M_A = Fd = (100 \text{ N})(1 \text{ m}) = 100 \text{ Nm}$$

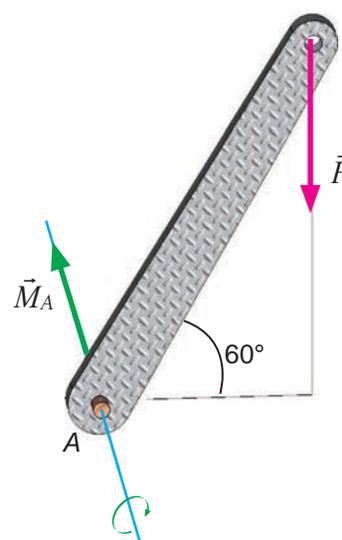
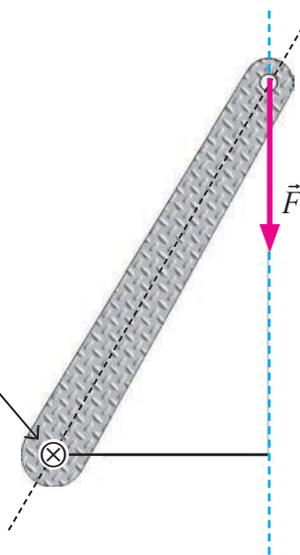
Línea de acción de F



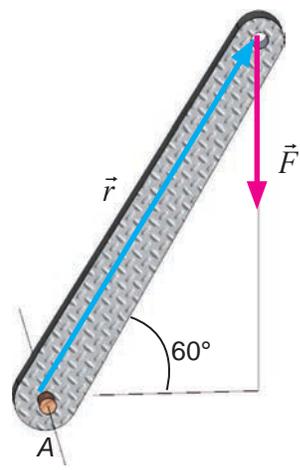
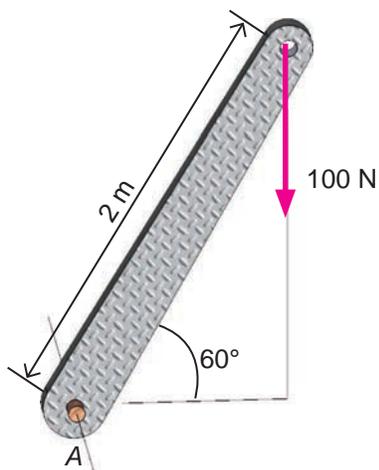
La dirección del vector momento es perpendicular al plano que contiene a la fuerza y pasa por el punto "A".

El efecto que tiende a producir la fuerza sobre el cuerpo alrededor del eje de rotación "A", es un giro igual al giro de las manecillas del reloj, por lo que, el vector momento es negativo.

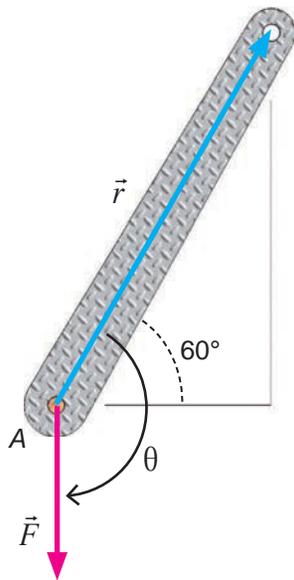
El vector momento entra al plano



Utilizando el concepto de producto vectorial ($\vec{M}_A = \vec{r} \times \vec{F}$), el vector momento se determina de la siguiente forma.



Para calcular su módulo se emplea $M_A = rF \text{sen}\theta$, donde r es la magnitud (sin signo) del vector posición, igual a 2 m, F es la magnitud (sin signo) del vector fuerza, igual a 100 N y θ es el ángulo que se forma entre el vector posición y el vector fuerza al dibujarse con un origen común.



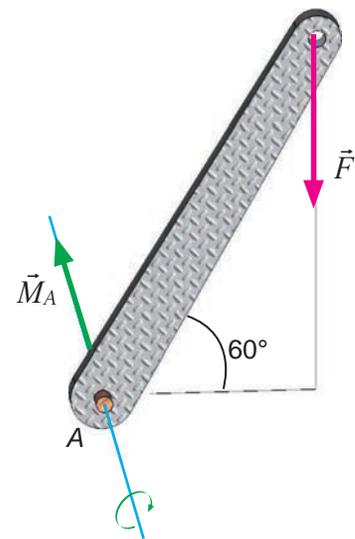
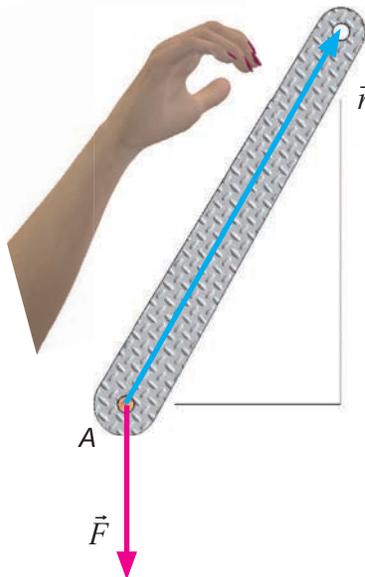
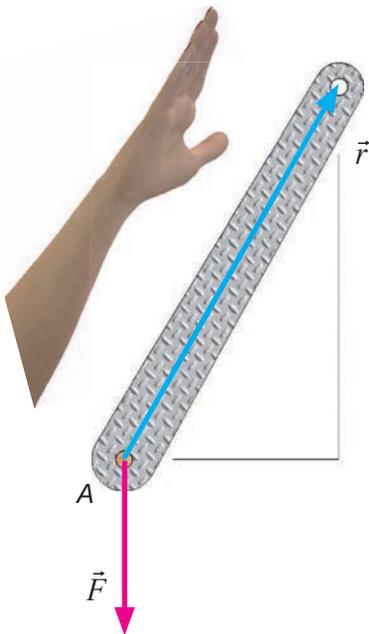
$$\theta = 90^\circ + 60^\circ = 150^\circ$$

Sustituyendo datos, se tiene

$$M_A = rF \text{sen} \theta = (2 \text{ m})(100 \text{ N})\text{sen}150^\circ = 100 \text{ Nm}$$

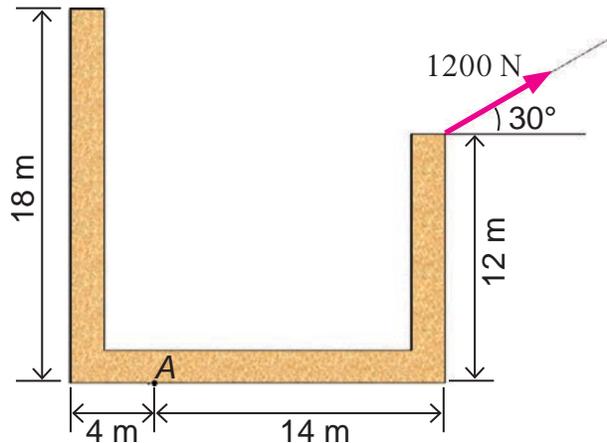
La dirección del vector momento es perpendicular al plano que contiene al vector posición y al vector fuerza, pasando por el eje de rotación "A".

Para determinar el sentido del vector momento se utiliza la regla de la mano derecha. Extendiendo los dedos a lo largo del vector posición con la palma de la mano hacia el vector fuerza, curvamos los dedos rumbo al vector fuerza, observando que el dedo pulgar apunta hacia adentro del plano, por lo que el vector momento es negativo





Ejemplo 1.11. Una fuerza de 1200 N actúa sobre un soporte. Calcular el momento \vec{M}_A de la fuerza con respecto a A.



Utilizando el concepto de brazo de palanca y trabajando con las componentes rectangulares del vector fuerza. Se procede a calcular el valor de las componentes rectangulares de la única fuerza aplicada a la estructura, así como sus respectivos brazos de palanca.

$$F_y = F \operatorname{sen} \theta = (1200 \text{ N}) \operatorname{sen} 30^\circ = 600 \text{ N}$$

$$F_x = F \cos \theta = (1200 \text{ N}) \cos 30^\circ = 1039.23 \text{ N}$$

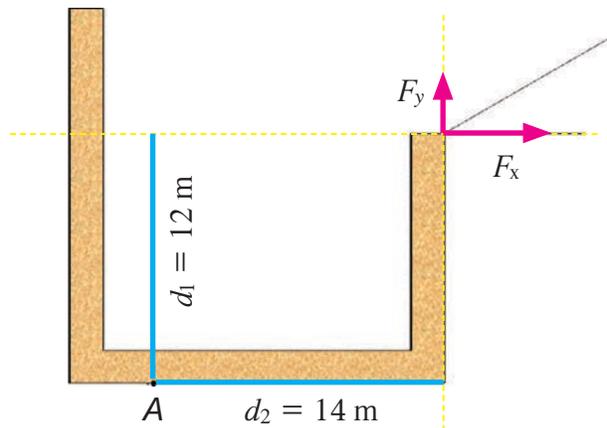
El momento total sobre el eje de rotación "A" es igual a la suma de los momentos individuales de cada una de las fuerzas, el signo se obtiene comparando el giro que provoca cada fuerza con el giro de las manecillas del reloj.

$$M_A = -F_x d_1 + F_y d_2$$

Sustituyendo

$$M_A = -(1039.23 \text{ N})(12 \text{ m}) + (600 \text{ N})(14 \text{ m})$$

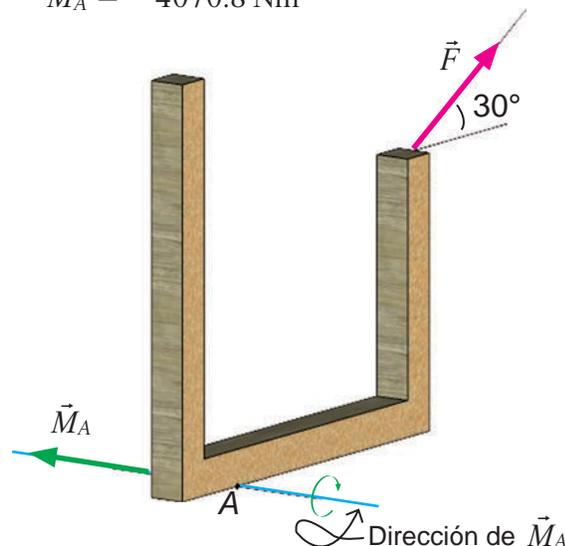
$$M_A = -4070.8 \text{ Nm}$$



La dirección del vector momento es perpendicular al plano que contiene la fuerza y pasa por el punto "A".

Cuando participan dos o más fuerzas, el sentido está dado por el signo que se obtiene en el cálculo del momento, en este caso es negativo.

⊗





1.2.2. Par de fuerzas

La experiencia más común que se tiene, respecto a las fuerzas y sus giros, es cuando se abre o se cierra una puerta, cuando se aprieta o afloja un tornillo, o bien cuando se abre o cierra un frasco o botella con tapón de rosca.

¿Qué hay de común al enroscar o desenroscar la tapa de un botella, al abrir o cerrar la chapa de una puerta, accionar el volante de un vehículo para dar vuelta a la derecha o a la izquierda? En la figura 1.13 se esquematiza estos hechos al dibujar un sólido en forma de disco el cual está accionado por dos fuerzas cuyas características son el tener las misma magnitud pero con dirección opuesta y con líneas de acción paralelas pero que no coinciden.

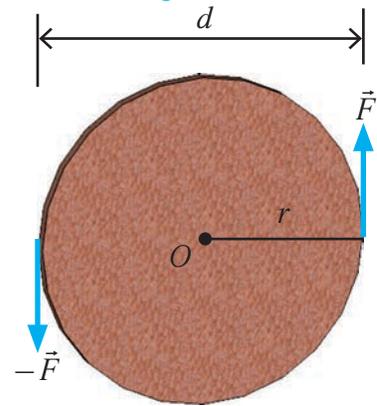


Fig. 1.13. Par de fuerzas aplicado a un disco de radio r que rota alrededor de un eje que pasa por el centro del mismo.

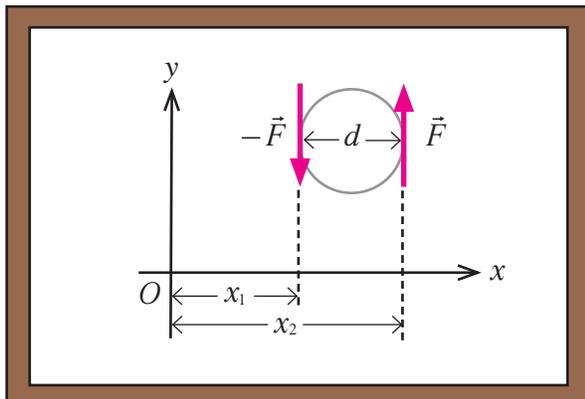
Si se observa, la fuerza resultante de este sistema es nula, sin embargo la resultante de los momentos de las fuerzas respectivas es diferente de cero. Si se toma de referencia el centro, entonces

$$M_o = Fr + Fr = 2Fr = Fd$$

Donde $d = 2r$ es el diámetro del disco.

A un sistema de fuerzas como el explicado anteriormente se le conoce como *par de fuerzas* y su magnitud se obtiene multiplicando el diámetro d del disco por una de las fuerzas aplicadas.

$$M_o = Fd$$



Coloque las fuerzas del esquema en sentido contrario y determine el momento del par de fuerzas. ¿Qué sentido físico tiene este resultado respecto al obtenido por la expresión anterior?



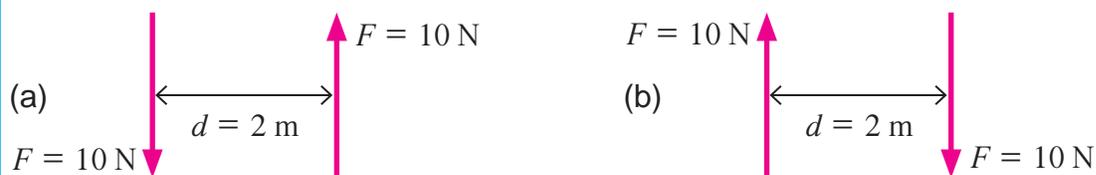
Ejemplo 1.12. Determine el momento del par de la figura 1.12, tomando un origen fuera del disco, como se muestra en el pizarrón.

En la figura del pizarrón hemos esquematizado, de manera general, el caso de la figura 1.14. En él mostramos el origen en el punto O y las posiciones de las líneas de acción de las fuerzas respectivas. Así que el momento del par es:

$$M_o = Fx_2 - Fx_1 = F(x_2 - x_1) = Fd$$

Así que el momento del par es el mismo en todos los puntos del plano que forman las fuerzas y de manera análoga la magnitud del momento es la magnitud de cualquiera de las fuerzas por la distancia perpendicular entre ellas.

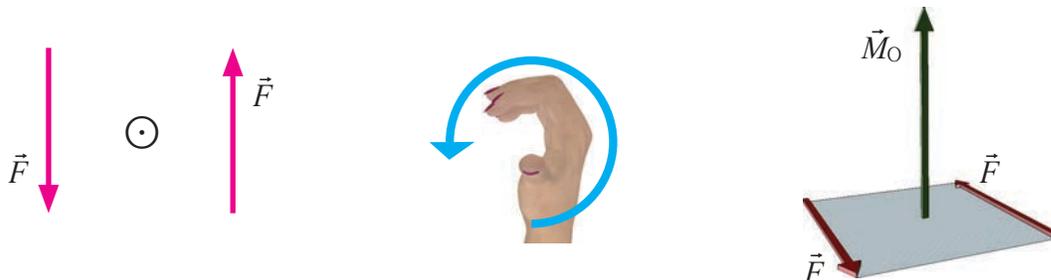
Ejemplo 1.13. Determine el módulo, la dirección y el sentido del vector momento de los siguientes pares de fuerza. Dibuje el vector momento en cada caso.



a) El módulo del vector momento se determina sustituyendo el valor de una de las fuerzas que forman el par, así como la distancia perpendicular que hay entre las líneas de acción de las fuerzas, resultando

$$M_o = Fd = (10 \text{ N})(2 \text{ m}) = 20 \text{ Nm}$$

Su dirección es perpendicular al plano que contiene al par de fuerzas. El par de fuerzas tiende a producir un giro en sentido contrario al de las manecillas del reloj, por tal razón, el sentido del vector momento es positivo; usando la regla de la mano derecha, al doblar los dedos en el sentido del giro provocan que el pulgar extendido apunte hacia afuera del plano, lo que indica que el vector momento del par de fuerzas sale del plano.

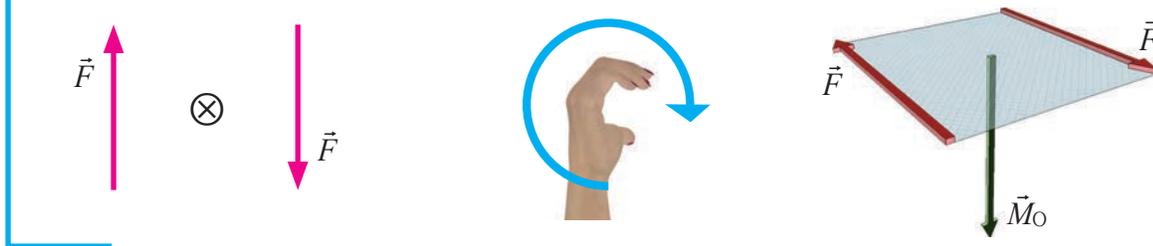




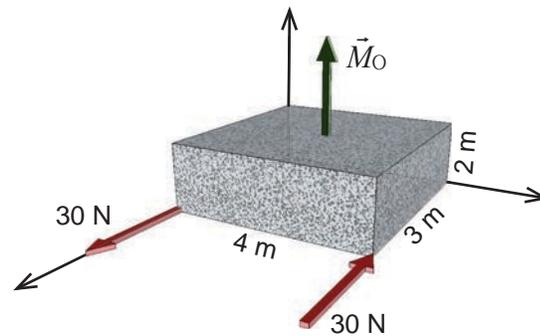
b) El módulo del vector momento se determina sustituyendo el valor de una de las fuerzas que forman el par, así como la distancia perpendicular que hay entre las líneas de acción de las fuerzas, resultando

$$M_O = Fd = (10 \text{ N})(2 \text{ m}) = 20 \text{ Nm}$$

Su dirección es perpendicular al plano que contiene al par de fuerzas. El par de fuerzas tiende a producir un giro en el sentido de las manecillas del reloj, por tal razón, el sentido del vector momento es negativo; usando la regla de la mano derecha, al doblar los dedos en el sentido del giro provocan que el pulgar extendido apunte hacia adentro del plano, lo que indica que el vector momento del par de fuerzas entra al plano.

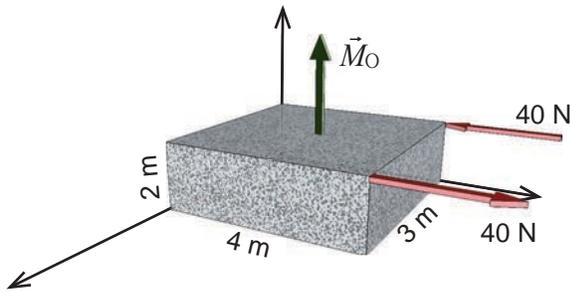


Un par de fuerzas puede transformarse en otro par sin que se modifique el efecto de rotación que tiende a producir en un cuerpo, esto se logra sólo cuando el vector momento \vec{M}_O del par no cambie. Para ello es necesario que el vector momento del par de fuerzas no cambie en módulo, ni en dirección y sentido. Por tanto, un par de fuerzas se puede transformar en otro, sin que se modifique el efecto de rotación que tiende a producir en un cuerpo, cuando no se altera el módulo del vector momento (Fd), ni su dirección (trasladarlo a un plano paralelo o en el mismo plano) y asegurando que el vector momento del par tenga el mismo sentido, es decir, que el sentido de rotación que tiende a imprimir al cuerpo no cambie. Los pares de fuerza de la figura son equivalentes, es decir, el efecto de rotación que tienden a producir en el cuerpo es el mismo.



$$M_O = Fd = (30 \text{ N})(4 \text{ m}) = 120 \text{ Nm}$$

La regla de la mano derecha indica que el vector momento del par de fuerzas apunta hacia arriba.



Dos pares que tienen el mismo vector momento \vec{M}_O son equivalentes, si están contenidos en el mismo plano o en planos paralelos.

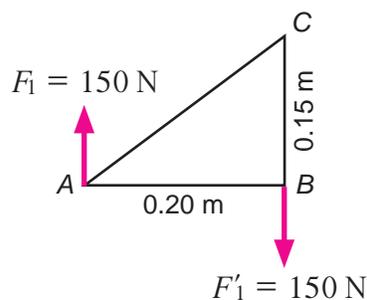


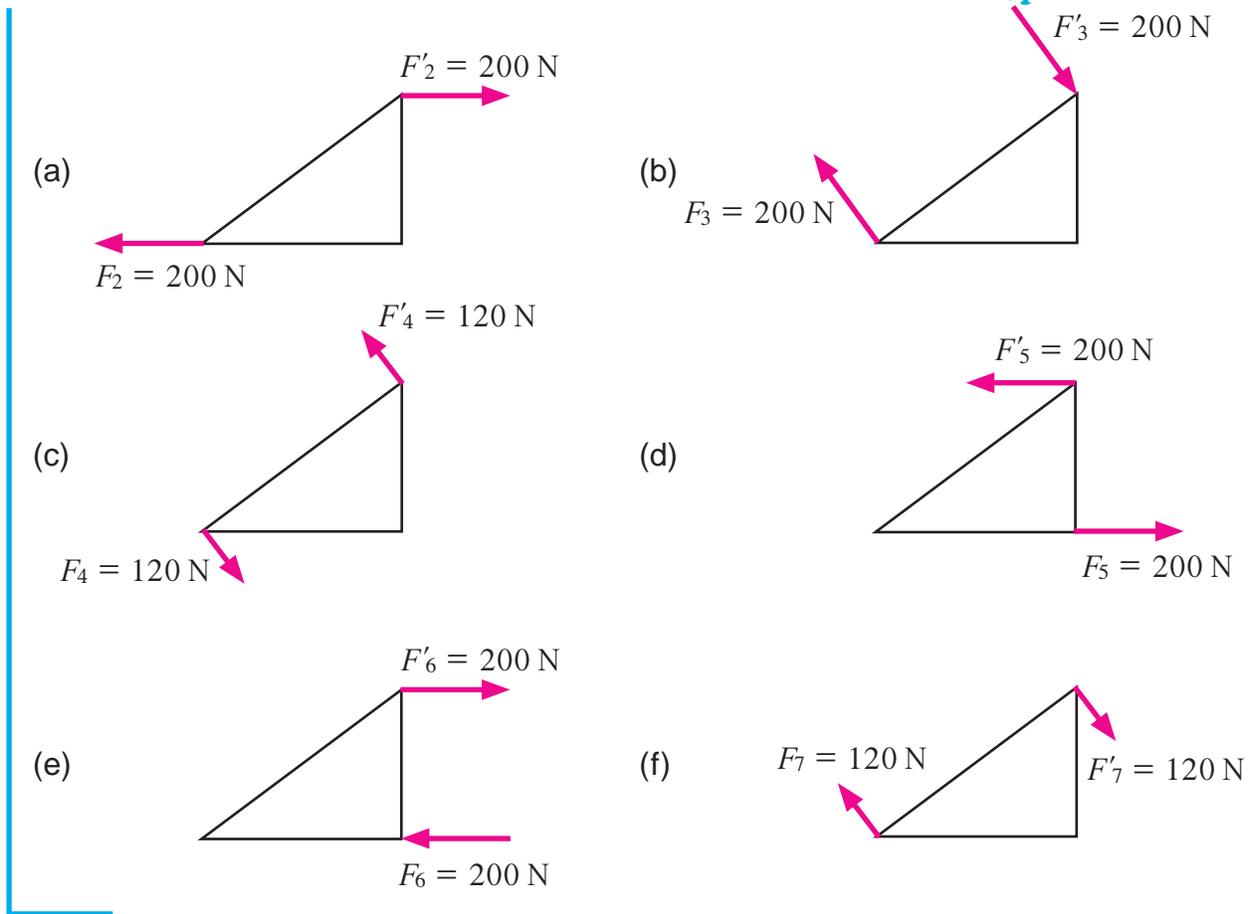
$$M_O = Fd = (40 \text{ N})(3 \text{ m}) = 120 \text{ Nm}$$

La regla de la mano derecha indica que el vector momento del par de fuerzas apunta hacia arriba.

Cuando un par de fuerzas actúa sobre un cuerpo, es irrelevante dónde actúan las dos fuerzas que forman al par o cuáles son la magnitud y dirección que esas fuerzas tengan. La única cosa que importa es el momento del par (su magnitud y dirección). Los pares con el mismo momento tendrán el mismo efecto sobre el cuerpo.

Ejemplo 1.14. En la figura se presenta, vista desde arriba, una lámina plana triangular ABC que descansa sobre una superficie horizontal lisa. La longitud del lado AB es de 0.20 m, y la del BC, de 0.15 m. La lámina está sometida a un par formado por las fuerzas horizontales \vec{F}_1 y \vec{F}'_1 , cada una de 150 N. Indique cuáles de los pares de fuerza indicados en los incisos tendrá el mismo efecto sobre la lámina que el que ejerce el par formado por \vec{F}_1 y \vec{F}'_1 .





1.2.3. Condición de equilibrio de rotación

Si queremos obtener el momento total de las fuerzas, podemos sumar vectorialmente cada uno de los momentos de las fuerzas individuales sobre todas las partículas que conforman al sólido rígido:

$$\vec{M}_O = \sum \vec{M}_{O_i} = \sum \vec{r}_i \times \vec{F}_i$$

Sin embargo, como sabemos, las posiciones pueden verse respecto al centro de masa, utilizando las expresiones:

$$\vec{M}_O = \sum [(\vec{r}'_i + \vec{r}_{cm}) \times \vec{F}_i]$$

$$\vec{M}_O = \sum [\vec{r}'_i \times \vec{F}_i + \vec{r}_{cm} \times \vec{F}_i]$$

$$\vec{M}_O = \sum \vec{r}'_i \times \vec{F}_i + \sum (\vec{r}_{cm} \times \vec{F}_i)$$





Esta última expresión dice que el momento total puede verse como la suma de momentos del centro de masa y de las posiciones respecto del centro de masa de las partículas. Por otro lado, analizando el segundo término de la última expresión:

$$\Sigma(\vec{r}_{\text{cm}} \times \vec{F}_i) = \vec{r}_{\text{cm}} \times \Sigma \vec{F}_i = 0 \quad \text{ya que } \Sigma \vec{F}_i = 0$$

Esto quiere decir que el momento respecto al centro de masa es nula, ya que la primera condición de equilibrio se cumple, es decir, la suma total de las fuerzas es cero.

Resumiendo entonces se tiene que:

$$\vec{M}_O = \Sigma \vec{r}_i \times \vec{F}_i = \Sigma \vec{r}'_i \times \vec{F}_i$$

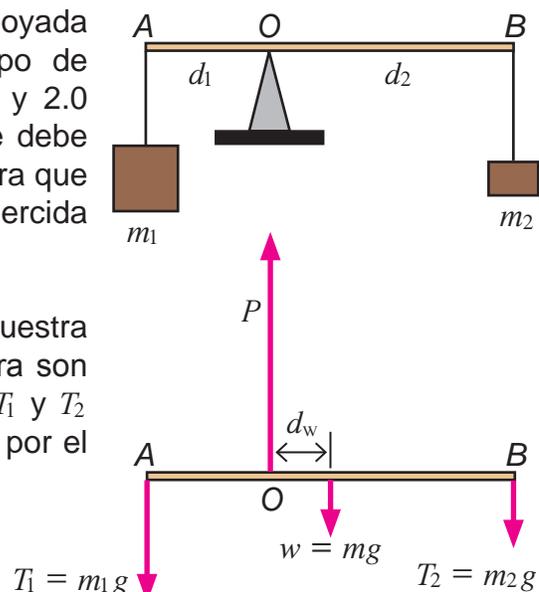
Este resultado es muy importante porque dice que el momento total puede obtenerse sin importar el origen que se tome para describir las posiciones de las partículas que conforman al sólido, algo muy similar al ejemplo 1.12. Claramente, en la práctica, se toma aquél que simplifique la solución del problema.

La segunda condición de equilibrio establece que **un cuerpo sólido se encuentra en equilibrio de rotación cuando el momento total es cero**, esto es:

$$\curvearrowright \vec{M}_O = 0$$

Ejemplo 1.15. Una barra rígida de 5 kg está apoyada en “O” y soporta en el extremo A un cuerpo de $m_1 = 20$ N. Las distancias d_1 y d_2 son de 1.0 y 2.0 m, respectivamente. Encontrar la masa m_2 que debe tener un segundo cuerpo sujeto al extremo B para que la barra esté en equilibrio y calcular la fuerza ejercida sobre la barra por el pivote en “O”.

El diagrama de cuerpo libre para la barra se muestra en la figura. Las fuerzas ejercidas sobre la barra son el peso w ejercido por la Tierra, las tensiones T_1 y T_2 ejercidas por las cuerdas y la fuerza P ejercida por el apoyo en “O”.





Al aplicar la primera condición de equilibrio, se tiene

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0$$

$$+P - T_1 - w - T_2 = 0$$

$$P - 196 \text{ N} - 49 \text{ N} - T_2 = 0$$

Sin embargo, esta ecuación tiene dos incógnitas P y T_2 . Es necesario utilizar la segunda condición de equilibrio. Tomando momentos respecto al punto de apoyo en "O", se tiene

$$\curvearrowright \vec{M}_O = 0$$

$$+T_1 d_1 - w d_w - T_2 d_2 = 0$$

$$(196 \text{ N})(1 \text{ m}) - (49 \text{ N})(0.5 \text{ m}) - T_2(2 \text{ m}) = 0$$

$$T_2 = 85.75 \text{ N} \quad T_2 = m_2 g \quad m_2 = 8.75 \text{ kg}$$

Al sustituir T_2 en la ecuación de la primera condición de equilibrio, se tiene

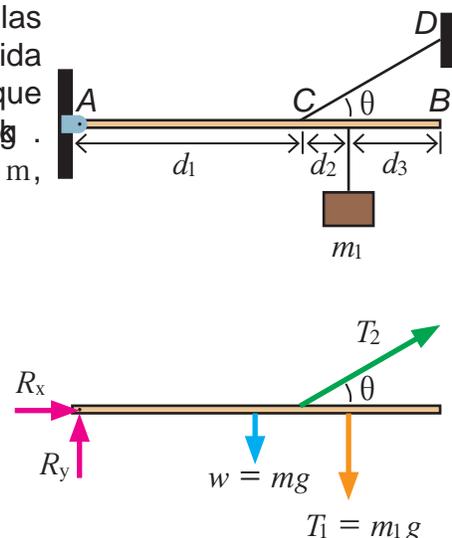
$$P - 196 \text{ N} - 49 \text{ N} - 85.75 \text{ N} = 0$$

$$P = 330.75 \text{ N}$$

Por tanto, la masa que debe tener el cuerpo es de 8.75 kg , para que la barra esté en equilibrio.

Ejemplo 1.16. Encontrar la tensión en el cable CD y las componentes horizontal y vertical de la fuerza ejercida sobre el puntal AB en el perno A. La masa del cuerpo que cuelga es $m_1 = 15 \text{ kg}$ y la masa del puntal es de 5 kg . El ángulo mide $\theta = 30^\circ$ y las distancias son $d_1 = 2.5 \text{ m}$, $d_2 = 0.5 \text{ m}$ y $d_3 = 1 \text{ m}$.

El diagrama de cuerpo libre se muestra en la figura. Las fuerzas ejercidas sobre el puntal son el peso w ejercido por la Tierra, la fuerza T_1 ejercida por la cuerda del cuerpo que cuelga, la fuerza T_2 ejercida por el cable CD y la fuerza R ejercida en el perno, de la que se muestran sus componentes R_x y R_y .

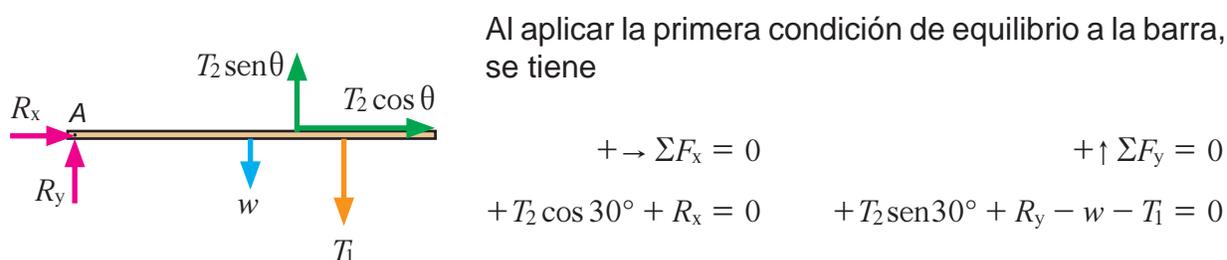




En ocasiones, no se conoce el sentido de las componentes R_x y R_y . Cuando no se tiene seguridad del sentido de alguna componente, entonces se suponen los sentidos de dichas componentes y se aplican las condiciones de equilibrio. Si el resultado de alguna componente es negativo, entonces el sentido real de dicha componente es opuesto al sentido supuesto.

En este ejemplo se han supuesto los sentidos de R_x (a la derecha) y de R_y (hacia arriba).

La fuerza inclinada T_2 se descompone en términos de seno y coseno, como se muestra en la figura.



En estas dos ecuaciones existen tres incógnitas: T_2 , R_x y R_y . Entonces, es necesario otra ecuación. Al aplicar la segunda condición de equilibrio, respecto al punto A, se tiene

$$\curvearrow + \vec{M}_A = 0$$

$$+T_2 \sin \theta d_1 - w d_w - T_1 (d_1 + d_2) = 0$$

$$T_2 \sin 30^\circ (2.5 \text{ m}) - (49 \text{ N})(2 \text{ m}) - (147 \text{ N})(3 \text{ m}) = 0$$

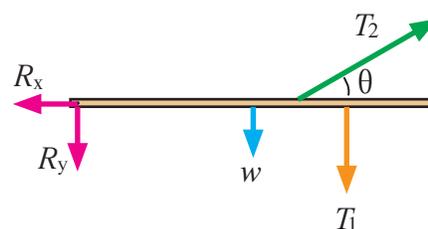
$$T_2 = 431.2 \text{ N}$$

Al sustituir T_2 en las ecuaciones anteriores, se tiene

$$R_x = -373.4 \text{ N}$$

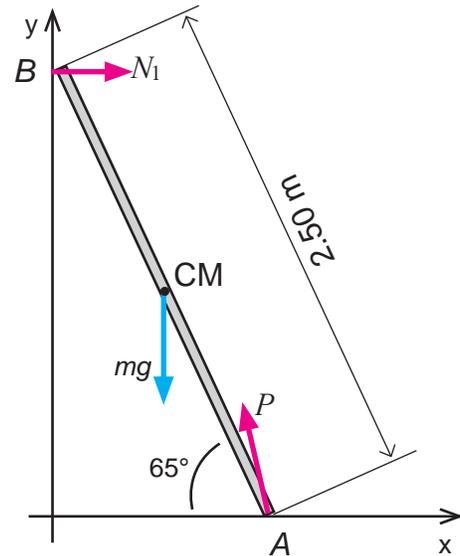
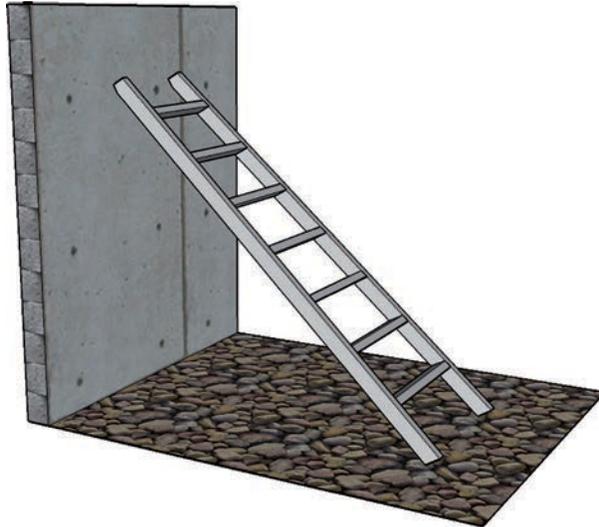
$$R_y = -19.6 \text{ N}$$

Como estos resultados son negativos, entonces los sentidos de R_x y R_y son contrarios a los supuestos y el diagrama de cuerpo libre debe ser





Ejemplo 1.17. Una escalera de 15 kg y 2.50 m de largo se apoya en una pared vertical lisa y está en contacto con un piso áspero en un ángulo de 65°. Calcula las fuerzas que ejercen la pared y el piso sobre la escalera.



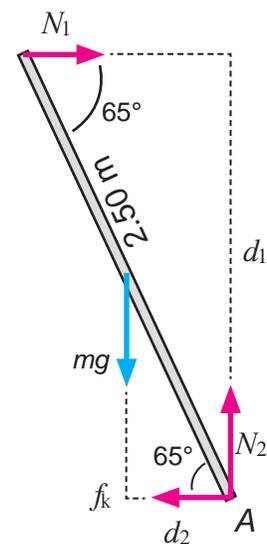
En la figura se aprecian las distintas fuerzas que actúan sobre la escalera, es de notarse la magnitud del peso mg actuando en el centro de masa de la escalera, la fuerza N_1 que es perpendicular a la pared, en tanto la fuerza P en el punto con el piso puede descomponerse en f_k y N_2 , respectivamente.

Al aplicar la primera condición de equilibrio a la barra, se tiene

$$\begin{aligned}
 +\rightarrow \Sigma F_x &= 0 & +\uparrow \Sigma F_y &= 0 \\
 +N_1 - f_k &= 0 & N_2 - mg &= 0 \\
 N_2 &= (15 \text{ kg})(9.8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}) = 147 \text{ N}
 \end{aligned}$$

Al aplicar la segunda condición de equilibrio, respecto al punto A, se tiene

$$\begin{aligned}
 \curvearrowright \vec{M}_A &= 0 \\
 +mgd_2 - N_1d_1 &= 0 \\
 (15 \text{ kg})(9.8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2})\left(\frac{2.50 \text{ m}}{2} \cos 65^\circ\right) - N_1[(2.50 \text{ m})\text{sen}65^\circ] &= 0 \\
 N_1 &= 34.27 \text{ N}
 \end{aligned}$$





Al sustituir N_1 en las primer ecuacion anterior, se tiene

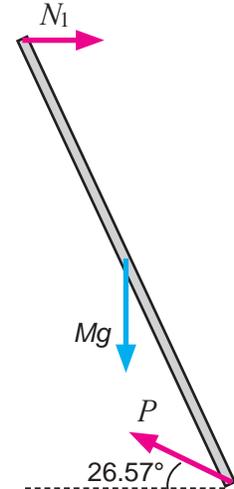
$$f_k = N_1 = 34.27 \text{ N}$$

La fuerza que ejerce la pared sobre la escalera es 34.27 N y la fuerza que ejerce el piso sobre la escalera es P de la cual conocemos sus componentes rectangulares f_k y N_2 , resultando que

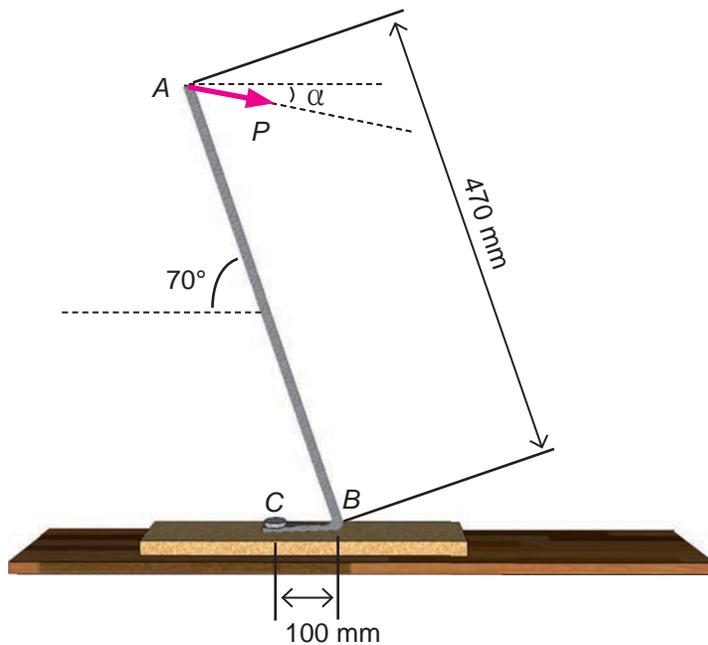
$$P = \sqrt{(f_k)^2 + (N_2)^2} = \sqrt{(34.27 \text{ N})^2 + (147 \text{ N})^2} = 151 \text{ N}$$

$$\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{N_2}{f_k}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{147 \text{ N}}{34.27 \text{ N}}\right) = 77^\circ$$

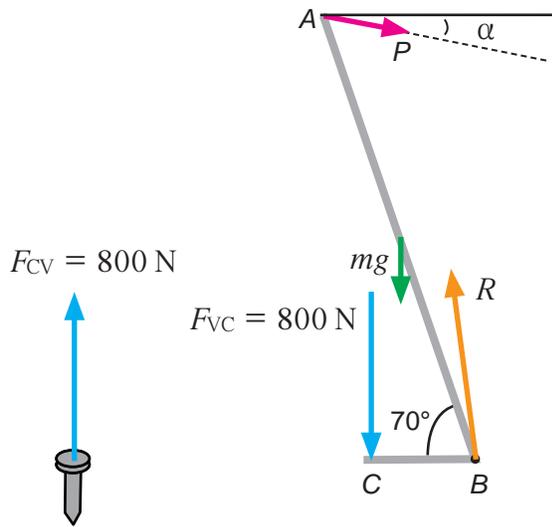
Representando la fuerza P en el diagrama de cuerpo libre



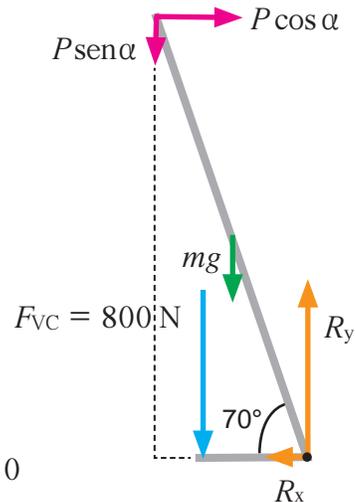
Ejemplo 1.18. Una varilla angular de 2 kg se usa como palanca. Se requiere una fuerza vertical de 800 N para sacar un clavo que está en C. Un instante antes de que el clavo comience a moverse, determine a) la magnitud de la fuerza P requerida si $\alpha = 10^\circ$ y b) la fuerza que la tabla ejerce sobre la varilla en el punto B.



a) La varilla debe ejercer una fuerza vertical $F_{CV} = 800 \text{ N}$ sobre el clavo hacia arriba para sacarlo. Esta fuerza es igual y opuesta a la fuerza $F_{VC} = 800 \text{ N}$ sobre la varilla ejercida por el clavo (3ª ley de Newton). El diagrama de cuerpo libre para la varilla incluye a la fuerza de gravedad mg sobre la varilla, la fuerza vertical F_{VC} de 800 N que ejerce el clavo, la fuerza P que se requiere aplicar en el punto A y la fuerza R que la tabla ejerce en B.



Las fuerzas P y R están inclinadas por lo que se reemplazan por sus componentes rectangulares $P \cos \alpha$, $P \text{sen} \alpha$ y R_x , R_y .



Al aplicar la primera condición de equilibrio

$$\begin{aligned}
 +\rightarrow \Sigma F_x &= 0 & +\uparrow \Sigma F_y &= 0 \\
 +P \cos \alpha - R_x &= 0 & +R_y - P \text{sen} \alpha - mg - F_{VC} &= 0
 \end{aligned}$$

En estas dos ecuaciones de la primera condición de equilibrio existen tres incógnitas: P , R_x , R_y . Se requiere aplicar la segunda condición de equilibrio para resolver este sistema. Se seleccionará el punto B para aplicar dicha segunda condición, pues las componentes R_x y R_y no tienen brazo de palanca respecto al punto B (sus líneas de acción pasan por el punto B) y no aparecerán estas dos incógnitas en la ecuación. Por otra parte, el brazo de palanca de la componente $P \text{sen} \alpha$ respecto al punto B es $470 \text{ mm} \cos 70^\circ = 160.75 \text{ mm}$ y el brazo de palanca de la componente $P \cos \alpha$ respecto a B es $470 \text{ mm} \text{sen} 70^\circ = 441.66 \text{ mm}$,

$$\curvearrow + \Sigma M_B = 0$$

$$+P \text{sen} \alpha (160.75 \text{ mm}) + F_{VC} (100 \text{ mm}) + mg \left(\frac{160.75 \text{ mm}}{2} \right) - P \cos \alpha (441.66 \text{ mm}) = 0$$

La única incógnita es P , que al despejar se tiene $P = 200 \text{ N}$

b) Fuerza R que la tabla ejerce sobre la varilla en el punto B . Las magnitudes de R_x y R_y se obtienen de las dos ecuaciones escalares para la primera condición de equilibrio

$$R_x = 197 \text{ N} \qquad R_y = 854.3 \text{ N}$$

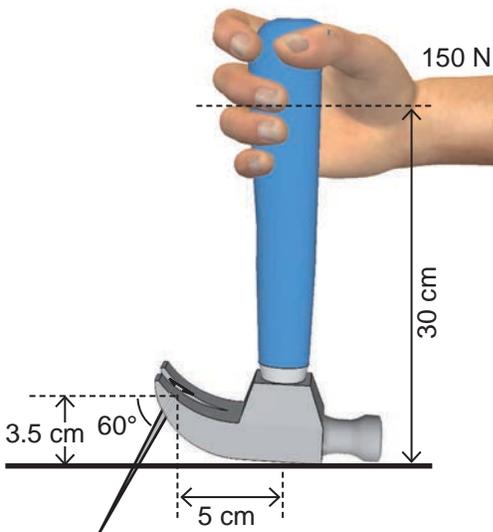
La magnitud y la dirección de R se calculan con

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = 877 \text{ N} \qquad \theta = \tan^{-1} \left(\frac{R_y}{R_x} \right) = 77^\circ$$

La magnitud de la fuerza P requerida es de 200 N con $\alpha = 10^\circ$ y la fuerza R que la tabla ejerce sobre la varilla en el punto B es de 877 N con $\theta = 77^\circ$.

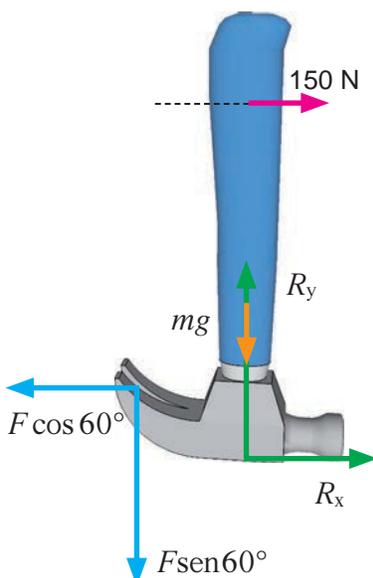


Ejemplo 1.19. En la figura, un martillo con garfios se usa para sacar un clavo de una tabla. Si la fuerza aplicada al mango es horizontal y de 150 N encuentre a) la fuerza que los garfios ejercen sobre la cabeza del clavo, considere que la fuerza es paralela al mango, b) la fuerza que experimenta el clavo en esa posición y c) la fuerza ejercida por la superficie de la tabla en el punto de contacto con el martillo.

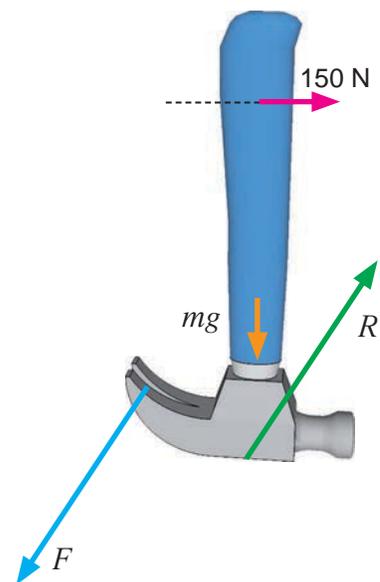


a) La fuerza que los garfios ejercen sobre la cabeza del clavo es de la misma magnitud y de sentido opuesto a la fuerza que la cabeza del clavo ejerce sobre los garfios (3ª ley de Newton). En el diagrama de cuerpo libre para el martillo se incluyen la fuerza de gravedad mg , la fuerza horizontal de 150 N que ejerce la mano, la fuerza F que la cabeza del clavo ejerce sobre los garfios y la fuerza R ejercida por la superficie de la tabla en el punto de contacto con el martillo.

Las fuerzas inclinadas F y R se reemplazan por sus componentes rectangulares $F_x = F \cos 60^\circ$, $F_y = F \sin 60^\circ$ y R_x , R_y . Al aplicar la primera condición de equilibrio,



$$\begin{aligned} +\rightarrow \Sigma F_x &= 0 \\ +R_x + 150 \text{ N} - F \cos 60^\circ &= 0 \\ +\uparrow \Sigma F_y &= 0 \\ +R_y - mg - F \sin 60^\circ &= 0 \end{aligned}$$



Estas dos ecuaciones incluyen tres incógnitas: F , R_x y R_y . Para aplicar la segunda condición de equilibrio se puede elegir el punto de contacto de la superficie con el martillo, pues las componentes R_x y R_y no tienen brazo de palanca respecto a dicho punto.

$$\curvearrowright \Sigma M_R = 0$$

$$F \cos 60^\circ (3.5 \text{ cm}) + F \sin 60^\circ (5 \text{ cm}) - 150 \text{ N} (30 \text{ cm}) = 0$$



La única incógnita es F , que al despejar se tiene

$$F = 740 \text{ N}$$

b) Fuerza R ejercida por la superficie de la tabla en el punto de contacto con el martillo. Las magnitudes de R_x y R_y se obtienen de las dos ecuaciones escalares para la primera condición de equilibrio

$$R_x = 220 \text{ N} \qquad R_y = 646 \text{ N}$$

La magnitud y la dirección de R se calculan con

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = 682 \text{ N} \qquad \theta = \tan^{-1}\left(\frac{R_y}{R_x}\right) = 71^\circ$$

La fuerza que los garfios ejercen sobre la cabeza del clavo es de 740 N pero de sentido opuesto al de F y la fuerza R ejercida por la superficie de la tabla en el punto de contacto con el martillo es de 682 N con $\theta = 71^\circ$.



Ejemplo 1.20. La armadura de techo está sostenida por una articulación en "A" y por un apoyo deslizante en "B". Las fuerzas ejercidas se muestran en el dibujo. Calcule las reacciones en "A" y en "B".

Al aplicar la primera condición de equilibrio a la barra, se tiene

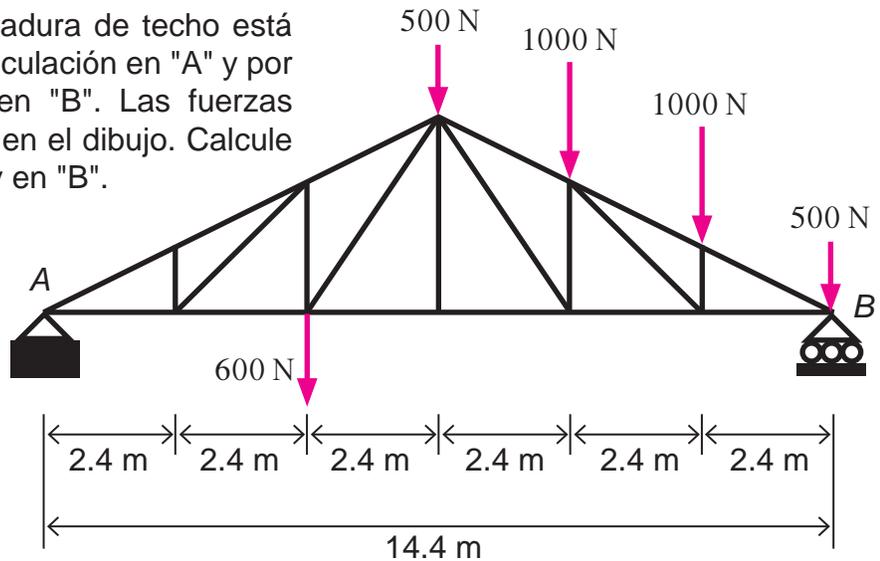
$$+\rightarrow \Sigma F_x = 0$$

$$R_{Ax} = 0$$

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0$$

$$R_{Ay} + R_{By} - 600 \text{ N} - 500 \text{ N} - 1000 \text{ N} - 1000 \text{ N} - 500 \text{ N} = 0$$

$$R_{Ay} + R_{By} - 3600 \text{ N} = 0$$



Al aplicar la segunda condición de equilibrio, respecto al punto B, se tiene

$$\curvearrow + \Sigma M_B = 0$$

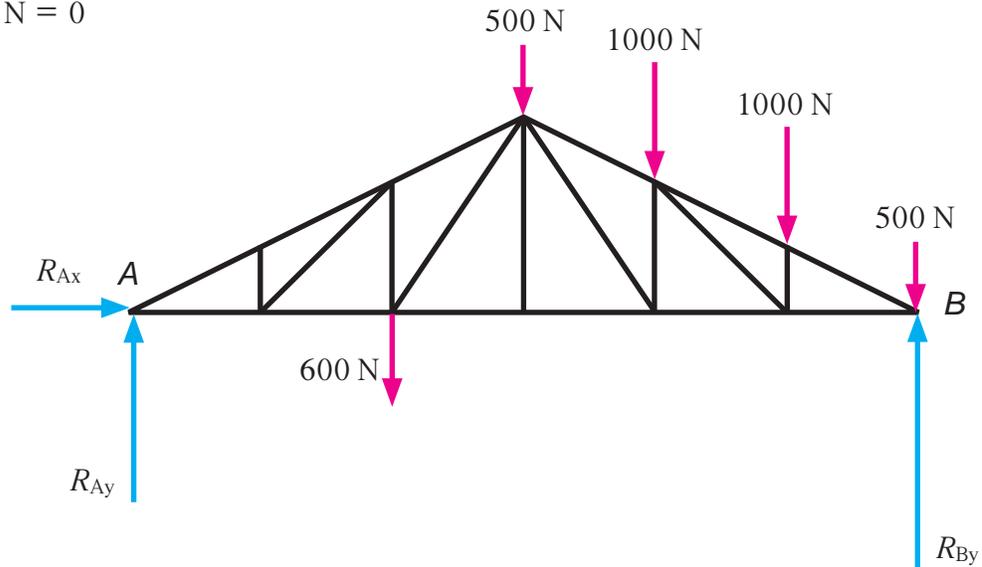
$$(1000 \text{ N})(2.4 \text{ m}) + (1000 \text{ N})(4.8 \text{ m}) + (500 \text{ N})(7.2 \text{ m}) + (600 \text{ N})(9.6 \text{ m}) - R_{Ay}(14.4 \text{ m}) = 0$$

$$R_{Ay} = 1150 \text{ N}$$

Al sustituir R_{Ay} en la segunda ecuación de la primera condición de equilibrio, se tiene

$$1150 \text{ N} + R_{By} - 3600 \text{ N} = 0$$

$$R_{By} = 2450 \text{ N}$$





1.3. Equilibrio estático y dinámico

Hasta ahora se ha visto las condiciones físicas que se deben cumplir para que un cuerpo rígido se encuentre en equilibrio: *Suma de fuerzas igual a cero y suma de momentos igual a cero.*

Sin embargo el hecho de que las fuerzas y los momentos sean cero no implica que el cuerpo esté en reposo de ahí que se puede hablar de equilibrio estático y dinámico.

El equilibrio estático de un cuerpo significa que se están dando las dos condiciones físicas y el cuerpo se encuentra en completo reposo. Mientras que un equilibrio dinámico de un cuerpo implica las dos condiciones dándose pero el cuerpo puede tener una velocidad lineal y/o angular constantes.

En este curso solo interesará tratar los casos de cuerpos en estado de equilibrio estático y/o dinámico.

1.3.1. Centro de masa y centro de gravedad

Con lo ya estudiado te habrás dado cuenta la importancia que tiene la definición del concepto de centro de masa. También en Mecánica II, referente a la conservación del momento lineal, tuviste la oportunidad de trabajar con el mismo concepto de centro de masa, ya que con ella se puede simplificar la solución de muchos problemas.

Como ya sabes el centro de masa tiene la propiedad de que se mueve tal como si las fuerzas externas ejercidas sobre el sistema estuviesen aplicadas en ese punto y toda la masa concentrada en él, por otro lado, la descripción general del movimiento del sólido es posible considerar este movimiento como una combinación de traslación del cuerpo como un todo (centro de masa) y de rotación alrededor de su centro de masa.



Fig. 1.14. Sistema formado por dos cuerpos en equilibrio estático y dinámico.





Hasta ahora todo está muy bien, sin embargo la pregunta natural que te puedes formular es ¿dado un cuerpo sólido, cómo se encuentra el centro de masa? De hecho de la propia definición de centro de masa es posible deducir, de manera analítica, la posición del centro de masa:

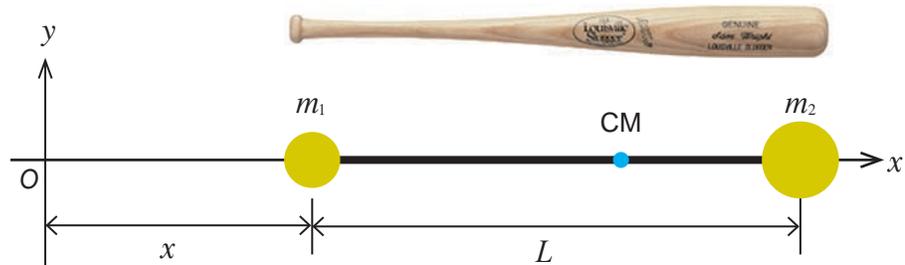
$$\vec{r}_{\text{cm}} = \frac{\sum m_i \vec{r}_i}{M}$$

Esta ecuación puede descomponerse en los tres ejes cartesianos X, Y y Z.

$$x_{\text{cm}} = \frac{\sum m_i x_i}{M} \qquad y_{\text{cm}} = \frac{\sum m_i y_i}{M} \qquad z_{\text{cm}} = \frac{\sum m_i z_i}{M}$$

Vamos a tratar uno de los ejemplos más sencillo:

Ejemplo 1.21. Suponga que nuestro bat se modela lo más simple posible como si fuera un bastón con una varilla de cierta longitud L y con dos masas en los extremos, una de ellas con masa m y la otra de masa $2m$. ¿Cuál es el centro de masa si se coloca de forma horizontal y a una cierta distancia x ? Desprecia la masa de la varilla. En la siguiente tabla describimos nuestro sistema:



m_i	x_i	$m_i x_i$
$m_1 = m$	$x_1 = x$	mx
$m_2 = 2m$	$x_2 = (L + x)$	$2m(L + x)$
$M = 3m$		$\sum m_i x_i = mx + 2m(L + x)$

Así que el centro de masa es

$$x_{\text{cm}} = \frac{\sum m_i x_i}{M} = \frac{mx + 2m(L + x)}{3m} = \frac{mx + 2mL + 2mx}{3m} = \frac{2mL + 3mx}{3m} = \frac{2}{3}L + x$$

Observe que el centro de masa se encuentra sobre la varilla a una distancia $L/3$ de la masa más grande y que no tiene componentes en y , ni en z .



De hecho un método muy simple para encontrar el centro de masa de cualquier cuerpo de forma irregular es colgarlo de dos puntos diferentes y en el punto de intersección se encuentra dicha propiedad (Fig. 1.15).

Cuelga de un hilo un alambre o varilla a la mitad y observa qué sucede.

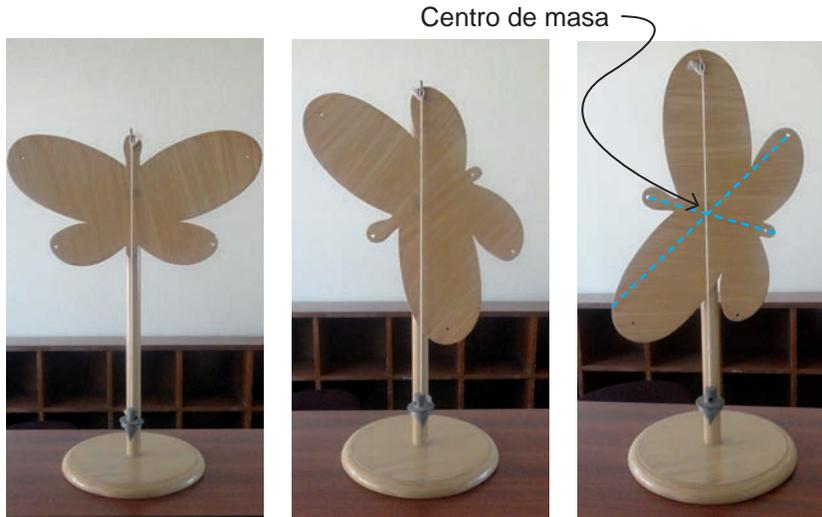


Fig. 1.15. Método sencillo para encontrar el centro de masa de un cuerpo plano de forma irregular.

Fácilmente puedes deducir que el centro de masa de una lámina rectangular o cuadrada, de un círculo o una esfera coincide con el centro geométrico de dichos sólidos cuando éstos consisten de masa uniforme o de un solo tipo de material (Fig. 1.16).

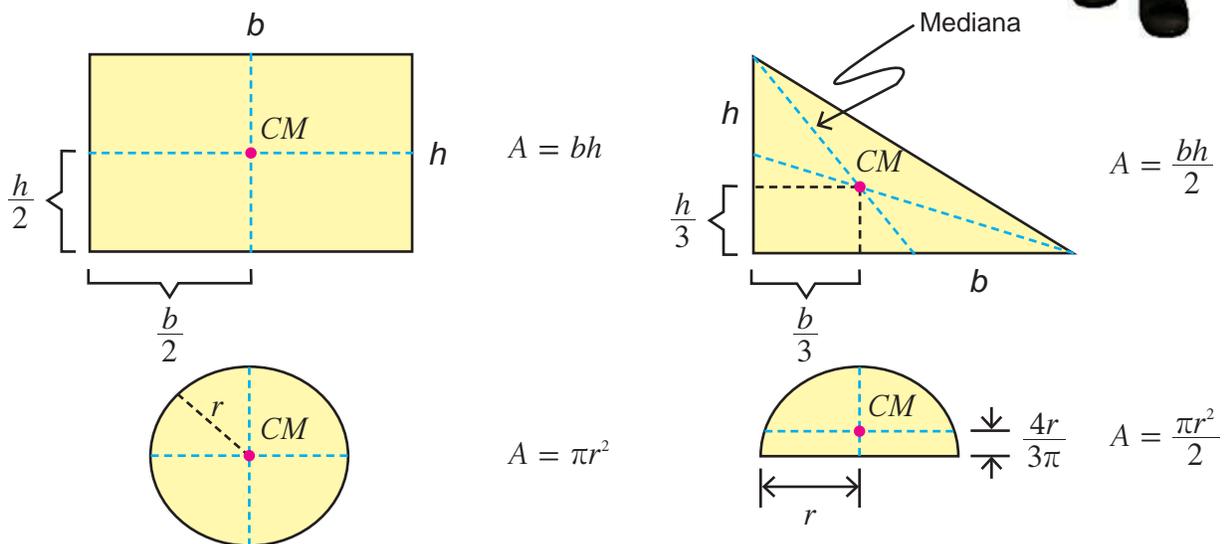


Fig. 1.16. En una figura plana, el centro geométrico o centroide se localiza sobre los ejes de simetría. Si un cuerpo es plano y homogéneo el centroide coincide con el centro de masa.



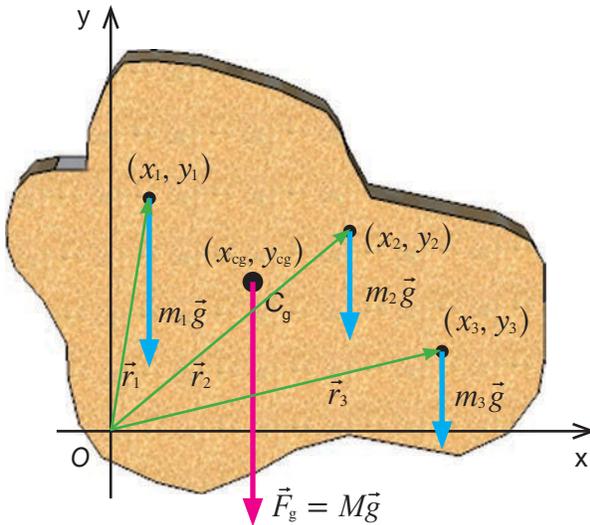


Fig. 1.17. El centro de gravedad del cuerpo rígido se localiza en el centro de masa si el valor de g es constante sobre todo el cuerpo.

Ahora hablemos acerca del centro de gravedad. En muchos problemas de equilibrio de los cuerpos una de las fuerzas que actúa es la fuerza de gravedad del objeto. La fuerza de gravedad como es bien sabido se distribuye a todo y a cada uno de las partes del cuerpo, como lo manifiesta la figura 1.17.

Al calcular el momento debido a la fuerza de gravedad, consideraremos la fuerza de gravedad total del cuerpo concentrado en un punto simple llamado *centro de gravedad* (C_g). El centro de gravedad de un cuerpo coincide con su centro de masa (C_m) si se encuentra en un campo gravitacional uniforme.

Considere la partícula de masa m_1 en la figura 1.17 cuya fuerza de gravedad y momento respecto de O son:

$$\vec{F}_{g1} = m_1 \vec{g}$$

$$\vec{M}_{O1} = \vec{r}_1 \times \vec{F}_{g1}$$

Hacemos el mismo procedimiento para cada una de las partículas que conforman al sólido, representado en la figura 1.17. Ahora sumado vectorialmente:

$$\vec{F}_g = m_1 \vec{g} + m_2 \vec{g} + m_3 \vec{g} + \dots$$

$$\vec{M}_O = \vec{r}_1 \times \vec{F}_{g1} + \vec{r}_2 \times \vec{F}_{g2} + \vec{r}_3 \times \vec{F}_{g3} + \dots$$

Desarrollando un poco más la expresión de los momentos:

$$\vec{M}_O = \vec{r}_1 \times m_1 \vec{g} + \vec{r}_2 \times m_2 \vec{g} + \vec{r}_3 \times m_3 \vec{g} + \dots$$

$$\vec{M}_O = \vec{r}_1 m_1 \times \vec{g} + \vec{r}_2 m_2 \times \vec{g} + \vec{r}_3 m_3 \times \vec{g} + \dots$$

$$\vec{M}_O = (m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2 + m_3 \vec{r}_3 + \dots) \times \vec{g}$$

Como $\sum m_i \vec{r}_i = M \vec{r}_{cm}$, al sustituir, se tiene que



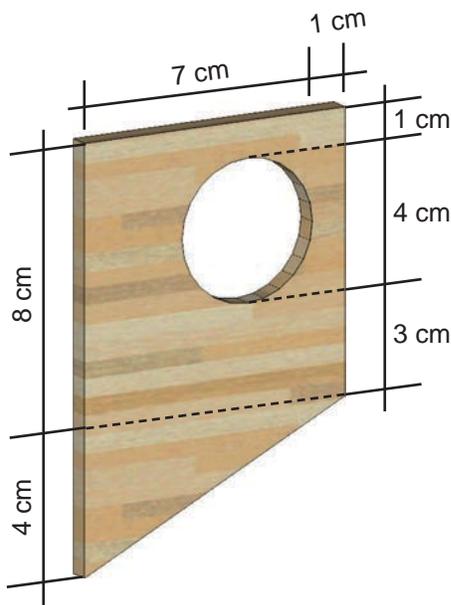
$$\vec{M}_O = M\vec{r}_{cm} \times \vec{g} = \vec{r}_{cm} \times M\vec{g}$$

Por lo tanto,

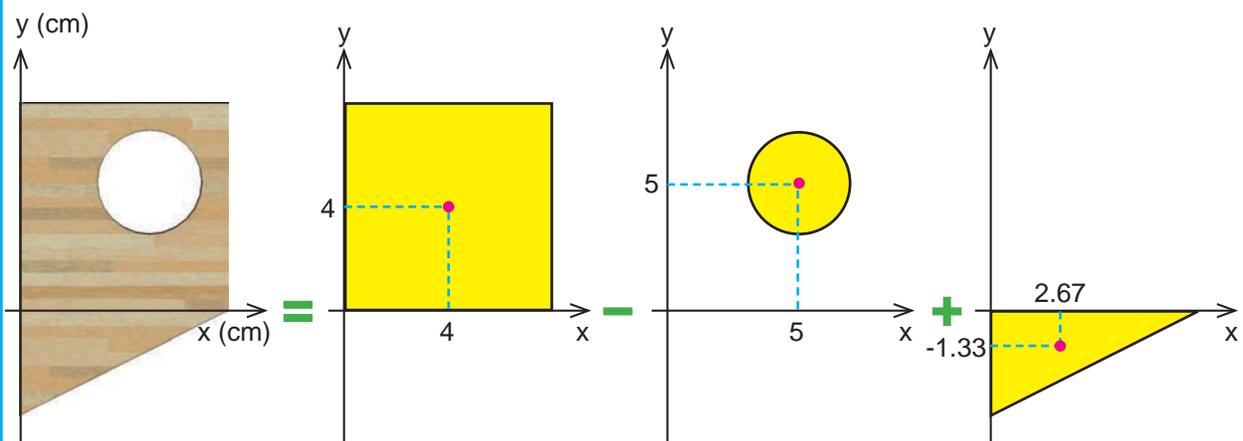
$$\vec{M}_O = \vec{r}_{cm} \times \vec{F}_g$$

Así pues, el momento total se obtiene como si el peso total actuara en la posición del centro de masa del cuerpo.

Ejemplo 1.22. Determina el centro de masa de la superficie que se muestra a continuación.



El área total del cuerpo se divide en figuras geométricas con áreas conocidas. Dependiendo donde coloquemos el origen de las coordenadas rectangulares, las coordenadas de sus centros de masa serán positivos o negativos según el cuadrante en el que se ubiquen, por otro lado, las áreas de los elementos sólidos se toman como positivas y las correspondientes a los huecos se consideran negativas.

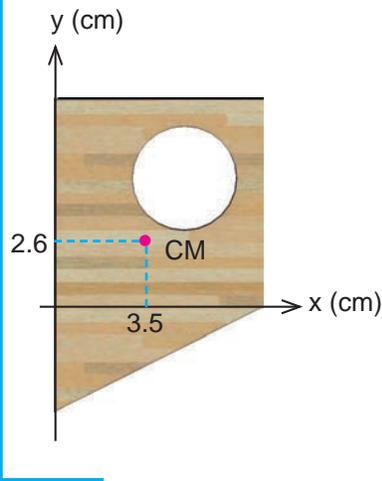




Componentes	Δa (cm ²)	x_{cm} (cm)	$x_{cm} \Delta a$ (cm ³)	y_{cm} (cm)	$y_{cm} \Delta a$ (cm ³)
Cuadrado	64	4	256	4	256
Orificio circular	-12.5	5	-62.8	5	-62.8
Triángulo	16	2.6	42.6	-1.3	-21.3
Σ	67.4		235.8		171.8

$$X_{CM} = \frac{\Sigma x_i \Delta a}{\Sigma \Delta a} = \frac{235.8 \text{ cm}^3}{67.4 \text{ cm}^2} = 3.5 \text{ cm}$$

$$Y_{CM} = \frac{\Sigma y_i \Delta a}{\Sigma \Delta a} = \frac{171.8 \text{ cm}^3}{67.4 \text{ cm}^2} = 2.6 \text{ cm}$$



El centro de masa de la figura no cambia aunque esta se gire o se cambie de posición.



Construye la figura en cartón o madera y equilíbrala en la punta de un lápiz.



1.4. Actividades de sistematización y consolidación

1.4.1. Sopa de letras con palabras clave del capítulo



Escribe cada palabra en Wik pedia o en Encarta y da un vistazo a lo que encuentres.



- | | |
|------------|---------------|
| Ángulo | Palanca |
| Brazo | Par |
| Cartesiano | Partícula |
| Centro | Perpendicular |
| Cuerpo | Plano |
| Dinámico | Principio |
| Equilibrio | Rígido |
| Estático | Rotación |
| Giro | Sistema |
| Gravedad | Traslación |
| Inestable | Trompo |
| Masa | |
| Momento | |

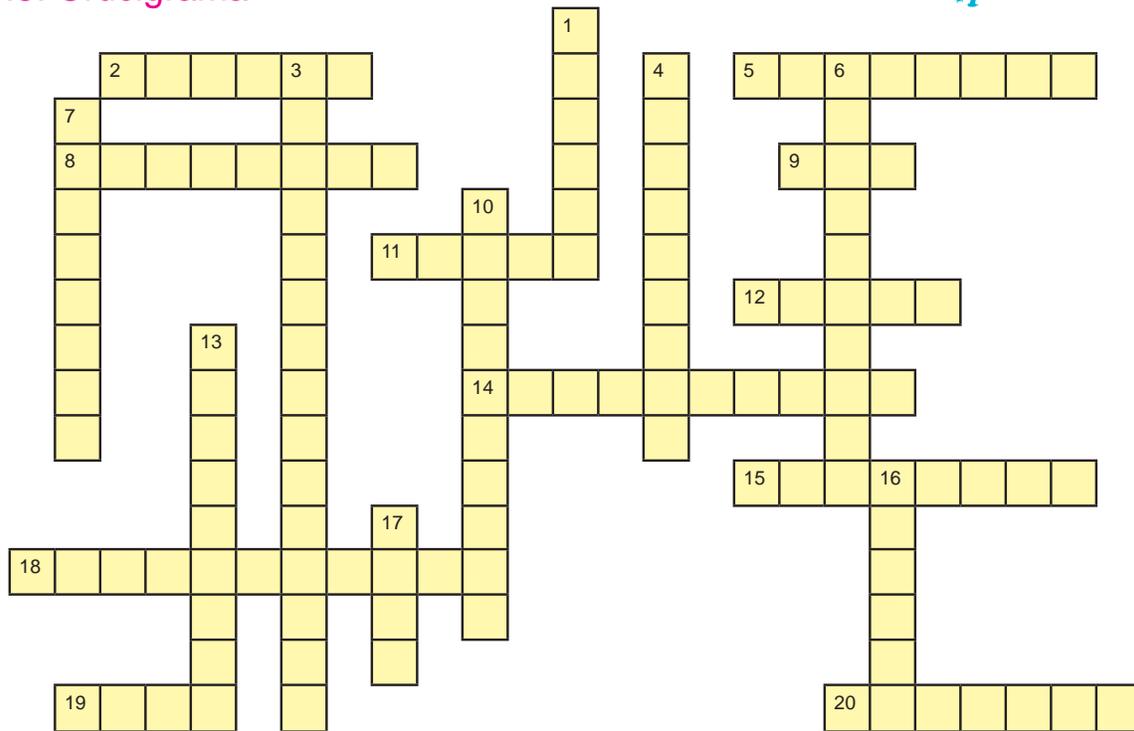


1.4.2. Conexión de conceptos e ideas

1. Es la condición que alcanza un cuerpo rígido cuando las fuerzas externas y sus momentos correspondientes se anulan.	<input type="checkbox"/> Ángulo.
2. Se refiere al movimiento de un cuerpo rígido como un todo o bien es el movimiento del centro de masa del cuerpo correspondiente.	<input type="checkbox"/> Brazo de palanca.
3. Es el movimiento, respecto a un eje, de una parte o del todo de un cuerpo rígido al recorrer un cierto ángulo.	<input type="checkbox"/> Centro de gravedad.
4. Es el sistema que se considera a la masa concentrada en un punto para despreciar los movimientos de rotación.	<input type="checkbox"/> Centro de masa.
5. Se le conoce así al producto de la fuerza por el brazo de palanca y su dirección es perpendicular al plano que forman la fuerza y el brazo de palanca.	<input type="checkbox"/> Dinámico.
6. Es la acción que se presenta a un sistema cuando dos fuerzas se aplican en diferentes puntos a cierta distancia uno del otro de un cuerpo con intensidad igual pero sentidos opuestos.	<input type="checkbox"/> Equilibrio inestable.
7. Se dice así a un cuerpo cuando está en reposo respecto a un sistema de referencia o se encuentra en movimiento rectilíneo uniforme.	<input type="checkbox"/> Equilibrio.
8. Cuando a un sistema se le considera las fuerzas involucradas en el análisis de su comportamiento desde el punto de vista del movimiento.	<input type="checkbox"/> Giro
9. Figura formada en un plano por dos líneas que parten de un mismo punto o, en el espacio, por dos superficies que parten de una misma línea.	<input type="checkbox"/> Momento.
10. Se le conoce como el sinónimo del Ley.	<input type="checkbox"/> Par.
11. Es el punto geométrico de un cuerpo rígido que dinámicamente se comporta como si estuviese sometido a la resultante de las fuerzas externas al sistema.	<input type="checkbox"/> Partícula.
12. Otra forma de decir rotación.	<input type="checkbox"/> Perpendicular.
13. Respecto a una línea recta, es la línea que forma un ángulo recto con la dada.	<input type="checkbox"/> Plano.
14. Se dice así a un sistema de un cuerpo rígido inmerso en un campo fuerza cuyo energía potencial se encuentra en el punto máximo.	<input type="checkbox"/> Principio.
15. Es la distancia perpendicular a la acción de una fuerza, ésta y la fuerza se encuentran en un mismo plano.	<input type="checkbox"/> Rotación.
16. Es un sistema de referencia respecto de un eje (recta), dos ejes (plano), o tres ejes (en el espacio), perpendiculares entre sí (plano y espacio), que se cortan en un punto llamado origen de coordenadas.	<input type="checkbox"/> Sistema cartesiano.
17. Es el sistema de puntos que se conforman cuando dos rectas perpendiculares se intersectan.	<input type="checkbox"/> Traslación.



1.4.3. Crucigrama



Horizontales

2. Es el juguete que enrollando la cuerda alrededor de él y se tira violentamente de uno de sus extremos a la vez que se lanza el conjunto contra el suelo y tiene capacidad de rotar.
5. Es el movimiento, respecto a un eje, de una parte o de todo de un cuerpo rígido al recorrer un cierto ángulo.
8. Es un rasgo característico de formas geométricas, sistema, ecuaciones, y otros objetos materiales o entidades abstractas, relacionada con su invariancia bajo ciertas transformaciones, movimientos o intercambios.
9. Es la acción que se presenta a un sistema cuando dos fuerzas se aplican en diferentes puntos a cierta dicatancia uno del otro de un cuerpo con intensidad igual pero sentidos opuestos.
11. Es el sistema de puntos que se conforman cuando dos rectas perpendiculares se intersectan.
12. Es la distancia perpendicular a la acción de una fuerza, ésta y la fuerza se encuentran en un mismo plano.
14. Es la condición que alcanza un cuerpo rígido cuando las fuerzas externas y sus momentos correspondientes se anulan.
15. Cuando a un sistema se le considera las causas en el análisis de su comportamiento desde el punto de vista del movimiento.
18. Es la propiedad que tiene los cuerpos por el solo hecho de poseer masa.
19. La fuerza que aparece como el producto de la masa de un cuerpo por la aceleración de la gravedad se le conoce como.
20. Se le conoce así al producto de la fuerza por el brazo de palanca y su dirección es perpendicular al plano que forman la fuerza y el brazo de palanca.

Verticales

1. Así se llama a un cuerpo cuando a un cuerpo se le considera la masa, el volumen y la forma, en general sus dimensiones en la descripción de su movimiento.
3. Dos líneas rectas que coinciden en un mismo punto y que forman un ángulo de 90° se dicen que son.
4. Es el sistema que se considera a la masa concentrada en un punto para despreciar los movimientos de rotación.
6. Se refiere al movimiento de un cuerpo rígido como un todo o bien es el movimiento del centro de masa del cuerpo correspondiente.
7. Se dice así a un cuerpo cuando está en reposo respecto a un sistema de referencia o se encuentra en movimiento rectilíneo uniforme.
10. Es un sistema de referencia respecto de un eje (recta), dos ejes (plano), o tres ejes (en el espacio), perpendiculares entre sí (plano y espacio), que se cortan en un punto llamado origen de coordenadas.
13. Se le conoce como Ley.
16. Es la conformación, en un plano, por dos líneas que parten de un mismo punto o, en el espacio, por dos superficies que parten de una misma línea.
17. Otra forma de decir rotación.



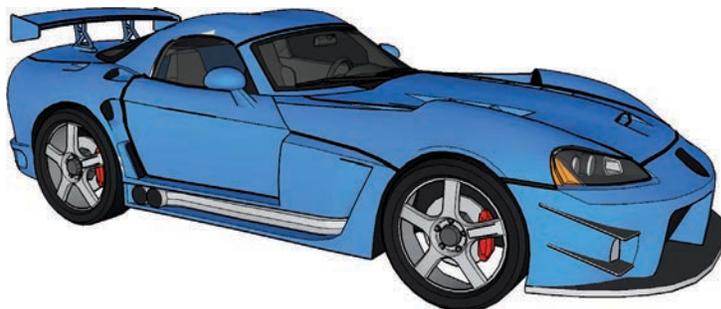
1.4.4. Actividades de repaso

1. Comenzando con el concepto “cuerpo rígido”, confecciona un diagrama que conecte y ramifique diversos conceptos estudiados en esta unidad. Como ayuda relacionamos algunos de ellos: equilibrio, estática, dinámica, etc.
2. Formula las preguntas clave a las que responde el contenido de este capítulo.
3. Menciona ejemplos de cuerpo rígido, cuerpo rígido en equilibrio de traslación, cuerpo rígido en equilibrio de rotación y cuerpo rígido en equilibrio de traslación y rotación simultáneamente.
4. Con tu celular toma fotos de sistemas de sólido rígido y arma un álbum. También puedes tomar fotos de estructuras que estén en equilibrio.

5. ¿Podría considerarse el agua de un estanque o piscina como un sólido rígido? Investiga en qué condiciones.
6. Observa la figura y describe todas las fuerzas que entran en juego para mantener el sistema (tabla-botella) en equilibrio de traslación y rotación de manera que no se caiga.



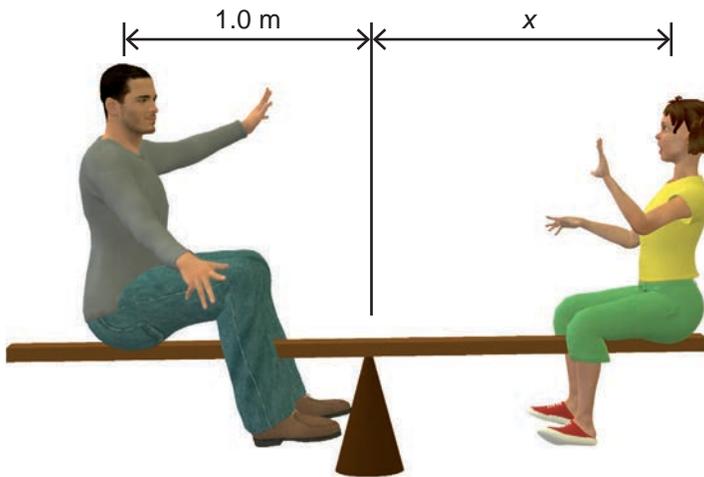
7. Argumenta por qué se aconseja ponerse en cunclillas en lugar de agacharse cuando se levanta algo tirado del suelo, para atarnos los zapatos o enjabonarnos los pies.
8. Un automóvil no es acelerado por fuerzas internas sino más bien por las fuerzas externas que actúan sobre él ¿entonces por qué el automóvil necesita de un motor?





1.4.5. Ejercicios de repaso

- Una tranca palanca uniforme de 40.0 N soporta a un padre y a su hija cuyos pesos son 800 N y 350 N, respectivamente, como se muestra en la figura. Si el soporte (llamado fulcro) se encuentra en el centro de gravedad de la tabla y el padre se encuentra a 1.0 m del centro. (a) Determine la magnitud de la fuerza dirigida hacia arriba desde el soporte. (b) Determine dónde debería sentarse la niña para que el sistema esté en equilibrio.



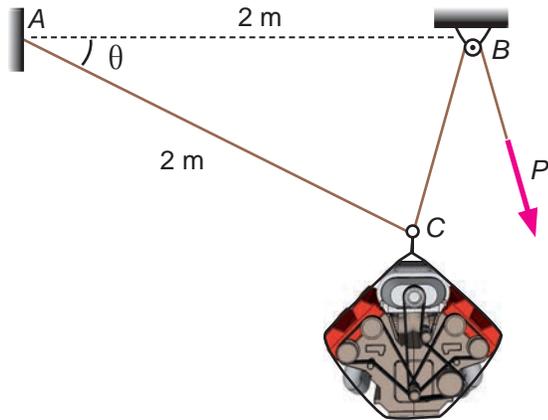
Respuesta: a) 1190 N, b) 2.29 m.

- ¿Qué fracción del peso de un avión a reacción ha de ser el empuje neto (empuje en tobera T menos resistencia del aire R) para que se eleve a velocidad constante formando un ángulo θ con la horizontal?



Respuesta: $-mg \text{ sen } \theta$





3. Determina la fuerza P necesaria para mantener el motor de 200 kg en la posición en la cual $\theta = 30^\circ$ y la tensión en la cuerda AC . El diámetro de la polea B es despreciable.

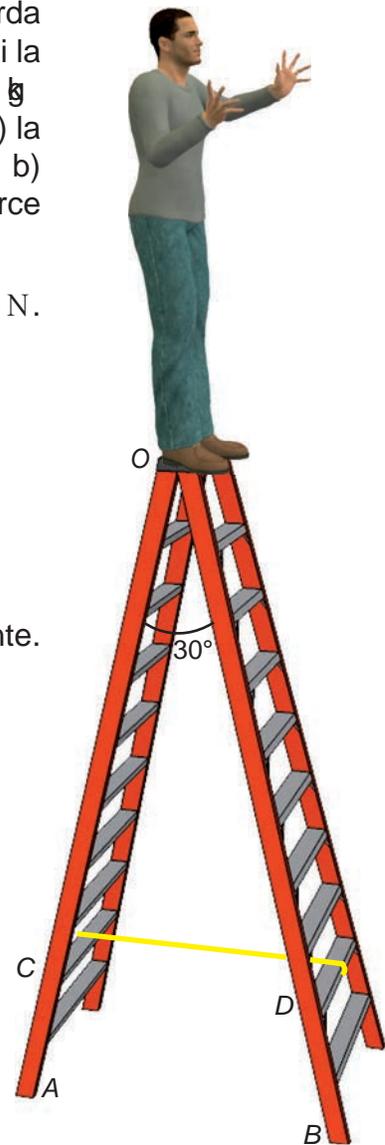
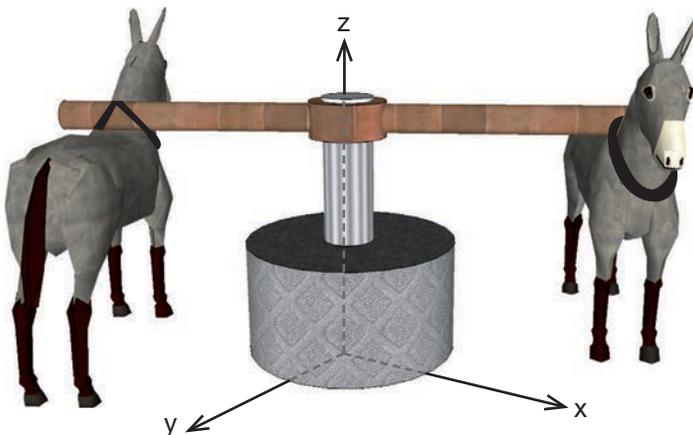
Respuesta: 2029 N $|75^\circ$ y 606.5 N $|150^\circ$.

4. Una escalera de tijera de 12 kg de masa está formada por dos brazos de 4 m de longitud, unidos por una cuerda horizontal, a 1 m del suelo y formando un ángulo de 30° . Si la escalera soporta, en su punto más alto, un cuerpo de 80 kg y el rozamiento con el suelo es despreciable. Determine a) la fuerza normal que el suelo ejerce sobre los puntos A y B , b) la tensión de la cuerda y c) la fuerza que cada brazo ejerce sobre el otro en el punto O en que están engarzados.

Respuesta: (a) 841.2 N , (b) -808.1 N y (c) 233.3 N .

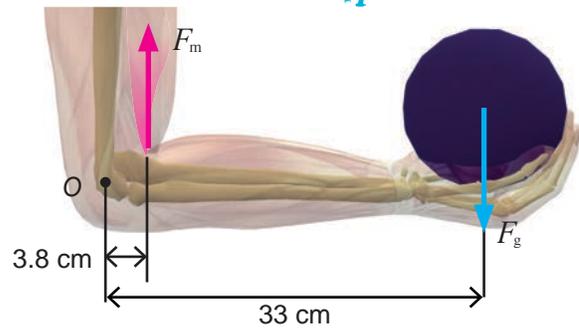
5. Dos burros mueven la muela de un molino, cada uno de ellos realiza una fuerza de 60 N . La longitud del atravesado a la que están enganchados es de 4 m . Uno de los burros se muere, ¿qué modificación se debe hacer en la instalación para que el molino funcione, haciendo trabajar al superviviente con una fuerza de 80 N ?

Respuesta: a 1.5 m se debe poner el sobreviviente.

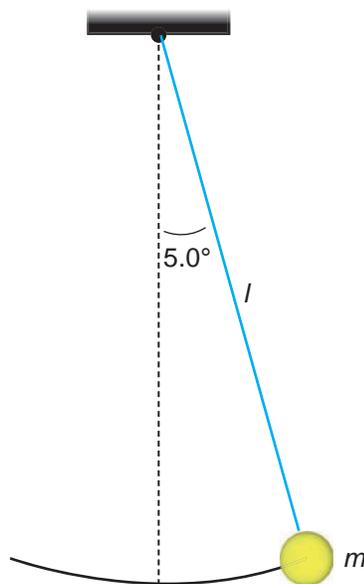




6. El antebrazo de la figura se encuentra, con respecto al brazo, a 90° y sostiene en la mano un peso de 68.6 N . Despreciando el peso del brazo a) determine el momento del peso alrededor de la articulación del codo (punto O), b) el momento alrededor de O producida por la fuerza F_m ejercida sobre el antebrazo por el bíceps, c) determine el módulo de F_m .



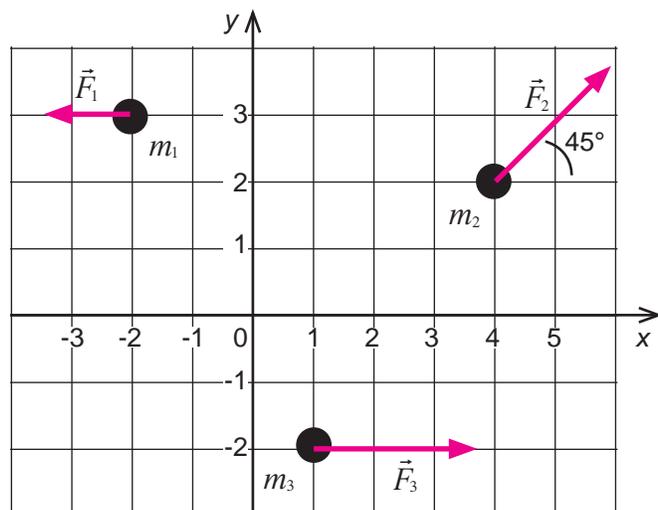
Respuesta: a) -22.64 Nm , b) $(0.038 \text{ m}) F_m$, c) 595.8 N .



7. Un péndulo simple se compone de una masa puntual de 3.0 kg el cual cuelga del extremo de un cordel ligero de 2.0 m de largo que está conectado a un punto llamado pivote. Calcula la magnitud del momento, debido a la fuerza de gravedad en torno al pivote cuando el cordel forma un ángulo de 5.0° con la vertical.

Respuesta: 5.12 Nm

8. La figura muestra un sistema de tres partículas, inicialmente en reposo, de masas $m_1 = 4.1 \text{ kg}$, $m_2 = 8.2 \text{ kg}$ y $m_3 = 4.1 \text{ kg}$. Las distintas fuerzas externas que actúan sobre las partículas se muestran, siendo $F_1 = 6 \text{ N}$, $F_2 = 12 \text{ N}$ y $F_3 = 14 \text{ N}$ con sus respectivas direcciones. Encuentre el centro de masa y su aceleración, la retícula está en metros.



Respuesta: $x_{cm} = 1.75 \text{ m}$, $a_{x_{cm}} = 1.0 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$, $y_{cm} = 1.25 \text{ m}$ y $a_{y_{cm}} = 0.5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.



9. ¿Qué tan lejos está el centro de masa del sistema Tierra-Luna del centro de la Tierra?



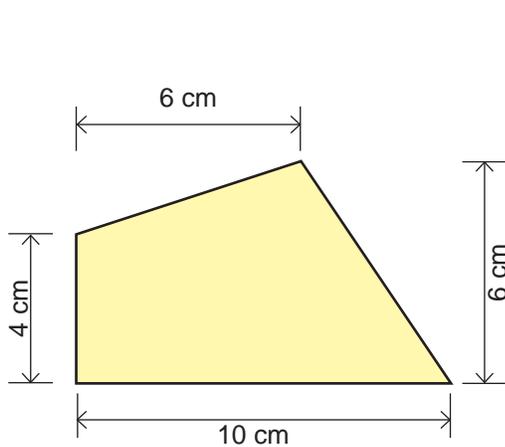
Respuesta: 4.64×10^6 m.

10. Un Chrysler con masa de 2210 kg se mueve a lo largo de un tramo recto de carretera a 105 km/h mientras es seguido por una Ford de 2080 kg de masa el cual se mueve a 43.5 km/h . ¿Qué velocidad tiene el centro de masa de los automóviles en movimiento?

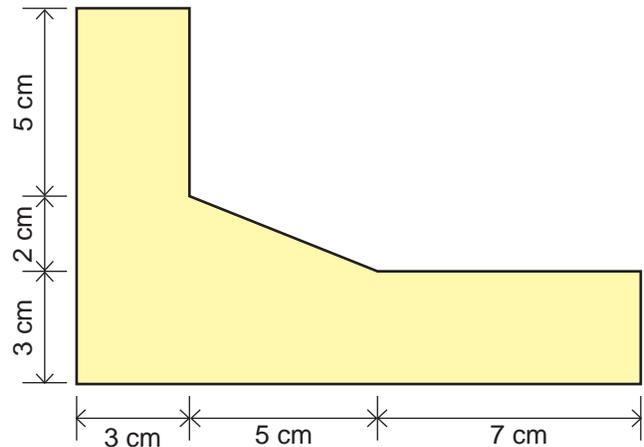


Respuesta: $75.2 \frac{\text{km}}{\text{h}}$.

11. Localiza el centro de masa de las siguientes figuras.



Respuesta: $X_{\text{cm}} = 5.5 \text{ cm}$
 $Y_{\text{cm}} = 2.4 \text{ cm}$

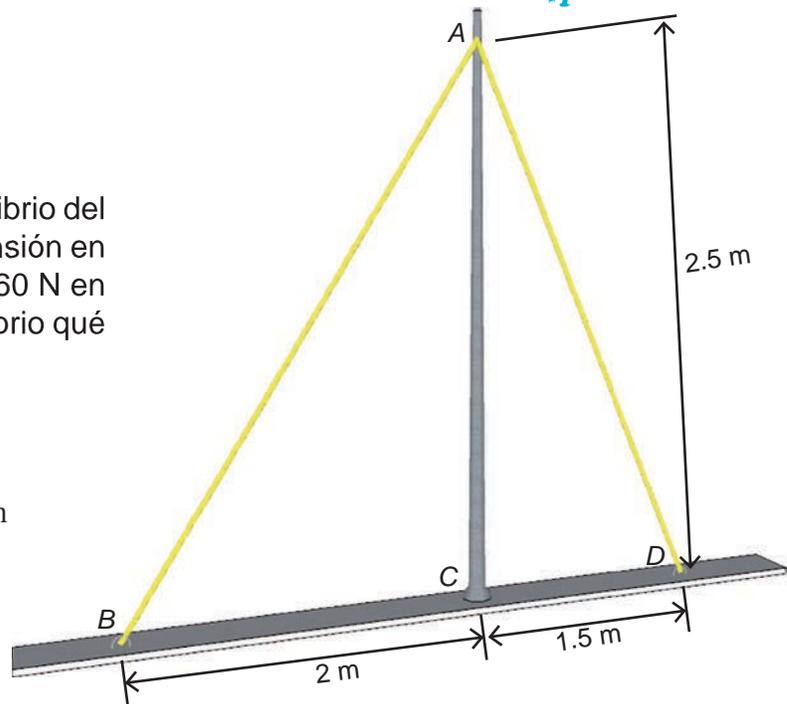


Respuesta: $X_{\text{cm}} = 3.4 \text{ cm}$
 $Y_{\text{cm}} = 1.3 \text{ cm}$

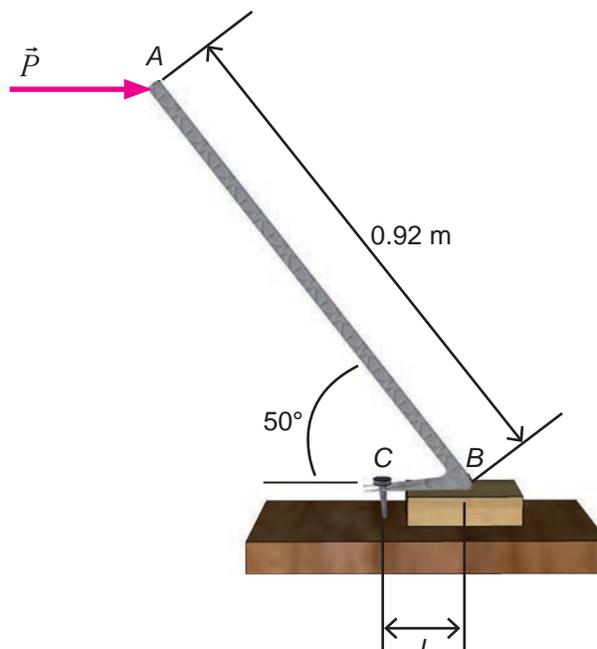


12. Determine el estado de equilibrio del poste AC. Se sabe que la tensión en el cable AB es de 500 N y 160 N en el AD. ¿En caso de no equilibrio qué necesita para estarlo?

Respuesta: -230 N
 527.9 N
 -573.84 Nm



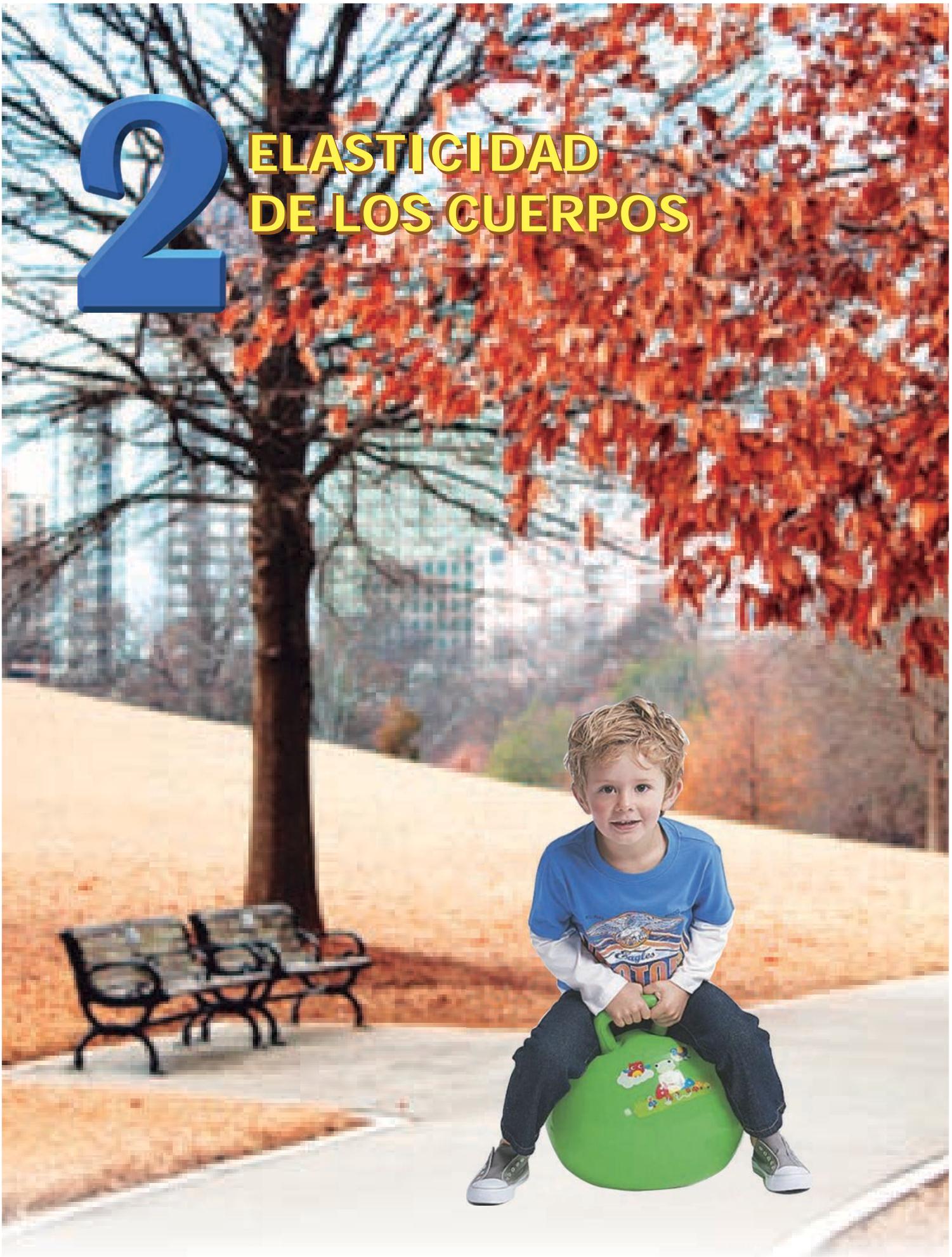
13. Para sacar un clavo, se coloca un pequeño bloque de madera debajo de un grifo y se aplica una fuerza horizontal P , como se muestra en la figura. Se sabe que $l = 8.9\text{ cm}$ y que $P = 133.45\text{ N}$, determine la fuerza vertical ejercida sobre el clavo y la reacción en B .

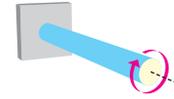


Respuesta: $F_{Cy} = 1057.1\text{ N}$
 $F_{Bx} = -133.45\text{ N}$
 $F_{By} = -1057.1\text{ N}$

2

ELASTICIDAD DE LOS CUERPOS





2.1. Cuerpos elásticos e inelásticos

Se ha presentado el concepto de sólido rígido como un modelo ideal de un cuerpo en el que la distancia entre dos de sus puntos permanece invariable, cualesquiera que sean las fuerzas que actúan sobre él. Sin embargo, la experiencia demuestra que un sólido siempre es *deformable* en mayor o menor medida. Este capítulo se dedica al estudio elemental de los sólidos considerados como deformables.

Si a un sólido en equilibrio se le aplica un sistema de fuerzas externas cuya fuerza resultante y momento de torsión resultante son nulos, $\Sigma \vec{F} = 0$, $\Sigma \vec{M}_o = 0$, el sólido no se trasladará ni girará, pero como no es rígido se deformará. Cuando el cuerpo sufre una *deformación* cambia su *forma* o su *tamaño* (o ambos) y aparecen fuerzas internas, tensiones o *fuerzas elásticas* que se oponen a esta deformación, esta propiedad de un material de oponerse a las deformaciones se llama *rigidez*.

La elasticidad trata el comportamiento de los cuerpos que tienen la propiedad de recuperar su tamaño y forma cuando desaparecen las fuerzas que producen las deformaciones. Si cuando cesan las fuerzas exteriores, las *deformaciones* producidas por dichas fuerzas *desaparecen*, se dice que los cuerpos son **elásticos**, por el contrario si las deformaciones no desaparecen se dice que son cuerpos inelásticos.

Se denomina **esfuerzo** a la *fuerza* que actúa *por* unidad de *superficie* en un sólido rígido que se deforma mediante separación, compresión o deslizamiento producidos por fuerzas externas.

Se llama **deformación** de un sólido al cambio en sus dimensiones y volumen que, como consecuencia, modifican su *forma*. La deformación se produce por variación de la temperatura o por las fuerzas externas que actúan sobre el sólido y se mide como el *cambio de forma* de un material cuando es sometido a un *esfuerzo*.

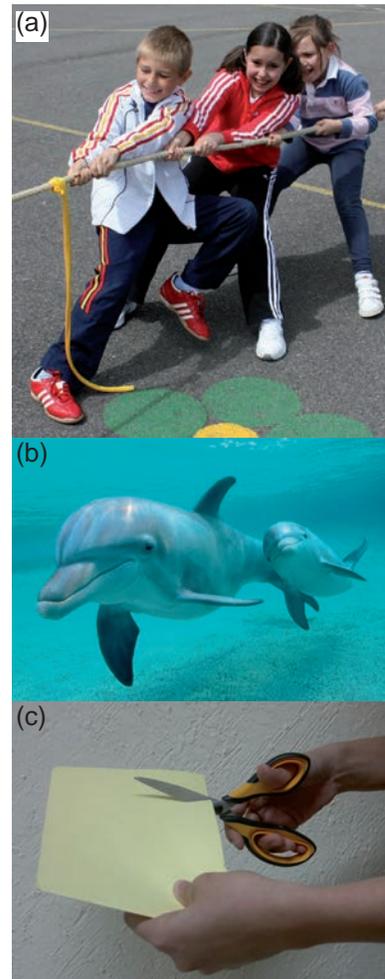


Fig. 2.1. (a) Un cable sometido a esfuerzo de tensión, estirado por fuerzas que actúan en sus extremos, (b) Delfín sometido a esfuerzo de volumen, aplastado por todos lados por fuerzas debidas a la presión del agua, (c) Papel sometido a esfuerzo de corte, siendo deformado y finalmente cortado por fuerzas ejercidas por las tijeras.





Fig. 2.2. La deformación implica un desplazamiento de las partículas que constituyen a un sólido.

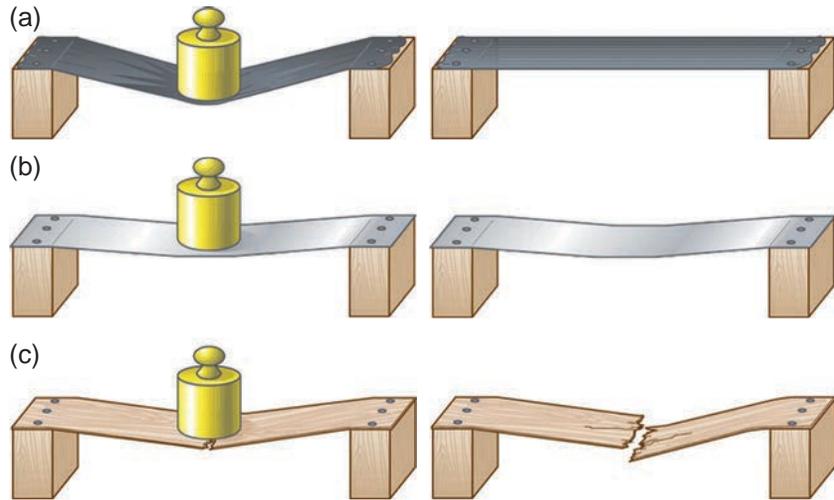
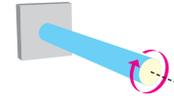


Fig. 2.3. La resistencia de un material está relacionada con la fuerza máxima que puede soportar antes de romperse. (a) Una banda *elástica* se deforma cuando se le aplica una fuerza, pero cuando se retira la fuerza, la banda recupera su forma original. (b) Una lámina delgada de aluminio se deforma ligeramente cuando se le aplica una fuerza, no obstante cuando se retira dicha fuerza, la lámina no recupera su forma inicial. (c) Una lámina fina de madera puede romperse si no soporta la fuerza aplicada.

2.2. Tipos de esfuerzos y de deformación en los sólidos

En el capítulo uno, se estudió el equilibrio de traslación y de rotación de los sólidos rígidos, y se utilizaron las ecuaciones de equilibrio para calcular las fuerzas y los momentos que actúan en los apoyos de una estructura. Aunque el cálculo de las fuerzas y momentos en los apoyos que garantizan el reposo es fundamental, éste es solo el primer paso en el proceso de análisis y diseño que en cada situación llevará a la selección del tipo de material, de la forma y de las dimensiones que harán que las estructuras sean seguras (que no se rompan) y funcionales (que no se *deformen* excesivamente afectando el servicio que prestan).

Se debe ser capaz de garantizar que las estructuras a construir no se deformen excesivamente y que no se fracturen. Para hacerlo, es necesario saber calcular las fuerzas internas que se generan en los elementos estructurales ya que son éstas las que producen las



deformaciones y la rotura. Por lo que en este capítulo se estudiarán los **esfuerzos** y las **deformaciones** que presentan los cuerpos cuando se encuentran bajo la acción de fuerzas y momentos externos.

Antes de estudiar los esfuerzos es conveniente recordar que un cilindro tiene un **eje longitudinal** de simetría. En la Figura 2.4a se muestra un cilindro cuyo eje longitudinal es vertical. La sección *perpendicular* al eje longitudinal se conoce como **sección transversal** (Fig. 2.4b). El área de la sección transversal de un cilindro es la de un círculo y se calcula como

$$A = \pi r^2 = \pi \left(\frac{D}{2}\right)^2 = \frac{\pi D^2}{4}$$

Por otra parte, el cilindro tiene una superficie curva a lo *largo* de su longitud que se conoce como **sección longitudinal** (Fig. 2.4b). Si se realiza un corte a lo largo del cilindro (Fig. 2.4c) y se despliega esta sección, se obtiene una lámina *rectangular* (Fig. 2.4d). El área de la sección longitudinal se calcula como perímetro de la base \times altura. La base es un círculo de perímetro πD y la altura es el largo L del cilindro. Así, el área de la sección longitudinal se calcula como

$$A = (\pi D)L = 2\pi RL$$

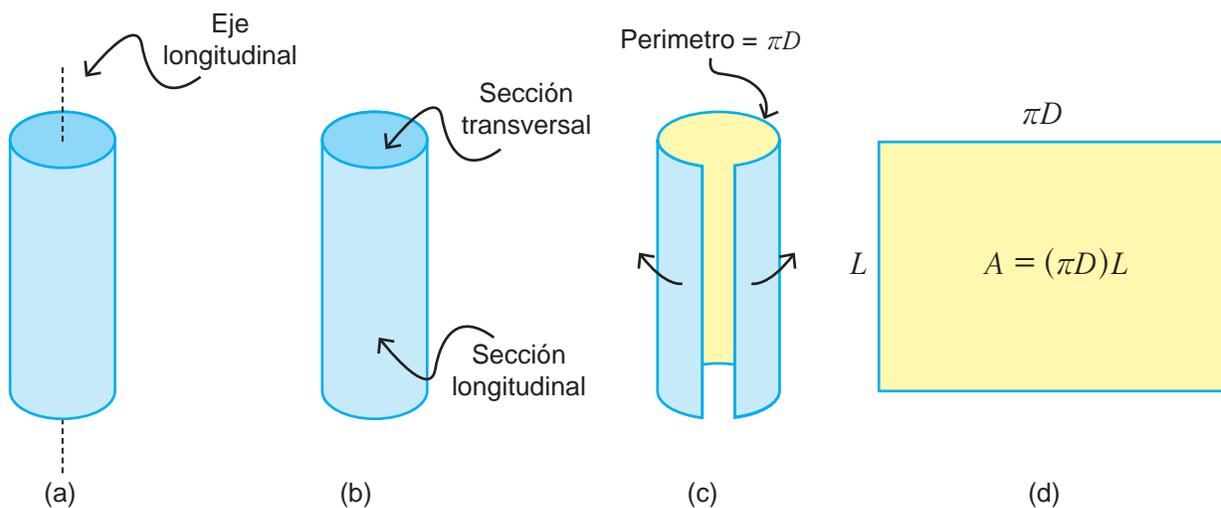


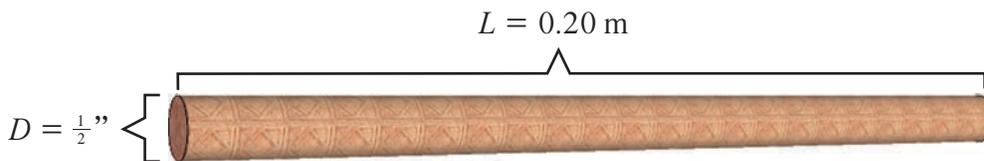
Fig. 2.4. Cilindro. (a) Eje longitudinal, (b) sección transversal (perpendicular al eje) y sección longitudinal (superficie curva a lo largo del cilindro), (c) corte de la sección longitudinal y (d) sección longitudinal desdoblada.





Además, es común expresar el diámetro de los elementos cilíndricos en pulgadas, lo que se acostumbra denotar con comillas. Por ejemplo, $\frac{1}{4}$ de pulgada se expresa $\frac{1}{4}$ ". Se debe de recordar que 1 pulgada = 2.54 cm.

Ejemplo 2.1. Calcula el área transversal y el área longitudinal de una barra cilíndrica de $\frac{1}{2}$ " de diámetro y 0.20 m de largo.



Se proporciona el diámetro $D = 0.5 \text{ pulg}$ y la longitud $L = 0.20 \text{ m}$ del cilindro. El área transversal es el área de un círculo y se calcula con la ecuación $A = \pi D^2/4$. El área longitudinal es el área de la superficie curva a lo largo del cilindro y se calcula con la ecuación $A = \pi DL$. El diámetro en pulgadas se convierte a metros ($1'' = 2.54 \text{ cm}$).

$$D = (0.5 \text{ pulg}) \left(\frac{0.0254 \text{ m}}{1 \text{ pulg}} \right) = 0.0127 \text{ m}$$

El área transversal es

$$A = \frac{\pi D^2}{4} = \frac{\pi (0.0127 \text{ m})^2}{4} = 1.267 \times 10^{-4} \text{ m}^2$$

El área longitudinal es

$$A = \pi DL = \pi (0.0127 \text{ m})(0.20 \text{ m}) = 7.98 \times 10^{-3} \text{ m}^2$$

Para esta barra, el área longitudinal es 62.9 veces mayor que el área transversal.

Los esfuerzos dependen de la forma como estén aplicadas las fuerzas. Los esfuerzos se refieren a las fuerzas que actúan sobre un *área*. Las fuerzas pueden ser *perpendiculares* o *paralelas* al área sobre la que actúan, lo que origina esfuerzos *normales* o esfuerzos *cortantes*.

(a)



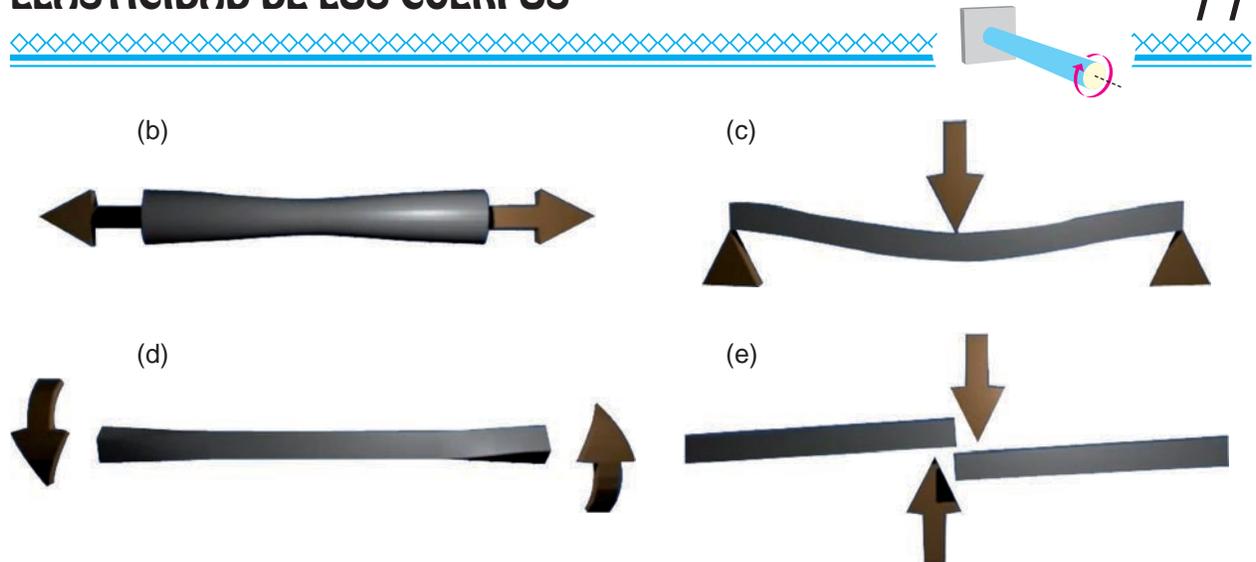


Fig. 2.5. Las fuerzas pueden ser perpendiculares o paralelas al área sobre la que actúan. (a) Fuerzas perpendiculares al área transversal, esfuerzo normal de compresión. (b) Fuerzas perpendiculares al área transversal, esfuerzo normal de tensión. (c) Fuerzas perpendiculares al área longitudinal, esfuerzo de flexión. (d) Momentos producidos por pares de fuerzas paralelas al área longitudinal, esfuerzo de torsión. (e) Fuerzas paralelas al área transversal, esfuerzo de corte.

Dependiendo de la forma cómo actúen las fuerzas externas, entonces los esfuerzos y deformaciones producidos pueden ser: **normales, por flexión, por torsión o de corte.**

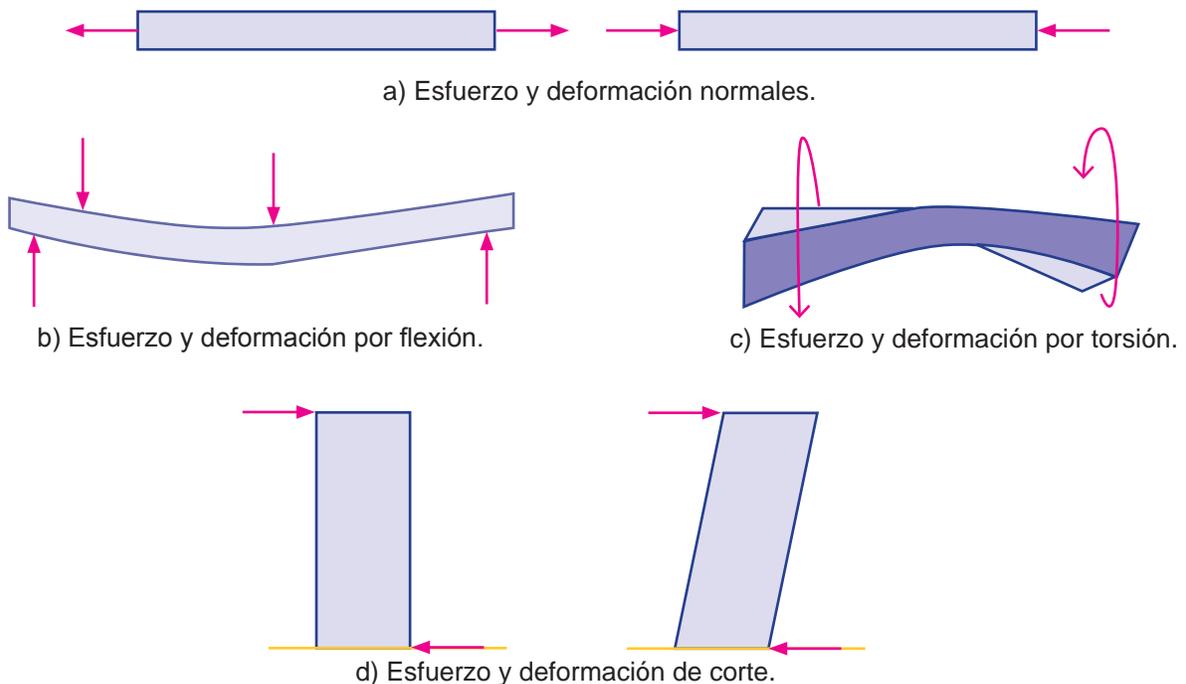


Fig. 2.6. (a) Fuerzas perpendiculares al área transversal. (b) Fuerzas perpendiculares al área longitudinal. (c) Momentos generados por pares de fuerzas paralelas al área longitudinal. (d) fuerzas paralelas al área transversal.



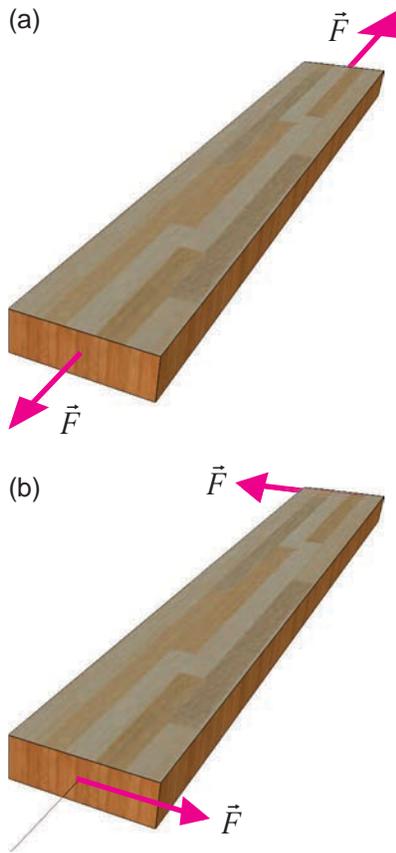


Fig. 2.7. (a) Esfuerzo normal y (b) esfuerzo de corte.

Cuando la fuerza y el área son **perpendiculares** (Fig. 2.7a) se dice que el esfuerzo es **normal**. Cuando la fuerza y el área son **paralelas** (Fig. 2.7b) se dice que el esfuerzo es **cortante** (o tangencial).

2.3. Esfuerzo normal y deformación normal

Una **barra** es un miembro estructural recto con sección transversal constante en toda su longitud. Los conceptos fundamentales de *esfuerzo* y *deformación* pueden ejemplificarse si se considera una barra en forma de prisma (o barra prismática) a la que se le aplican en los extremos fuerzas perpendiculares al área transversal, como se muestra en la Figura 2.8. En este ejemplo, las fuerzas producen un *alargamiento* de la barra, por lo que se dice que se encuentra en **tensión**.

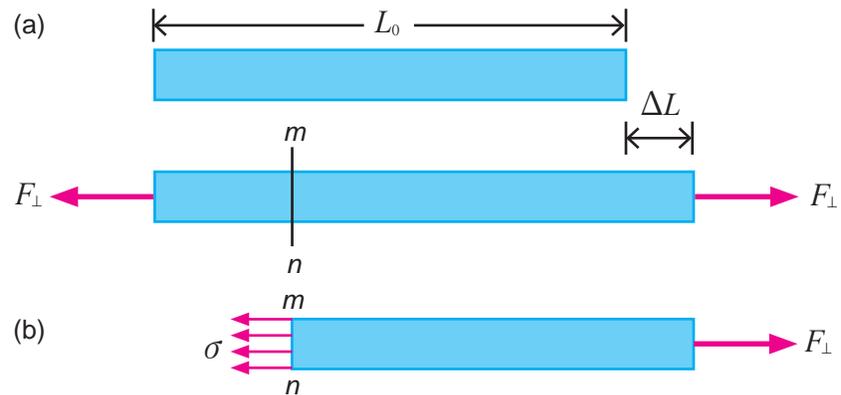


Fig. 2.8. (a) Barra de longitud inicial L_0 sujeta a tensión, causando que el elemento sufra un alargamiento ΔL . (b) Al separar la parte derecha con un plano imaginario $m n$, se evidencia que sobre su extremo izquierdo existen fuerzas internas que permiten mantener el equilibrio. A la intensidad de estas fuerzas por unidad de área transversal se le denomina esfuerzo normal.

Para analizar los esfuerzos internos de la barra originados por las fuerzas, se requiere efectuar un corte imaginario en la sección $m n$ (Fig. 2.8a). Se separa la porción de la barra a la derecha del corte como un cuerpo libre (Fig. 2.8b). La fuerza de tensión F_{\perp} actúa sobre el extremo derecho del cuerpo libre; en el otro extremo existen fuerzas que representan la acción de la parte izquierda de la barra sobre la parte aislada restante. La intensidad de la fuerza por unidad de área se denomina **esfuerzo normal** y se

denota comúnmente por la letra griega σ (sigma).

$$\sigma = \frac{F_{\perp}}{A}$$

Cuando la barra se tensa por las fuerzas F_{\perp} , como lo muestra la figura 2.8, los esfuerzos resultantes se denominan **esfuerzos de tensión** (alargamiento). Si el sentido de las fuerzas se invierte, lo que ocasiona que la barra se comprima, se originan **esfuerzos de compresión**. Dado que el esfuerzo σ actúa en dirección *perpendicular* al superficie, se le conoce como **esfuerzo normal**. Por tanto, los esfuerzos normales pueden ser esfuerzos de tensión o de compresión.

Cuando se requieren **signos convencionales** para esfuerzos normales, se acostumbra definir como positivos los esfuerzos de tensión y como negativos los esfuerzos de compresión.

Dado que el esfuerzo normal σ se determina al dividir la fuerza entre el área de la sección transversal, tiene unidades de fuerza por unidad de área. Cuando se emplean unidades del SI, la fuerza se expresa en newton (N) y el área en metro cuadrado (m^2). Por tanto, el esfuerzo normal estará dado en unidades de newton por metro cuadrado (N/m^2), o pascal (Pa). Sin embargo, el pascal es una unidad de esfuerzo tan pequeña que es necesario operar con múltiplos de pascal.

Tabla 2.1. Múltiplos del pascal (Pa) en el Sistema Internacional.

Valor	Símbolo	Nombre
10^3 Pa	kPa	kilopascal
10^6 Pa	MPa	megapascal
10^9 Pa	GPa	gigapascal

A fin de que la ecuación $\sigma = F_{\perp} / A$ sea válida, el esfuerzo σ debe estar distribuido uniformemente sobre la sección transversal de la barra. Esta condición se cumple, entonces la fuerza F_{\perp} se puede representar aplicada en el centroide del área de la sección transversal.

Una barra sobre la que se ejerce una fuerza a lo largo del eje sufre una variación en longitud: se alarga si está a tensión y

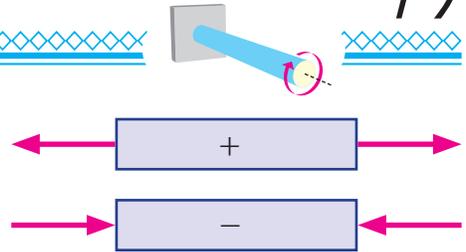


Fig. 2.9. Convencionalmente se considerarán positivos los esfuerzos de tensión y negativos los esfuerzos de compresión.



se acorta si está a compresión. La *deformación* o variación total en longitud se denota por ΔL y se muestra en la Figura 2.8a para una barra sujeta a tensión. Este alargamiento constituye el resultado acumulativo del estiramiento del material sobre la longitud inicial L_0 de la barra. Si se considera la mitad de la barra ($L_0/2$), esta última sufrirá un alargamiento igual a $\Delta L/2$; asimismo, si la longitud inicial de la barra es L_0 y la deformación o alargamiento total de la barra es ΔL , sufrirá un alargamiento por unidad de longitud igual a $\Delta L/L_0$. De esta forma, se llega al concepto de deformación por unidad de longitud, o **deformación unitaria normal**, denotada por la letra griega ε (épsilon) y determinada por la ecuación

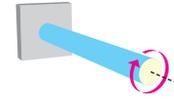
$$\varepsilon = \frac{\Delta L}{L_0}$$

Donde se debe hacer la distinción entre la deformación ΔL y la deformación unitaria ε . Además, la deformación $\Delta L = L - L_0$ es la diferencia entre la longitud final L de la barra después de ser deformada y la longitud inicial L_0 de la barra antes de la deformación.

Si la barra está sujeta a tensión, la deformación unitaria se denomina **deformación unitaria a tensión** y representa un alargamiento relativo del material. Si la barra está sujeta a compresión, la deformación corresponde a una **deformación unitaria a compresión** y la barra se acorta. La deformación unitaria a tensión se toma como positiva y la deformación unitaria a compresión como negativa.

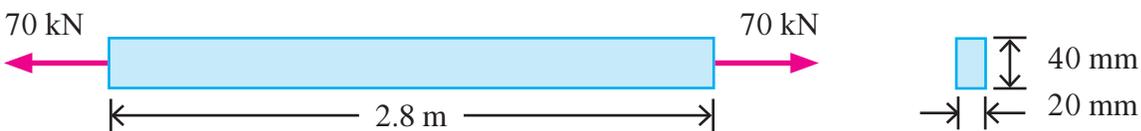
Debido a que la deformación unitaria normal ε es el cociente de dos longitudes, constituye una cantidad adimensional; esto es, no posee unidades. Por ello, la deformación unitaria se expresa como número absoluto, independiente de cualquier sistema de unidades.

Las definiciones de los esfuerzos normales y deformaciones unitarias normales se basan únicamente en consideraciones estáticas y geométricas, por lo que las ecuaciones de esfuerzo normal $\sigma = F_1/A$ y de deformación unitaria normal $\varepsilon = \Delta L/L_0$ pueden utilizarse para fuerzas de cualquier magnitud y para cualquier material. El requerimiento



principal es que la deformación de la barra sea uniforme, lo cual a su vez requiere que la barra sea prismática, que las fuerzas estén uniformemente distribuidas en las secciones transversales y que el material sea homogéneo, esto es, el mismo en todas las partes de la barra.

Ejemplo 2.2. Una barra con sección transversal de $20 \text{ mm} \times 40 \text{ mm}$ y longitud $L_0 = 2.8 \text{ m}$ está sometida a una fuerza de tensión de 70 kN . El alargamiento medio de la barra es $\Delta L = 1.22 \text{ mm}$. Calcular el esfuerzo normal de tensión y la deformación unitaria normal de la barra.



El esfuerzo de tensión σ se obtiene con la ecuación de esfuerzo normal $\sigma = F_{\perp}/A$, donde la fuerza de tensión es $F_{\perp} = 70 \text{ kN} = 70\,000 \text{ N}$ y el área de la sección transversal es $A = (20 \times 10^{-3} \text{ m})(40 \times 10^{-3} \text{ m}) = 8 \times 10^{-4} \text{ m}^2$. La deformación unitaria normal ε se calcula con la ecuación $\varepsilon = \Delta L / L_0$ donde la deformación (total) es el alargamiento de la barra $\Delta L = 1.22 \times 10^{-3} \text{ m}$ y la longitud inicial de la barra es $L_0 = 2.8 \text{ m}$.

El esfuerzo normal de tensión es

$$\sigma = \frac{F_{\perp}}{A} = \frac{70\,000 \text{ N}}{8 \times 10^{-4} \text{ m}^2} = 87\,500\,000 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} = 87.5 \text{ MPa}$$

La deformación unitaria normal es

$$\varepsilon = \frac{\Delta L}{L_0} = \frac{1.22 \times 10^{-3} \text{ m}}{2.8 \text{ m}} = 4.36 \times 10^{-4}$$

Las magnitudes σ y ε representan el esfuerzo normal a tensión y la deformación unitaria normal, respectivamente, en la dirección longitudinal de la barra. La barra está sujeta a una fuerza de tensión de $87.5 \times 10^6 \text{ N}$ por cada metro cuadrado de sección transversal y se alarga $4.36 \times 10^{-4} \text{ m}$ ($= 0.436 \text{ mm}$) por cada metro de largo de la barra.

En el siglo diecisiete (1658), Robert Hooke publicó un artículo en el que estableció que el esfuerzo era directamente proporcional a la deformación unitaria. Este hecho se conoce como Ley de Hooke. Matemáticamente puede expresarse como $\sigma \propto \varepsilon$, que significa, por ejemplo, que si una barra está sujeta a una fuerza de tensión de 100 N , se alargará una cierta cantidad y si la fuerza se incrementa a 200 N , el alargamiento se duplicará.





Thomas Young (1773 –1829). Realizó estudios de materiales proponiendo una medida de la rigidez de diferentes materiales conocida en la actualidad como módulo de Young.

Tabla 2.2. Módulo de elasticidad E

Material	E (GPa)
Diamante	1000
Níquel	214
Acero	200
Hierro	100
Cobre	120
Titanio	116
Oro	82
Plata	76
Aluminio	70

Esta proporción puede convertirse en una ecuación introduciendo una constante de proporcionalidad. Esta constante de proporcionalidad fue calculada para diversos materiales a principios del siglo diecinueve (1802) por Thomas Young, un científico inglés. Se conoce como el **módulo de elasticidad**, o **módulo de Young** (E). Cuando un material se comporta elásticamente y también presenta una relación lineal entre el esfuerzo y la deformación, se dice que es **linealmente elástico**. La elasticidad lineal es una propiedad de muchos materiales sólidos, incluso metales, madera, concreto, plástico y cerámicas.

Al incluir el módulo de elasticidad, la Ley de Hooke , $\sigma \propto \varepsilon$ se convierte en una ecuación importante y útil, que se expresa como

$$\sigma = E\varepsilon$$

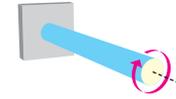
Las unidades del módulo de elasticidad E son las mismas que las unidades de esfuerzo, ya que la deformación unitaria es adimensional. Por tanto, las unidades de E son Pascal (o sus múltiplos, como GPa) en el Sistema Internacional.

La ley de Hooke $\sigma = E\varepsilon$ se aplica a tensión y compresión. Para fines de cálculo, los esfuerzos y deformaciones a tensión se consideran como positivos, y los esfuerzos y deformaciones a compresión como negativos.

El módulo de elasticidad E tiene valores relativamente grandes para materiales que son muy rígidos, tales como los metales estructurales. Algunos valores representativos de E se indican en la Tabla 2.2. Para muchos materiales, el valor de E en compresión es el mismo que en tensión.

En un gráfico de esfuerzo (eje y) contra deformación unitaria (eje x), el módulo de elasticidad o módulo de Young está representado por la pendiente del gráfico en la región linealmente elástica y su valor depende del material particular que se utilice.

La Figura 2.10 muestra un gráfico de esfuerzo de tensión contra deformación unitaria para una varilla metálica típica. El gráfico es una recta hasta el punto llamado



límite proporcional. Más allá de este punto, la deformación aumenta con más rapidez hasta llegar a otro punto crítico llamado límite de elasticidad. Si la tensión se elimina en este punto, el material recuperará su longitud original, al regresar en el gráfico por la misma trayectoria. Si se aumenta la tensión más allá del límite de elasticidad y luego la fuerza de tensión se retira, el material se recuperará hasta cierto punto, pero no recuperará su longitud inicial, habrá cierta deformación permanente.

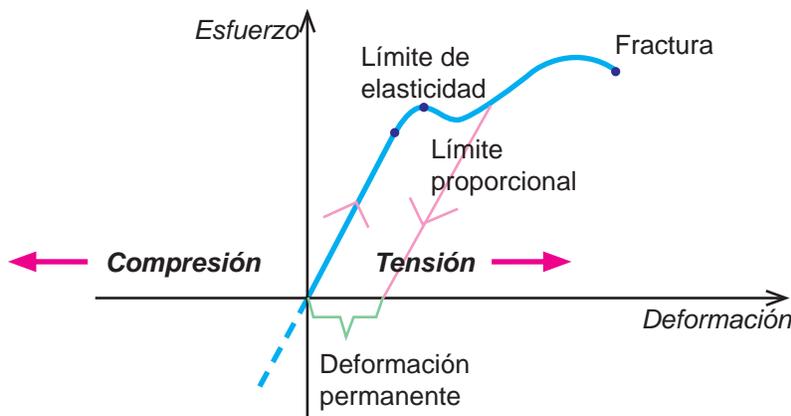
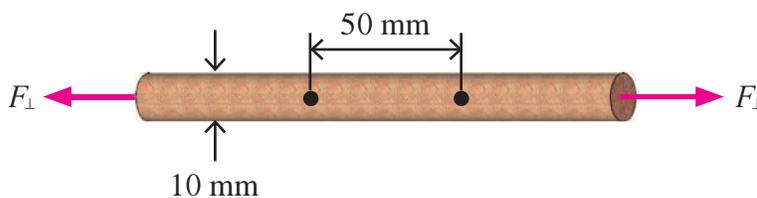


Fig. 2.10. Gráfico de esfuerzo contra deformación para una varilla metálica típica. El gráfico es una recta hasta el límite proporcional, luego continúa la deformación elástica hasta alcanzarse el límite de elasticidad. Más allá, la varilla sufrirá una deformación permanente y en algún momento se romperá.

Ejemplo 2.3. Se realiza una prueba de tensión sobre una varilla cilíndrica de latón de 10 mm de diámetro y se utiliza una longitud calibrada de 50 mm. Al aplicar una fuerza de 25 kN se aprecia que la distancia entre marcas de calibración se incrementa en 0.152 mm. Calcular el módulo de elasticidad del latón.



El módulo de elasticidad E o módulo de Young del latón se despeja de la ley de Hooke $\sigma = E\varepsilon$. El esfuerzo normal se calcula con $\sigma = F_L/A$, la deformación unitaria normal con $\varepsilon = \Delta L/L_0$ y el área de la sección transversal $A = \pi D^2/4$. Donde la fuerza es $F_L = 25 \text{ kN} = 25 \times 10^3 \text{ N}$, el diámetro $D = 10 \text{ mm} = 10 \times 10^{-3} \text{ m}$, la longitud inicial entre las marcas de calibración $L_0 = 50 \text{ mm} = 50 \times 10^{-3} \text{ m}$ y la deformación es el alargamiento entre las marcas $\Delta L = 0.152 \text{ mm} = 0.152 \times 10^{-3} \text{ m}$.

$$\sigma = \frac{F_L}{A} = \frac{25 \times 10^3 \text{ N}}{\frac{\pi(10 \times 10^{-3} \text{ m})^2}{4}} = 3.183 \times 10^8 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} = 318.3 \text{ MPa}$$





$$\varepsilon = \frac{\Delta L}{L_0} = \frac{0.152 \times 10^{-3} \text{ m}}{50 \times 10^{-3} \text{ m}} = 3.04 \times 10^{-3}$$

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon} = \frac{3.183 \times 10^8 \text{ Pa}}{3.04 \times 10^{-3}} = 1.047 \times 10^{11} \text{ Pa} = 104.7 \text{ GPa}$$

El módulo de elasticidad o módulo de Young del latón es de 104.7 GPa, lo que indica que se requiere un esfuerzo de 104.7 GPa para generar una deformación de 1 m por cada 1 m de largo de la varilla de latón. También indica que se requiere un esfuerzo de 318.3 MPa para producir una deformación de $3.04 \times 10^{-3} \text{ m}$ ($= 3.04 \text{ mm}$) por cada m de largo de la varilla de latón.

Ejemplo 2.4. Determinar la fuerza de tensión F_{\perp} necesaria para producir una deformación unitaria normal $\varepsilon = 0.0007$ en una barra de acero ($E = 200 \text{ GPa}$) de sección transversal circular cuyo diámetro es 10”.

Se conoce la deformación unitaria ε y el módulo de elasticidad E . El esfuerzo normal σ se puede calcular con la ley de Hooke $\sigma = E\varepsilon$ y la fuerza de tensión se despeja de la ecuación de esfuerzo $\sigma = F_{\perp}/A$. El diámetro de la sección transversal es $D = 10'' = 25.4 \text{ cm} = 0.254 \text{ m}$.

El área de la sección transversal es

$$A = \frac{\pi D^2}{4} = \frac{\pi(0.254 \text{ m})^2}{4} = 5.07 \times 10^{-2} \text{ m}^2$$

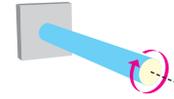
Con la ley de Hooke se obtiene el esfuerzo normal

$$\sigma = E\varepsilon = \left(200 \times 10^9 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}\right)(0.0007) = 1.4 \times 10^8 \text{ Pa} = 140 \text{ MPa}$$

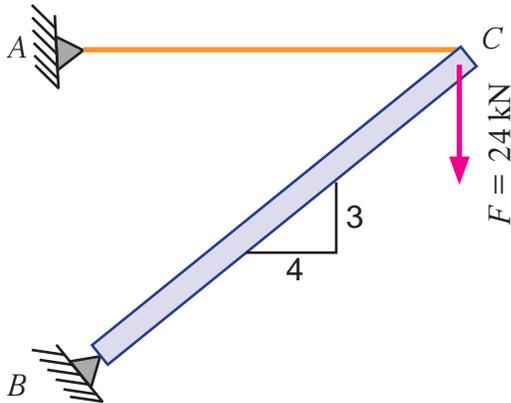
De la ecuación de esfuerzo normal $\sigma = \frac{F_{\perp}}{A}$ se despeja la fuerza de tensión

$$F_{\perp} = \sigma A = 140 \times 10^6 \text{ Pa}(5.07 \times 10^{-2} \text{ m}^2) = 7.098 \times 10^6 \text{ N} = 7.098 \text{ MN}$$

La fuerza de tensión es de 7.098 MN para producir una deformación unitaria normal de 0.0007 en la barra de acero de 10 pulgadas de diámetro.

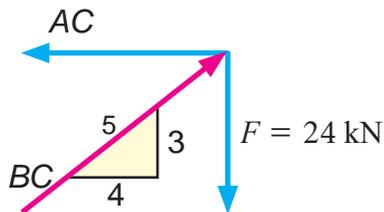


Ejemplo 2.5. Determinar el esfuerzo normal sobre cada uno de los miembros del brazo mostrado en la figura, cuando la fuerza F es de 24 kN . El miembro horizontal AC es una barra circular de 30 mm de diámetro y el miembro inclinado BC es una barra sólida con una sección transversal de 60 mm × 100 mm. Considere que la masa de ambos miembros es despreciable.

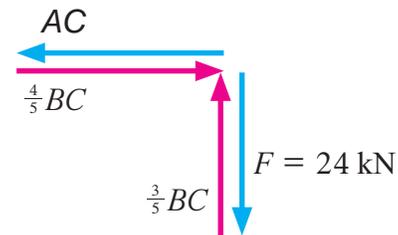


Para determinar el esfuerzo normal σ sobre cada miembro de la estructura mostrada, se construye un diagrama de cuerpo libre para el punto C y para calcular las fuerzas sobre cada elemento se utilizan las ecuaciones de equilibrio $\vec{\uparrow} \Sigma F_x = 0$ y $\uparrow \Sigma F_y = 0$. Luego se obtiene el área de la sección transversal de cada uno y finalmente se calcula el esfuerzo normal sobre cada elemento utilizando la ecuación de esfuerzo normal $\sigma = F_{\perp} / A$.

En el diagrama de cuerpo libre para el punto C se indican la fuerza de 24 kN , la fuerza BC que ejerce el elemento inclinado BC y la fuerza AC que ejerce el elemento horizontal AC sobre el punto C.



$$\begin{aligned} \uparrow \Sigma F_y &= 0 \\ + \frac{3}{5} \overline{BC} - 24 \text{ kN} &= 0 \\ \overline{BC} &= \frac{5}{3} (24 \text{ kN}) = 40 \text{ kN} \end{aligned}$$

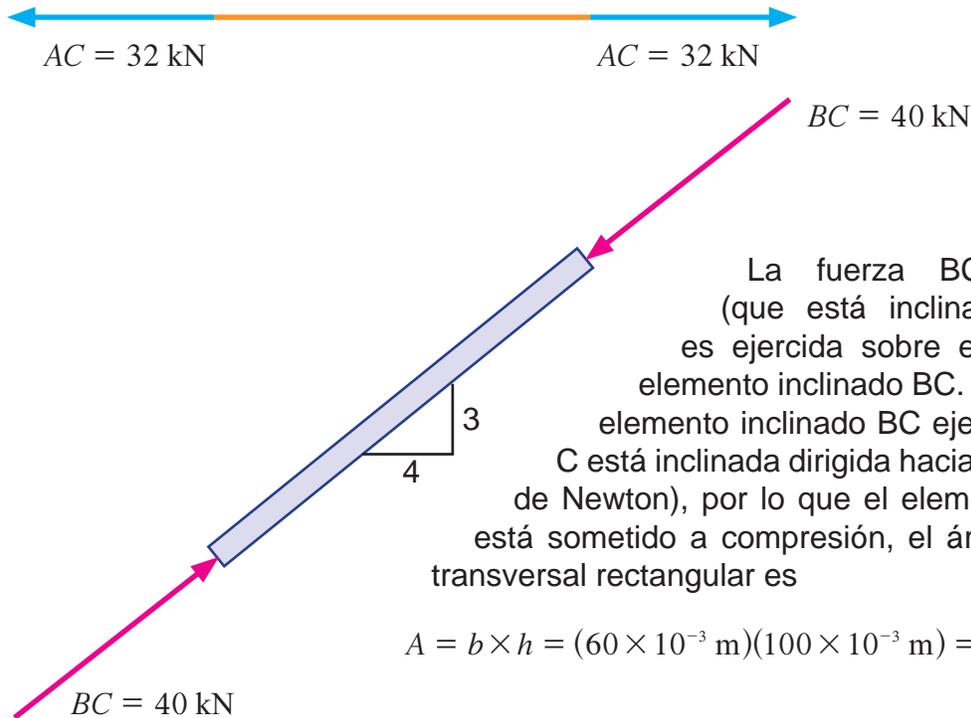


$$\begin{aligned} \vec{\uparrow} \Sigma F_x &= 0 \\ + \frac{4}{5} \overline{BC} - \overline{AC} &= 0 \\ \overline{AC} &= \frac{4}{5} \overline{BC} = \frac{4}{5} (40 \text{ kN}) = 32 \text{ kN} \end{aligned}$$

La fuerza AC del diagrama (que apunta a la izquierda) es ejercida sobre el punto C por el elemento horizontal AC. La fuerza sobre el elemento horizontal AC ejercida por el punto C está dirigida a la derecha (tercera ley de Newton), por lo que el elemento horizontal AC está sometido a tensión, el área de su sección transversal circular es

$$A = \frac{\pi D^2}{4} = \frac{\pi (30 \times 10^{-3} \text{ m})^2}{4} = 7.07 \times 10^{-4} \text{ m}^2$$





La fuerza BC del diagrama (que está inclinada hacia arriba) es ejercida sobre el punto C por el elemento inclinado BC. La fuerza sobre el elemento inclinado BC ejercida por el punto C está inclinada dirigida hacia abajo (tercera ley de Newton), por lo que el elemento inclinado BC está sometido a compresión, el área de su sección transversal rectangular es

$$A = b \times h = (60 \times 10^{-3} \text{ m})(100 \times 10^{-3} \text{ m}) = 6 \times 10^{-3} \text{ m}^2$$

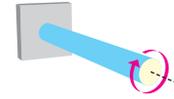
El esfuerzo normal a tensión sobre el elemento AC es

$$\sigma = \frac{F_{\perp}}{A} = \frac{32 \times 10^3 \text{ N}}{7.07 \times 10^{-4} \text{ m}^2} = 45.3 \times 10^6 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} = 45.3 \text{ MPa}$$

El esfuerzo normal a compresión sobre el elemento BC es

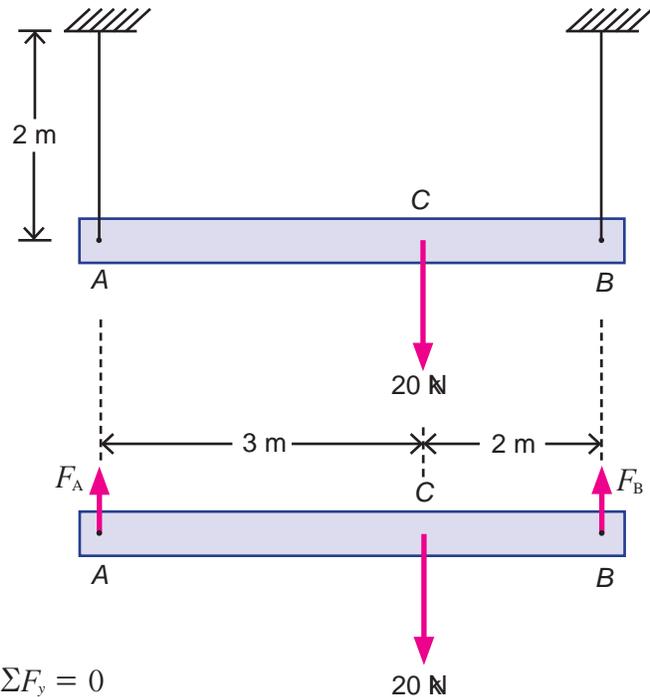
$$\sigma = \frac{F_{\perp}}{A} = \frac{40 \times 10^3 \text{ N}}{6 \times 10^{-3} \text{ m}^2} = 6.67 \times 10^6 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} = 6.67 \text{ MPa}$$

La fuerza sobre el elemento AC (32 kN) es menor que la fuerza sobre el elemento BC (40 kN), sin embargo el esfuerzo normal sobre el elemento AC (45.3 MPa) es mayor que el esfuerzo normal sobre el elemento BC (6.67 MPa). Esto se debe a que el área de la sección transversal del elemento AC es menor que el área de la sección transversal del elemento BC.



Ejemplo 2.6. Calcular el alargamiento de cada cable de acero en la estructura. Cada cable tiene un diámetro en su sección transversal circular de 1.5 cm y una longitud inicial de 2 m. El módulo de elasticidad del acero es de 200 GPa.

Para determinar el alargamiento o deformación ΔL de los cables A y B de la estructura mostrada, se elabora un diagrama de cuerpo libre de la barra AB y para calcular las fuerzas sobre cada uno de los cables se utilizan las ecuaciones de equilibrio $+\curvearrowright \Sigma M_o = 0$ y $+\uparrow \Sigma F_y = 0$. Luego se calcula el área de la sección transversal circular de los cable y finalmente se calcula el alargamiento ΔL de los cables utilizando las ecuaciones $\sigma = E\varepsilon$, $\sigma = F_{\perp}/A$ y $\varepsilon = \Delta L/L_0$.



$$+\curvearrowright \Sigma M_o = 0$$

$$F_B(5 \text{ m}) - (20 \text{ kN})(3 \text{ m}) = 0$$

$$F_B = \frac{(20 \text{ kN})(3 \text{ m})}{5 \text{ m}}$$

$$F_B = 12 \text{ kN}$$

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0$$

$$F_A + F_B - 20 \text{ kN} = 0$$

$$F_A = 20 \text{ kN} - 12 \text{ kN}$$

$$F_A = 8 \text{ kN}$$

Las fuerzas F_A y F_B en el diagrama son las fuerzas ejercidas por los cables sobre la barra horizontal AB , de manera que las fuerzas sobre los cables A y B están dirigidas hacia abajo (tercera ley), por lo que los cables están sometidos a tensión.

El área de la sección transversal circular de los cables A y B es

$$A = \frac{\pi(1.5 \times 10^{-2} \text{ m})^2}{4} = 1.77 \times 10^{-4} \text{ m}^2$$

Finalmente, el alargamiento de los cables A y B de la estructura es

$$\sigma = E\varepsilon \quad \rightarrow \quad \frac{F_{\perp}}{A} = E \frac{\Delta L}{L_0} \quad \rightarrow \quad \Delta L = \frac{F_{\perp} L_0}{AE}$$



Cable A

$$\Delta L = \frac{(8000 \text{ N})(2 \text{ m})}{(1.77 \times 10^{-4} \text{ m}^2)(200 \times 10^9 \frac{\text{N}}{\text{m}^2})}$$

$$\Delta L = 4.52 \times 10^{-4} \text{ m} = 0.452 \text{ mm}$$

Cable B

$$\Delta L = \frac{(12000 \text{ N})(2 \text{ m})}{(1.77 \times 10^{-4} \text{ m}^2)(200 \times 10^9 \frac{\text{N}}{\text{m}^2})}$$

$$\Delta L = 6.78 \times 10^{-4} \text{ m} = 0.678 \text{ mm}$$

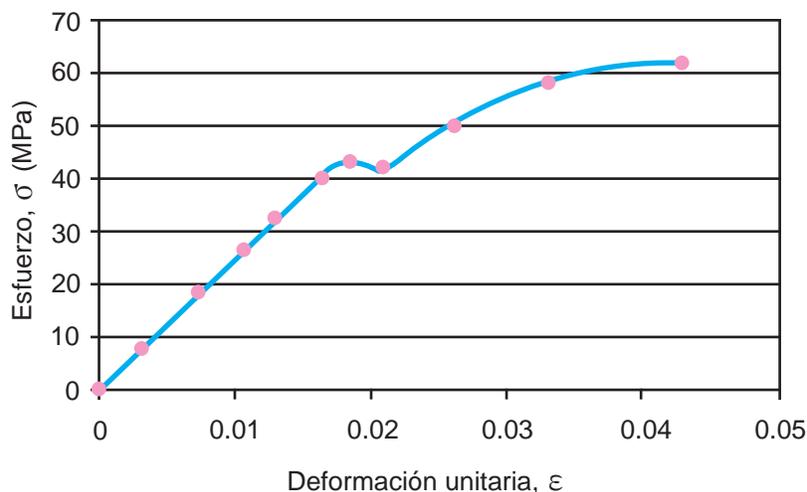
El alargamiento del cable B es mayor que el del cable A, porque la fuerza de tensión sobre el cable B es mayor que la fuerza sobre el cable A.

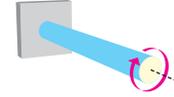
Ejemplo 2.7. Un espécimen de plástico de metacrilato se prueba a tensión y se obtienen los datos de esfuerzo normal σ y deformación unitaria normal ϵ que muestra la tabla adjunta. Construya un gráfico esfuerzo-deformación unitaria y determine el límite de proporcionalidad y el módulo de elasticidad (es decir, la pendiente de la parte inicial recta del gráfico esfuerzo-deformación unitaria).

Esfuerzo (MPa)	Deformación unitaria
8	0.00328
18	0.00738
26	0.01066
32	0.01311
40	0.01639
43	0.01841
42	0.02089
50	0.02602
58.1	0.03313
62	0.04291
62.1	Fractura



El gráfico esfuerzo-deformación unitaria es lineal desde el origen hasta el quinto punto de la *tabla* ($\epsilon = 0.01639$, $\sigma = 40 \text{ MPa}$). El límite de proporcionalidad corresponde a dicho punto y el límite elástico es ($\epsilon = 0.01841$, $\sigma = 43 \text{ MPa}$).





Si el esfuerzo normal σ que se aplica es igual o inferior a 40 MPa, se cumple a cabalidad la ley de Hooke ($\sigma = E\varepsilon$), es decir el esfuerzo normal σ es proporcional a la deformación unitaria normal ε .

Cuando el esfuerzo normal de tensión σ es igual o menor a 43 MPa y después el esfuerzo aplicado se interrumpe, el espécimen de plástico recuperará su longitud original L_0 . Si el esfuerzo normal σ es mayor a 43 MPa y luego se retira el esfuerzo aplicado, el espécimen no recuperará su longitud inicial, sino que habrá una pequeña deformación permanente. Después de aplicar un esfuerzo normal de tensión de 62.1 MPa el espécimen se fracturará.

Al aplicar un esfuerzo normal de tensión σ mayor a 40 MPa pero inferior a 43 MPa, no se cumplirá la ley de Hooke en dicho intervalo de esfuerzo aplicado, pero al dejar de aplicar el esfuerzo, el espécimen de plástico si recuperará su longitud original L_0 .

El módulo de elasticidad E se obtiene al calcular la pendiente de la porción lineal del gráfico ($\sigma < 40$ MPa). Se puede considerar cualquier pareja de puntos dentro de esta región recta para obtener

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{\varepsilon_2 - \varepsilon_1} = 2.4 \text{ GPa}$$

También, se puede calcular el módulo de elasticidad E al aplicar la ley de Hooke $\sigma = E\varepsilon$ en la parte recta del gráfico, pues se trata de una recta que parte del origen,

$$\sigma = E\varepsilon \quad \rightarrow \quad E = \frac{\sigma}{\varepsilon}$$

$$E = \frac{40 \times 10^6 \text{ Pa}}{0.01639} = 2.4 \text{ GPa}$$

El límite de proporcionalidad corresponde a ($\sigma = 40$ MPa) y el módulo de elasticidad es de 2.4 GPa.





2.4. Esfuerzo de corte y deformación de corte

En la sección anterior se trató fundamentalmente con los efectos de esfuerzos normales producidos por fuerzas a lo largo de un eje. Ahora se considerará un tipo diferente de esfuerzo, conocido como **esfuerzo de corte o esfuerzo cortante**, que actúa **paralelo o tangencial** a la superficie del material.

Considere la junta atornillada que se muestra en la Figura 2.11a. Esta junta consiste en una placa plana A, una solera B y un tornillo C que pasa a través de barrenos en la solera y en la placa. Bajo la acción de las fuerzas de tensión F la placa y la solera presionan al tornillo y generan **esfuerzos**, los cuales a su vez son resistidos por el tornillo. Un diagrama de cuerpo libre del tornillo (Fig. 2.11c) muestra tales esfuerzos. El esfuerzo se puede calcular al dividir la fuerza entre el área transversal, que para el tornillo es un círculo.

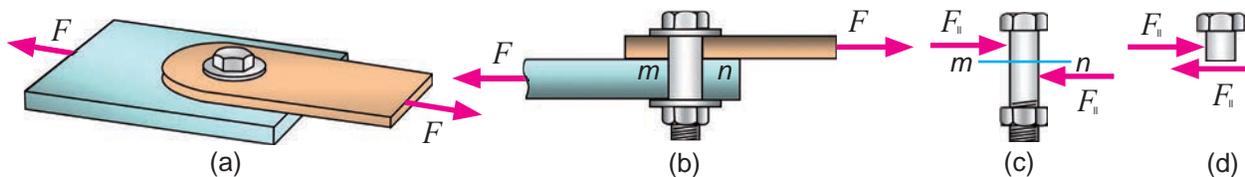
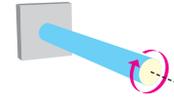


Fig. 2.11. Conexión atornillada donde el tornillo está sujeto a esfuerzo de corte.

El diagrama de cuerpo libre de la Figura 2.11c muestra que existe una tendencia a que el perno experimente un corte según la sección transversal $m n$. En el diagrama de cuerpo libre de la parte superior del tornillo (Fig. 2.11d), se observa que sobre la superficie de corte del tornillo actúa la fuerza de corte F_i paralela a dicha área circular. Se acostumbra representar los **esfuerzos de corte** por la letra griega τ (tau).

El **esfuerzo de corte** sobre el área transversal de un tornillo se obtiene dividiendo la fuerza de corte F_i entre el área A de la sección transversal sobre la cual actúa, como sigue:

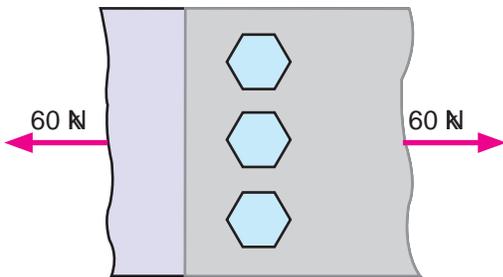
$$\tau = \frac{F_i}{A}$$



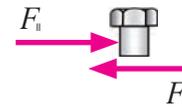
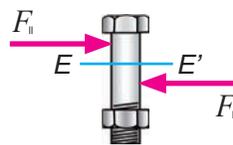
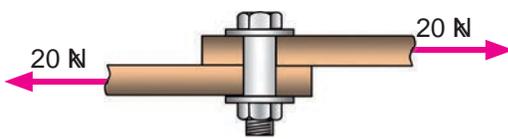
En el ejemplo mostrado en la Figura 2.11c, la fuerza cortante es F_i y el área A es el área de la sección transversal del tornillo, que es un círculo. Debe observarse que la fuerza de corte es paralela al área de corte. De la ecuación $\tau = F_i/A$ se aprecia que los esfuerzos de corte τ , al igual que los esfuerzos normales, representan una fuerza por unidad de área. Por lo que, las unidades de esfuerzo de corte son las mismas que para esfuerzo normal, pascal en unidades del Sistema Internacional.

El esfuerzo de corte se presenta en el diseño de tornillos, pernos, remaches, cuñas, soldaduras y juntas pegadas. Los esfuerzos de corte también aparecen de manera indirecta en miembros sujetos a tensión, torsión y flexión.

Ejemplo 2.7. Se usan tres pernos de 20 mm de diámetro para unir las dos placas de acero mostradas en la figura. La conexión transmite una fuerza de 60 kN. Determinar el esfuerzo de corte sobre los pernos.



Cuando la línea de acción de la fuerza aplicada pasa a través del centro de masa del conjunto de los pernos, se considera que cada perno soporta una parte igual de la fuerza. La fuerza cortante sobre cada perno es de 20 kN .



El esfuerzo de corte τ sobre cada perno se obtiene con la ecuación de esfuerzo de corte $\tau = F_i/A$, donde la fuerza de corte es $F_i = 20000 \text{ N}$ y la sección transversal circular es $A = \pi r^2 = \pi(10 \times 10^{-3} \text{ m})^2 = 3.14 \times 10^{-4} \text{ m}^2$, lo que resulta en

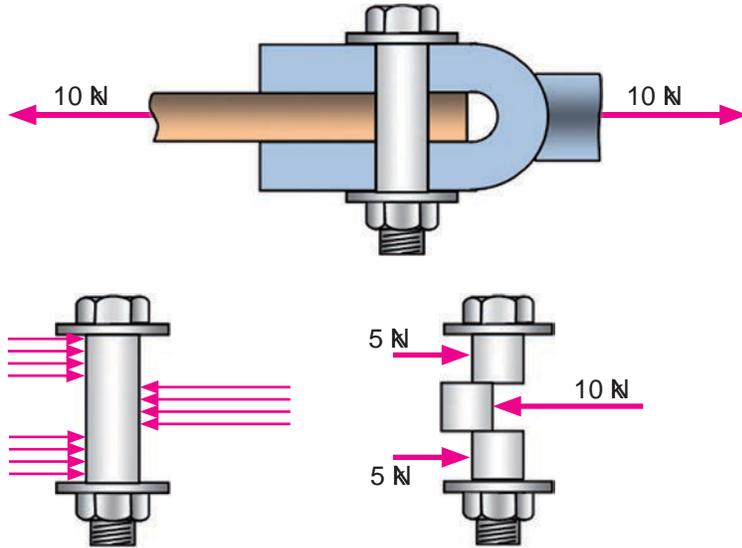
$$\tau = \frac{F_i}{A} = \frac{20000 \text{ N}}{3.14 \times 10^{-4} \text{ m}^2} = 63.7 \times 10^6 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} = 63.7 \text{ MPa}$$

La fuerza de corte es paralela al área de corte y sobre cada perno se ejerce un esfuerzo de corte de 63.7 MPa.

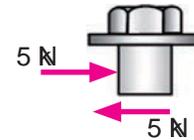




Ejemplo 2.8. Un perno de 20 mm de diámetro se usa para unir la placa y la horquilla mostradas en la figura. Determinar el esfuerzo de corte sobre el perno.

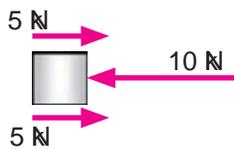


En este caso, el perno puede fallar a lo largo de dos planos, como se muestra en la figura. Los esfuerzos de corte τ sobre los dos planos se suponen iguales. Considerando cualquiera de los planos sometidos a esfuerzo de corte, se encuentra que la fuerza cortante es 5 kN. Entonces, el esfuerzo de corte τ sobre el perno es de:



$$\tau = \frac{F_v}{A} = \frac{5000 \text{ N}}{3.14 \times 10^{-4} \text{ m}^2} = 15.9 \times 10^6 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} = 15.9 \text{ MPa}$$

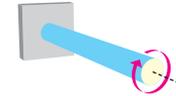
Otra forma de analizar este problema es considerar la fuerza de corte total (10 kN) transmitida que actúa sobre el área total en cortante (ambas áreas, superior e inferior). El resultado es, por supuesto, el mismo, como lo muestran los cálculos siguientes:



$$\tau = \frac{F_v}{A} = \frac{10000 \text{ N}}{2(3.14 \times 10^{-4} \text{ m}^2)} = 15.9 \times 10^6 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} = 15.9 \text{ MPa}$$

El esfuerzo de corte sobre el perno es de 15.9 MPa.

Bajo la acción de esfuerzos cortantes el material se deforma, lo que origina **deformaciones angulares** o **deformaciones por cortante**. A fin de visualizar dichas deformaciones, se advierte en primer lugar que los esfuerzos cortantes no tienden a alargar o acortar el elemento sino que provocan un cambio de forma del elemento, como se muestra en la Figura 2.12. El elemento original adquiere la forma de un paralelepípedo oblicuo y la cara frontal del elemento se convierte en un romboide. Los ángulos entre caras, que eran rectos (90°) antes de la deformación, cambian en un



pequeño ángulo γ (gamma), el cual es una medida de la distorsión o cambio en la forma del elemento y se denomina **deformación unitaria cortante**.

La figura 2.12 muestra que la cara superior del objeto sometido a esfuerzo de corte τ se desplaza una distancia ΔL relativa a la cara opuesta (relativa a la cara inferior en la Fig 2.12). Se define la deformación unitaria de corte γ como el cociente del desplazamiento ΔL entre la dimensión transversal L_0 .

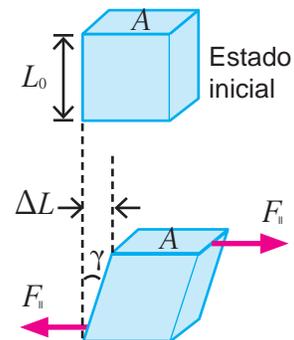
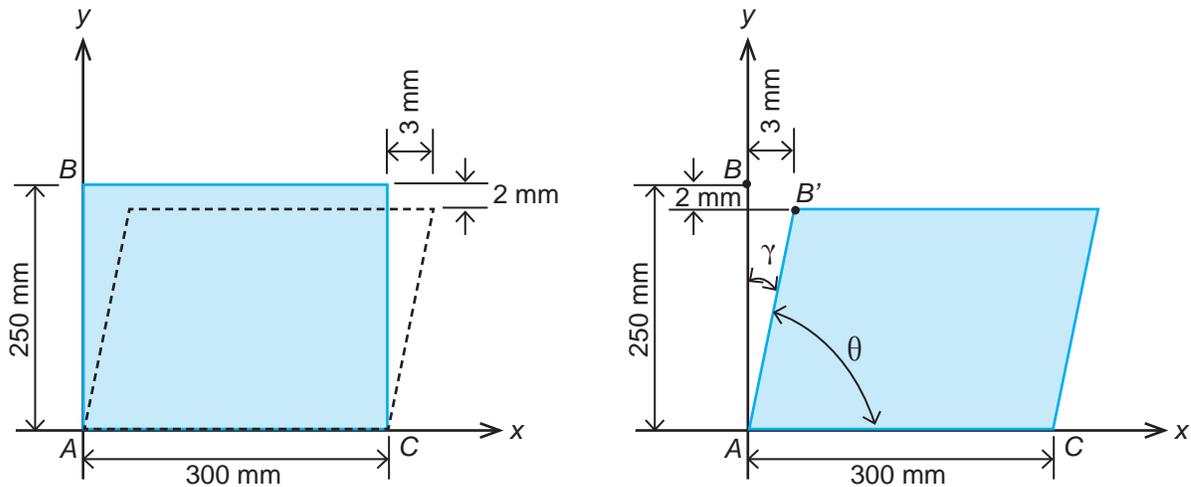


Fig. 2.12. Los esfuerzos de corte no tienden a alargar o a acortar el material sino que provocan un cambio de forma. Los ángulos que inicialmente eran rectos, cambian en un pequeño ángulo γ .

$$\gamma = \frac{\Delta L}{L_0}$$

Donde se distingue entre la deformación ΔL y la deformación unitaria de corte γ . La deformación ΔL y la longitud L_0 son perpendiculares. La deformación ΔL es el desplazamiento de la superficie de corte respecto a la superficie opuesta.

Ejemplo 2.9. Debido a una fuerza, la placa se deforma como se indica con la línea discontinua de la figura. Determine la deformación unitaria cortante en la placa en el punto A.



Como se observa en la figura, el ángulo BAC que una vez fue de 90° (entre los lados BA y AC) disminuyó a θ (theta) debido al desplazamiento de B a B'. La deformación es el desplazamiento de la superficie de corte superior respecto a la superficie inferior $\Delta L = 3 \text{ mm}$ y la longitud transversal es $L_0 = 250 \text{ mm}$.



La deformación unitaria cortante es

$$\gamma = \frac{\Delta L}{L_0} = \frac{3 \text{ mm}}{250 \text{ mm}} = 0.012$$

La deformación unitaria de corte en la placa es 0.012 mm por cada 1 mm del lado vertical AB de la placa.

Las propiedades de un material en cortante se determinan experimentalmente por pruebas de cortante directo o pruebas de torsión. De los resultados de dichas pruebas pueden trazarse **diagramas de esfuerzo cortante contra deformación unitaria cortante**. Estos diagramas de τ contra γ tienen forma similar a los diagramas para pruebas a tensión (σ contra ϵ) para los mismos materiales. Estas propiedades en cortante suelen ser del orden de la mitad que las correspondientes en tensión.

La porción inicial del diagrama esfuerzo-deformación unitaria en cortante es una recta que pasa por el origen, al igual que en tensión. Para esta región linealmente elástica, el esfuerzo cortante y la deformación unitaria en cortante son proporcionales y por lo tanto, se tiene la ecuación siguiente para la **ley de Hooke en cortante**:

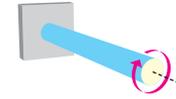
$$\tau = G\gamma$$

donde G es el **módulo de elasticidad en cortante** o módulo de rigidez.

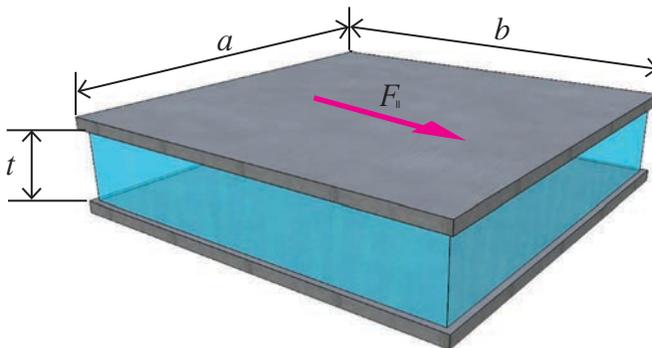
El módulo de corte G tiene las mismas unidades que el módulo de tensión E , que son pascal (o sus múltiplos) en unidades del Sistema Internacional. Para el acero dulce, el valor característico de G es 77 GPa; para aluminio, el valor es 26 GPa.

Tabla 2.3. Módulo de elasticidad en cortante G .

Material	G (GPa)
Diamante	478
Níquel	80
Acero	77
Hierro	38
Cobre	38
Titanio	40
Oro	30
Plata	30
Aluminio	26



Ejemplo 2.10. Una almohadilla de soporte elastomérico que consiste de dos placas de acero unidas a un elastómero cloropreno (o neopreno, un caucho artificial) se somete a una fuerza cortante F_i durante una prueba de fuerza estática. Las dimensiones de la almohadilla son $a = 125 \text{ mm}$ y $b = 240 \text{ mm}$ y el elastómero tiene un espesor $L_0 = 50 \text{ mm}$. Cuando la fuerza F_i es igual a 12 kN , la placa superior se desplaza lateralmente 8.0 mm con respecto a la placa inferior. ¿Cuál es el módulo de elasticidad G en cortante del cloropreno?



El módulo de elasticidad en cortante G del caucho artificial se despeja de la ley de Hooke para cortante $\tau = G\gamma$. El esfuerzo de corte τ se calcula con la ecuación de esfuerzo cortante $\tau = F_i/A$ y la deformación unitaria de corte γ con $\gamma = \Delta L/L_0$. Donde la fuerza de corte es $F_i = 12 \text{ kN} = 12 \times 10^3 \text{ N}$, el área de corte es $A = a \times b$, la

deformación es el desplazamiento de la superficie de corte (placa superior) respecto a la superficie opuesta (placa inferior) $\Delta L = 8.0 \text{ mm} = 8.0 \times 10^{-3} \text{ m}$ y la longitud transversal es el espesor $L_0 = 50 \text{ mm}$.

El área de corte es

$$A = (125 \times 10^{-3} \text{ m})(240 \times 10^{-3} \text{ m}) = 0.03 \text{ m}^2$$

El esfuerzo de corte es

$$\tau = \frac{F_i}{A} = \frac{12 \times 10^3 \text{ N}}{0.03 \text{ m}^2} = 4 \times 10^5 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} = 400 \text{ kPa}$$

La deformación unitaria de corte es

$$\gamma = \frac{\Delta L}{L_0} = \frac{8.0 \times 10^{-3} \text{ m}}{50 \times 10^{-3} \text{ m}} = 0.16$$

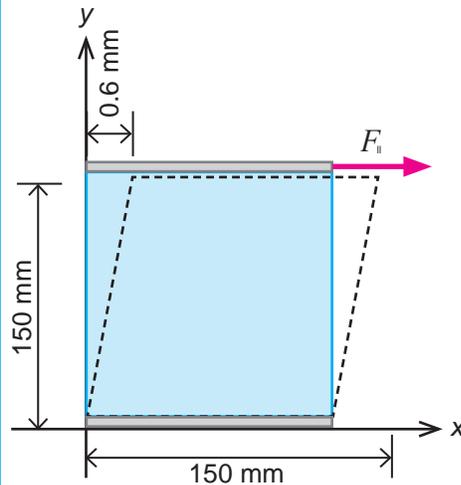
El módulo de corte es

$$G = \frac{\tau}{\gamma} = \frac{400000 \text{ Pa}}{0.16} = 2.5 \text{ MPa}$$

El módulo de corte del elastómero es de 2.5 MPa , lo que indica que se requiere un esfuerzo de corte de 2.5 MPa para producir un desplazamiento de la placa superior respecto a la placa inferior de 1 m por cada 1 m de espesor de la almohadilla de caucho, o que se requiere un esfuerzo de corte de 400 Pa para producir un desplazamiento de la placa superior relativo a la placa inferior de 0.16 m ($=16 \text{ cm}$) por cada 1 m de espesor de la almohadilla de caucho.



Ejemplo 2.11. Un bloque de 20 mm de ancho está firmemente unido a placas rígidas en sus partes superior e inferior. Cuando se aplica la fuerza F_i al bloque, éste se deforma como lo indica la línea discontinua. Determine la magnitud de F_i si el material del bloque tiene un módulo de rigidez $G = 26 \text{ GPa}$.



La magnitud de la fuerza cortante F_i que actúa sobre el bloque se despeja de la ecuación de esfuerzo de corte $\tau = F_i/A$. El área de corte es $A = 150 \text{ mm} \times 20 \text{ mm}$ y el esfuerzo de corte τ se calcula con la ley de Hooke para cortante $\tau = G\gamma$. Por último, la deformación unitaria de corte γ se calcula con $\gamma = \Delta L/L_0$. La deformación $\Delta L = 0.6 \text{ mm}$ es el desplazamiento de la placa superior respecto a la placa inferior y la longitud transversal es $L_0 = 150 \text{ mm}$.

Área de corte

$$A = (150 \times 10^{-3} \text{ m})(20 \times 10^{-3} \text{ m}) = 0.003 \text{ m}^2$$

Deformación unitaria de corte

$$\gamma = \frac{\Delta L}{L_0} = \frac{0.6 \text{ mm}}{150 \text{ mm}} = 4 \times 10^{-3}$$

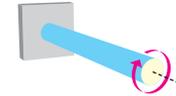
Esfuerzo de corte

$$\tau = G\gamma = (26 \times 10^9 \text{ Pa})(4 \times 10^{-3}) = 104000000 \text{ Pa} = 104 \text{ MPa}$$

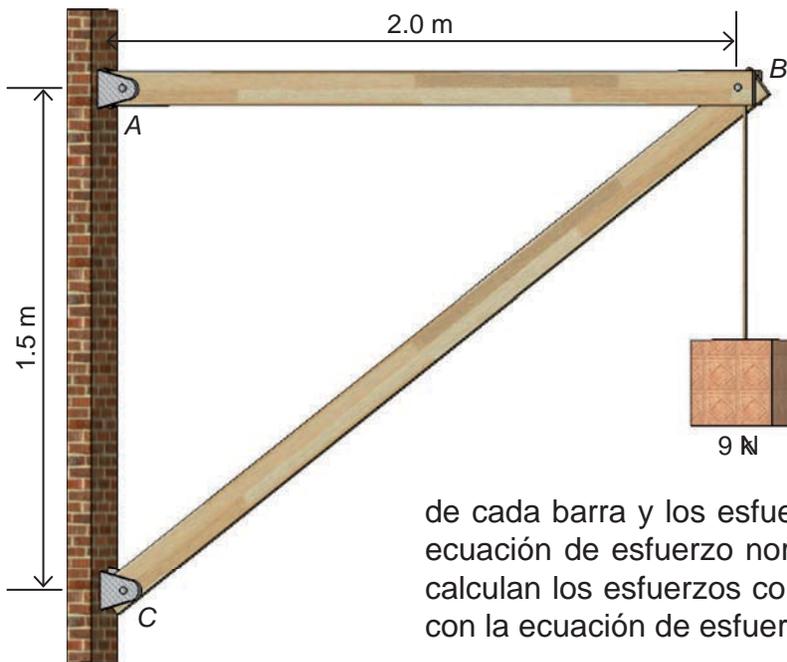
Fuerza de corte

$$F_i = \tau A = (104 \times 10^6 \text{ Pa})(0.003 \text{ m}^2) = 3.12 \times 10^5 \text{ N} = 312 \text{ kN}$$

Se requiere una fuerza de 312 kN paralela a la placa superior de $150 \text{ mm} \times 20 \text{ mm}$ para producir un desplazamiento de la placa superior relativo a la placa inferior de $4 \times 10^{-3} \text{ m}$ ($= 4 \text{ mm}$) por cada 1 m de longitud vertical del bloque.

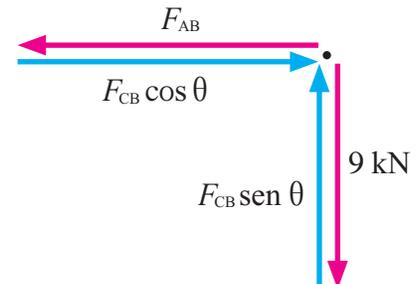
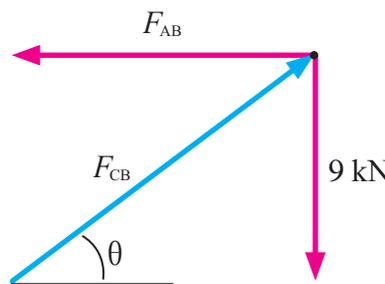
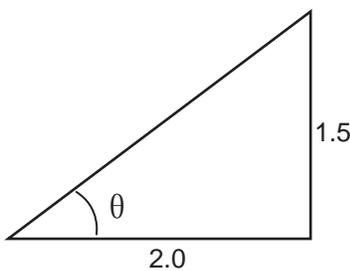


Ejemplo 2.12. Calcular los esfuerzos normales sobre las barras AB y BC cada una con sección transversal de 2 cm × 8 cm, así como, los esfuerzos cortantes sobre los pasadores A y C, cuyo diámetro es de 1.2 cm. Considere que la masa de ambas barras es despreciable.



Para determinar los esfuerzos normales σ en las barras AB y BC, se elabora un diagrama de cuerpo libre del punto B y para calcular las fuerzas sobre cada una de las barras se utilizan las ecuaciones de equilibrio $\vec{\uparrow} \Sigma F_x = 0$ y $+\uparrow \Sigma F_y = 0$. Luego, se calcula el área de la sección transversal

de cada barra y los esfuerzos normales σ utilizando la ecuación de esfuerzo normal $\sigma = F_{\perp} / A$. Finalmente, se calculan los esfuerzos cortantes τ sobre los pasadores con la ecuación de esfuerzo cortante $\tau = F_{\parallel} / A$.



$$\tan \theta = \frac{1.5}{2.0} \quad \rightarrow \quad \theta = \tan^{-1}\left(\frac{1.5}{2.0}\right) = 36.87^\circ$$

$$\vec{\uparrow} \Sigma F_x = 0$$

$$F_{BC} \sin 36.87^\circ - 9 \text{ kN} = 0$$

$$F_{BC} = \frac{9 \text{ kN}}{\sin 36.87^\circ}$$

$$F_{BC} = 15 \text{ kN}$$

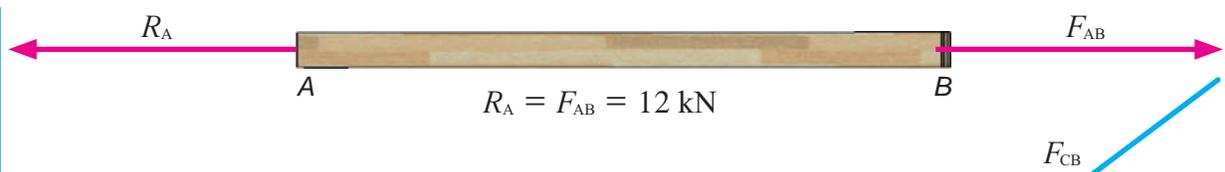
$$+\uparrow \Sigma F_y = 0$$

$$F_{BC} \cos 36.87^\circ - F_{AB} = 0$$

$$F_{AB} = (15 \text{ kN}) \cos 36.87^\circ$$

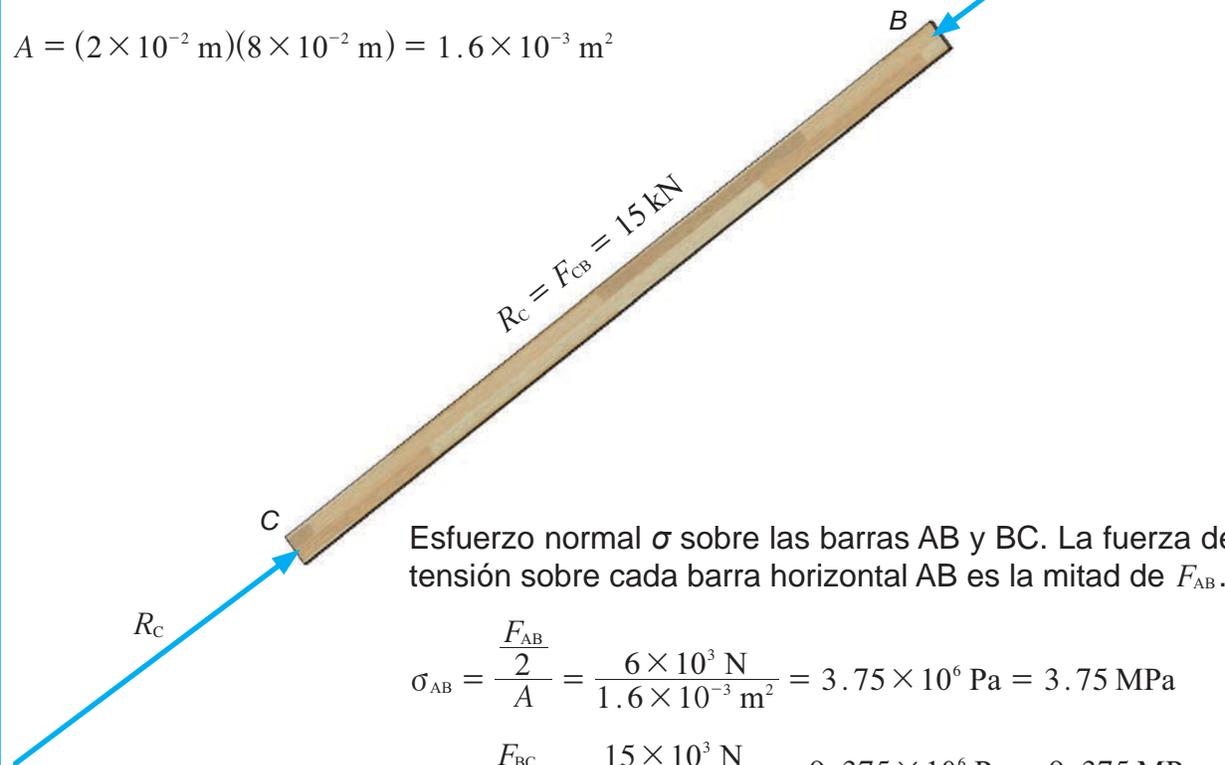
$$F_{AB} = 12 \text{ kN}$$





Área de la sección transversal de las barras.

$$A = (2 \times 10^{-2} \text{ m})(8 \times 10^{-2} \text{ m}) = 1.6 \times 10^{-3} \text{ m}^2$$



Esfuerzo normal σ sobre las barras AB y BC. La fuerza de tensión sobre cada barra horizontal AB es la mitad de F_{AB} .

$$\sigma_{AB} = \frac{F_{AB}}{2A} = \frac{6 \times 10^3 \text{ N}}{1.6 \times 10^{-3} \text{ m}^2} = 3.75 \times 10^6 \text{ Pa} = 3.75 \text{ MPa}$$

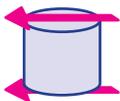
$$\sigma_{BC} = \frac{F_{BC}}{A} = \frac{15 \times 10^3 \text{ N}}{1.6 \times 10^{-3} \text{ m}^2} = 9.375 \times 10^6 \text{ Pa} = 9.375 \text{ MPa}$$

Esfuerzos de corte τ sobre los pasadores A y C, cuyo diámetro es de 1.2 cm. El pasador superior A se podría cortar en cuatro secciones, por lo que la fuerza de corte es la cuarta parte de R_A . El pasador inferior C está sujeto a doble cortante, por lo que la fuerza de corte es la mitad de R_C .

$$A = \frac{\pi D^2}{4} = \frac{\pi(1.2 \times 10^{-2} \text{ m})^2}{4} = 1.13 \times 10^{-4} \text{ m}^2$$

$$\tau_A = \frac{R_A}{4A} = \frac{12 \times 10^3 \text{ N}}{4(1.13 \times 10^{-4} \text{ m}^2)} = 26.5 \text{ MPa}$$

$$\tau_C = \frac{R_C}{2A} = \frac{15 \times 10^3 \text{ N}}{2(1.13 \times 10^{-4} \text{ m}^2)} = 66.4 \text{ MPa}$$



2.5. Torsión

En los apartados anteriores se analizaron los comportamientos de elementos estructurales simples, como son una barra recta sometida a fuerzas normales o cortantes. Ahora se considerarán los elementos estructurales que se encuentran en **torsión**. Torsión se refiere al torcimiento de una barra recta al ser sometida a pares de fuerza (o pares de torsión) que tienden a producir rotación con respecto al eje longitudinal de la barra. Por ejemplo, cuando se gira un destornillador (Fig. 2.21a), la mano aplica al mango un par de fuerzas de torsión cuyo momento del par es M (Fig. 2.21b) y tuerce el vástago del destornillador. Otros ejemplos de barras en torsión son los ejes de transmisión (Fig. 2.22), ejes de impulsión en automóviles, ejes de hélices, barras de dirección y brocas de taladros.

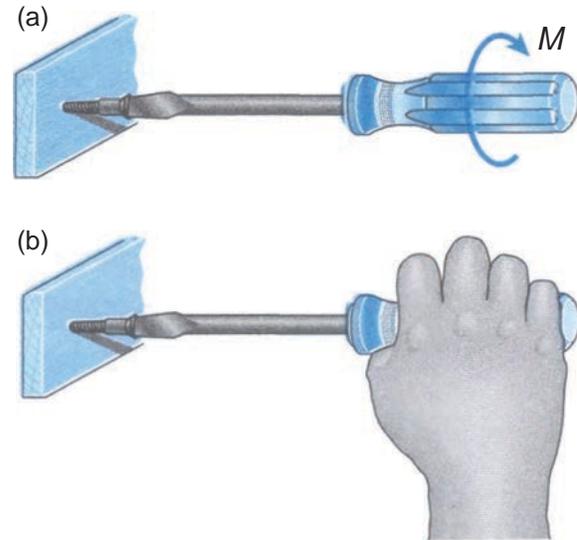


Fig. 2.21. Torsión de un destornillador debida al par de torsión M aplicado al mango.

Un caso de torsión se representa en la figura 2.23a, donde se muestra una barra recta soportada en un extremo y sometida a dos pares de fuerzas iguales y opuestas. El primer par consiste en las fuerzas F_1 que actúan en el extremo de la barra y el segundo par consiste de las fuerzas F_2 que actúan cerca del punto medio de la barra. Cada par de fuerzas forma un par de torsión que tiende a torcer la barra con respecto a su eje longitudinal. Como se sabe de la estática, el momento de un par de fuerzas es igual al producto de una de las fuerzas por la distancia entre las líneas de acción de las fuerzas; por tanto, el primer par de torsión tiene un momento $M_1 = F_1 d_1$ y el segundo tiene un momento $M_2 = F_2 d_2$, con sentido opuesto al primer par de torsión.

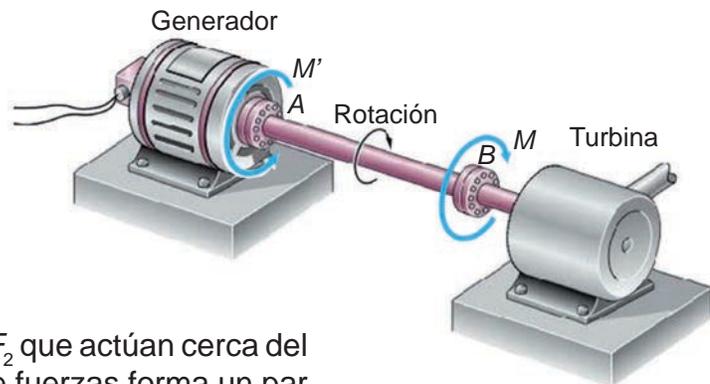


Fig. 2.22. Eje de transmisión sometido a pares de torsión.

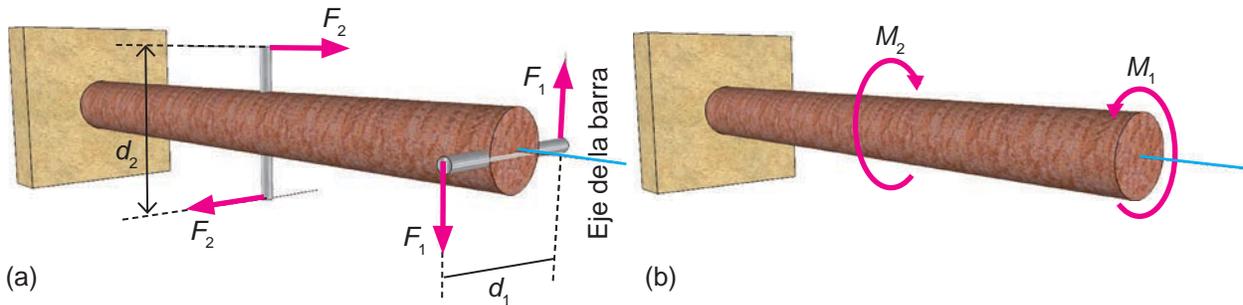


Fig. 2.23. Barra circular sometida a torsión por los pares de torsión M_1 y M_2 .

El momento de un par de torsión es un vector perpendicular al plano que contiene al par de torsión, en este caso los dos vectores momento de cada par son paralelos al eje de la barra (Fig. 2.24a) con sentidos opuestos. El sentido del momento se obtiene mediante la regla de la mano derecha. En esta sección los sentidos de las torsiones se representarán con una flecha curva en el sentido de la rotación (Fig. 2.23b y 2.24b).

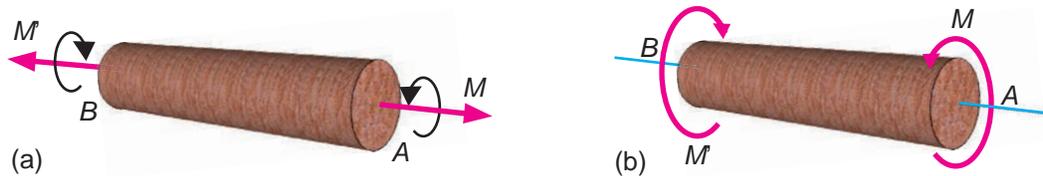
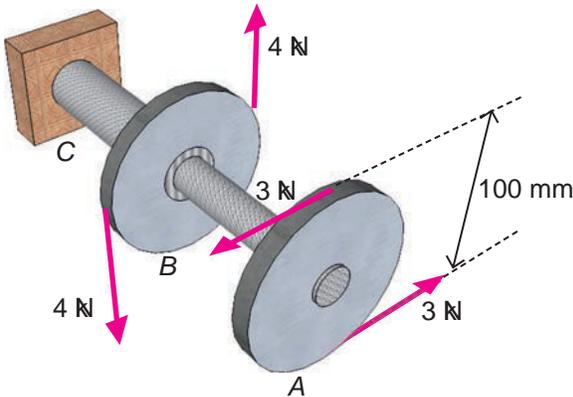


Fig. 2.24. El momento de un par de torsión es un vector paralelo al eje longitudinal.

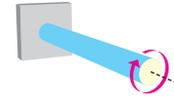
Ejemplo 2.13. Los dos pares de fuerza de 3 kN y 4 kN mostrados se ejercen sobre las poleas A y B de 100 mm de diámetro. Calcular el par interno sobre los ejes AB y BC.



Se calculan los momentos de los pares de torsión sobre cada polea $M = Fd$, se realizan cortes perpendiculares a los ejes AB y BC en puntos arbitrarios y se construyen diagramas de cuerpo libre para estas porciones. Para calcular los pares internos sobre cada eje se aplica la condición de equilibrio de rotación. El momento del par de torsión sobre la polea A es

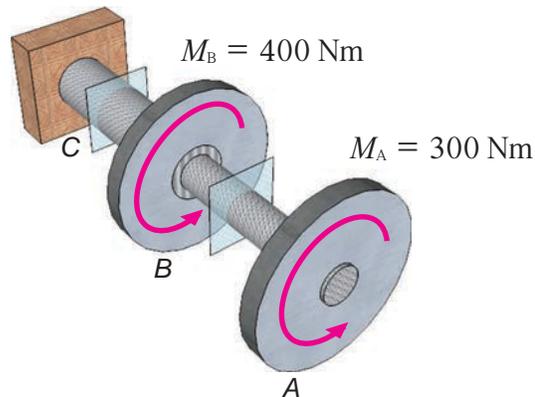
$$M_A = (3 \text{ kN})(0.100 \text{ m}) = 300 \text{ Nm}$$

El momento del par de torsión sobre la polea B es



$$M_B = (4 \text{ kN})(0.100 \text{ m}) = 400 \text{ Nm}$$

Estos pares de torsión y los cortes perpendiculares en cada eje se muestran en la figura siguiente

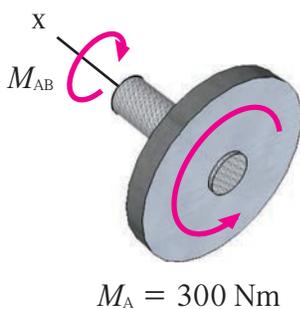


Los pares de torsión internos sobre los ejes AB y BC se designaron con M_{AB} y M_{BC} como se muestra en la figura siguiente. Sus magnitudes se obtienen con la segunda condición de equilibrio,

$$+\curvearrowright \Sigma M_x = 0$$

$$+ 300 \text{ Nm} - M_{AB} = 0$$

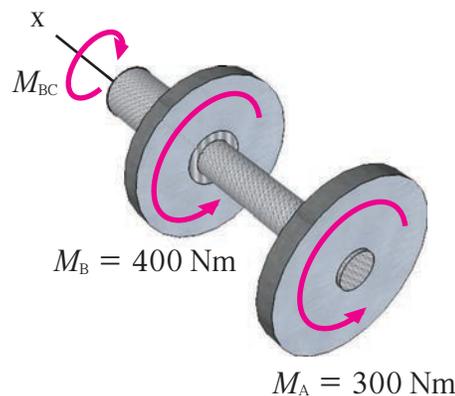
$$M_{AB} = 300 \text{ Nm}$$



$$+\curvearrowright \Sigma M_x = 0$$

$$+ 300 \text{ Nm} + 400 \text{ Nm} - M_{BC} = 0$$

$$M_{BC} = 700 \text{ Nm}$$



Los pares de torsión sobre los ejes AB y BC son de 300 Nm y 700 Nm, respectivamente.



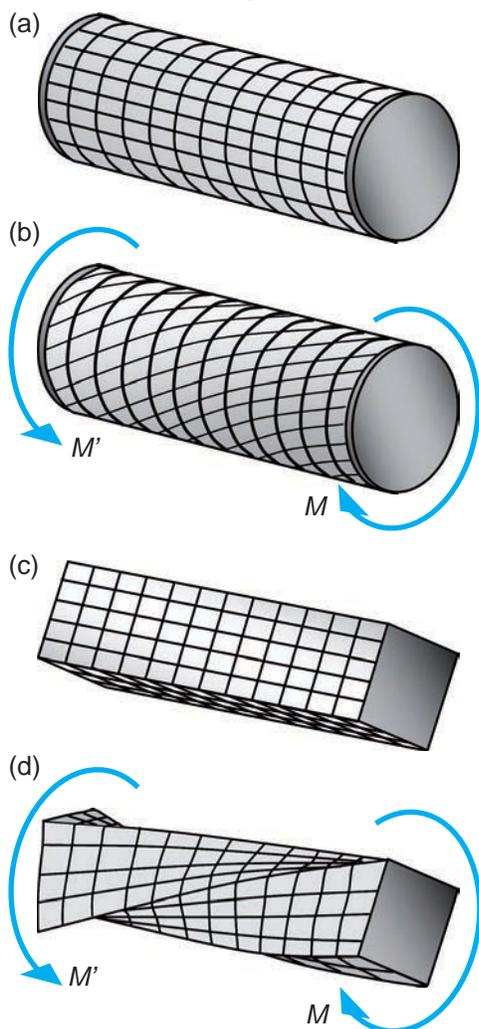


Fig. 2.25. En una barra circular sometida a torsión, las secciones transversales circulares permanecen planas y sin distorsión, pero en una barra cuadrada sujeta a torsión, las secciones transversales cuadradas no permanecen planas y se tuercen.

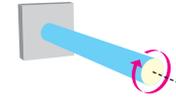
Cuando un barra circular (Fig. 2.25a) se somete a torsión, todas las secciones transversales permanecen planas y sin distorsión, es decir, cada sección transversal circular gira como una placa sólida rígida (Fig. 2.25b). Esta propiedad es característica de ejes circulares, sólidos o huecos. Sin embargo, en una barra con sección transversal no circular (Fig. 2.25c) sujeta a torsión, sus secciones transversales se tuercen y no permanecen planas (Fig. 2.25d). En este apartado sólo se analizarán los esfuerzos y las deformaciones en ejes circulares.

En la Fig. 2.25b se observa que la torsión no tiende a alargar o a acortar la barra circular sino que provoca un cambio de forma, donde cada elemento adquiere la forma de un romboide. También se puede apreciar que la torsión de la barra circular provoca esfuerzos de corte en cada sección transversal circular pero no provoca esfuerzos normales a dicho eje circular.

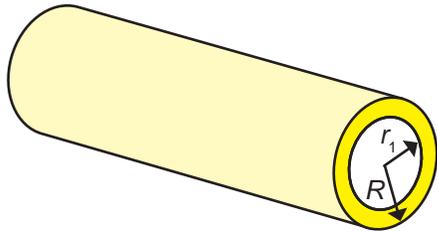
Para calcular las deformaciones unitarias de corte en una barra circular de longitud L y radio R (Fig. 2.26a) se considera una porción cilíndrica de radio r que ha girado un ángulo de torsión ϕ (Fig. 2.26b). La deformación unitaria de corte γ es el cociente del desplazamiento (arco de circunferencia s) y la longitud L del cilindro, $\gamma = s/L$. Por otra parte, el ángulo de torsión ϕ (phi, se pronuncia fi) en radianes es $\phi = s/r$, por lo que el arco de circunferencia es $s = r\phi$. Así, la deformación unitaria de corte es

$$\gamma = \frac{r\phi}{L}$$

Donde r es la distancia radial y ϕ es el ángulo de torsión o de giro. La distancia radial r varía desde 0 hasta R . En consecuencia, la deformación unitaria cortante γ es máxima en la superficie del eje, donde $r = R$.



Para un tubo circular, la deformación unitaria cortante γ tiene un valor máximo [en la superficie exterior del tubo ($r = R$)] y un mínimo [en la superficie interior del tubo ($r = r_1$)].



Los tubos circulares resisten mayores esfuerzos de torsión que las barras sólidas. En un tubo la mayor parte del material está cerca del borde exterior donde los esfuerzos de corte son mayores. Por tanto, cuando es importante reducir peso y ahorrar material, se aconseja emplear un tubo circular. En una barra hueca se utiliza el material de manera más eficiente que en una barra sólida. Los ejes de impulsión largos, los ejes de hélices y los ejes de generadores tienen secciones transversales huecas. Sin embargo, se debe asegurar que el espesor sea lo suficientemente grande para evitar el arrugamiento o el pandeo de la pared del tubo, se recomienda que el cociente entre el radio exterior R y el espesor t sea menor que $R/t = 12$.

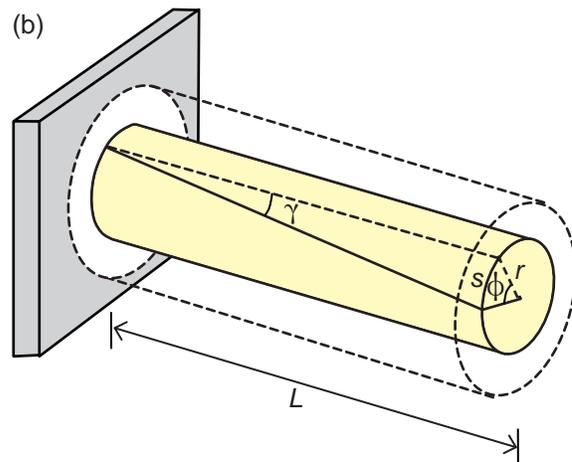
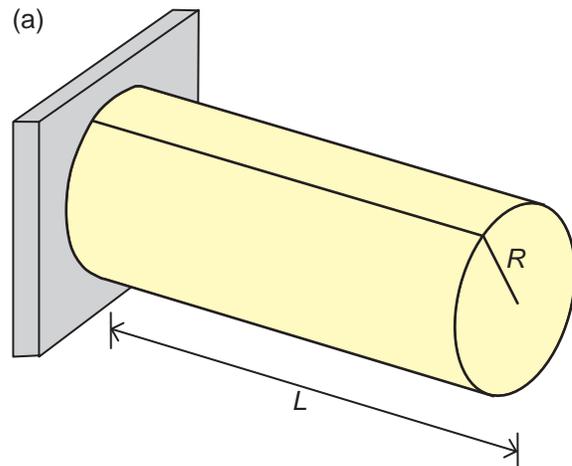


Fig. 2.26. Eje circular a torsión del que se ha desprendido un cilindro de radio r .

Si se considera que todos los esfuerzos cortantes τ se encuentran por debajo del límite elástico, se puede aplicar la ley de Hooke y no habrá deformación permanente.

$$\tau = G\gamma$$

donde G es el módulo de corte o módulo de rigidez del material. El esfuerzo de corte $\tau = G\gamma$ es máximo cuando la deformación unitaria de corte γ es máxima, es decir, en la superficie del eje ($r = R$). Ahora, se obtendrán otras dos ecuaciones, una que relacione al esfuerzo de corte τ y otra al ángulo de torsión ϕ ambas en términos del par de torsión M .





Al sustituir la deformación unitaria cortante $\gamma = r\phi/L$ en la ley de Hooke $\tau = G\gamma$ se tiene

$$\tau = G \frac{r\phi}{L}$$

Así, para una barra circular de longitud L que ha girado un ángulo de torsión ϕ , se tiene que el cociente τ/r se mantiene constante,

$$\frac{\tau}{r} = \frac{G\phi}{L} = \text{constante}$$

Por otra parte, la suma de los momentos de las fuerzas ejercidas sobre cualquier sección transversal del eje debe ser igual al par de torsión M ejercido sobre el eje

$$M = \sum F_i r_i$$

El esfuerzo de corte es $\tau = F/A$, al despejar $F = \tau A$ y sustituir,

$$M = \sum \tau_i A_i r_i$$

Después de multiplicar por r_i/r_i y observar que τ_i/r_i es una constante se tiene

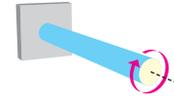
$$M = \sum \frac{\tau_i}{r_i} A_i r_i^2 = \frac{\tau}{r} \sum A_i r_i^2$$

donde a la suma $J = \sum A_i r_i^2$ se le denomina momento polar de inercia de la sección transversal con respecto a su centro. Así, el par de torsión es

$$M = \frac{\tau}{r} J \text{ o despejando } \tau,$$

$$\tau = \frac{Mr}{J}$$

A esta ecuación se le conoce como **ecuación de torsión elástica** que relaciona al esfuerzo de corte τ con el par de torsión M . Además, el momento polar de inercia de un círculo de radio R es



$$J = \frac{1}{2}\pi R^4$$

En el caso de un eje circular hueco de radio interior r_1 y radio exterior R , el momento polar de inercia es

$$J = \frac{1}{2}\pi R^4 - \frac{1}{2}\pi r_1^4$$

En la ecuación de torsión elástica $\tau = Mr/J$, cuando se emplean unidades del SI, el par de torsión M se expresa en Nm, r en m y J en m^4 , se verifica que el esfuerzo de corte τ se expresa en N/m^2 .

La ecuación que relaciona al ángulo de torsión ϕ (en radianes) en términos del par de torsión M se obtiene a partir de la ecuación de torsión elástica

$\tau = \frac{Mr}{J}$, se sustituye la ley de Hooke para cortante $\tau = G\gamma$

$G\gamma = \frac{Mr}{J}$, y la deformación unitaria de corte $\gamma = r\phi/L$

$G\frac{r\phi}{L} = \frac{Mr}{J}$, para obtener el ángulo de torsión en radianes

$$\phi = \frac{ML}{JG}$$

Esta es la ecuación para el ángulo de torsión ϕ en términos del par de torsión M .





Ejemplo 2.14. ¿Qué ángulo de torsión creará un esfuerzo cortante de 60 MPa en la superficie de un eje sólido de acero con 50 mm de diámetro y 1.2 m de largo? El módulo de elasticidad en cortante es 77 GPa.



El ángulo de torsión ϕ se puede obtener con la ecuación $\phi = ML/JG$, pero primero se debe calcular el momento M del par de torsión con la ecuación de torsión elástica $\tau = Mr/J$ y el momento polar de inercia $J = \frac{1}{2}\pi R^4$. También, el ángulo de torsión ϕ se puede obtener con la ecuación de la deformación unitaria cortante $\gamma = r\phi/L$, pero primero se debe calcular dicha deformación unitaria de corte γ con la ley de Hooke para cortante $\tau = G\gamma$. En este ejemplo, se utilizará la segunda alternativa. El esfuerzo cortante es $\tau = 60$ MPa, en la superficie del eje $r = R = D/2 = 0.025$ m y al despejar la deformación unitaria cortante γ de la ley de Hooke

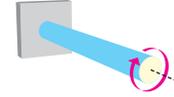
$$\gamma = \frac{\tau}{G} = \frac{60 \times 10^6 \text{ Pa}}{77 \times 10^9 \text{ Pa}} = 7.792 \times 10^{-4}$$

Al despejar el ángulo de torsión ϕ de la deformación unitaria cortante $\gamma = r\phi/L$

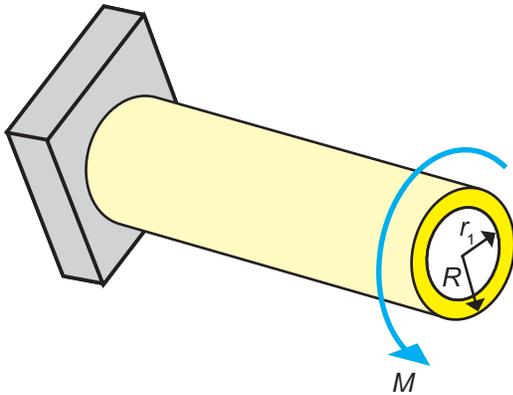
$$\phi = \frac{\gamma L}{r} = \frac{\gamma L}{R} = \frac{(7.792 \times 10^{-4})(1.2 \text{ m})}{0.025 \text{ m}} = 0.0374 \text{ rad}$$

$$\phi = 0.0374 \text{ rad} \left(\frac{180^\circ}{\pi \text{ rad}} \right) = 2.1^\circ$$

El esfuerzo cortante de 60 MPa en la superficie del eje se origina con un ángulo de torsión de 2.1°



Ejemplo 2.15. Un cilindro hueco de acero tiene una longitud $L = 1.3$ m y diámetros exterior e interior $D = 50$ mm y $d_i = 32$ mm, respectivamente. El módulo de elasticidad en cortante es $G = 77$ GPa. Si el par de torsión tiene magnitud $M = 1.5$ kN·m, (a) ¿cuál es el esfuerzo cortante máximo en el eje? (b) ¿Cuánto vale el esfuerzo cortante mínimo? (c) ¿Cuál es el ángulo de torsión entre los extremos del eje?



(a) *Esfuerzo cortante máximo.* El esfuerzo cortante τ se puede obtener de la ecuación de torsión elástica $\tau = Mr/J$, dicho esfuerzo cortante $\tau = G\gamma$ es máximo cuando la deformación unitaria de corte γ es máxima, es decir, en la superficie exterior del eje ($r = R$). El par de torsión es $M = 1.5$ kNm, el radio exterior $R = D/2 = 0.025$ m y el momento polar de inercia para el eje cilíndrico hueco $J = \frac{1}{2}\pi R^4 - \frac{1}{2}\pi r_i^4$, donde $r_i = d_i/2 = 0.016$ m.

$$J = \frac{1}{2}\pi(0.025 \text{ m})^4 - \frac{1}{2}\pi(0.016 \text{ m})^4 = 5.1 \times 10^{-7} \text{ m}^4$$

El esfuerzo cortante máximo ($r = R$) es

$$\tau = \frac{Mr}{J} = \frac{MR}{J} = \frac{(1500 \text{ Nm})(0.025 \text{ m})}{5.1 \times 10^{-7} \text{ m}^4} = 7.3 \times 10^7 \text{ Pa} = 73 \text{ MPa}$$

(b) El *esfuerzo mínimo de corte* τ ocurre en la superficie interior del cilindro ($r_i = 0.016$ m) y se puede calcular con la ecuación de torsión elástica $\tau = Mr/J$.

$$\tau = \frac{Mr}{J} = \frac{Mr_i}{J} = \frac{(1500 \text{ Nm})(0.016 \text{ m})}{5.1 \times 10^{-7} \text{ m}^4} = 4.7 \times 10^7 \text{ Pa} = 47 \text{ MPa}$$

(c) El *ángulo de torsión* ϕ (en radianes) entre los extremos del cilindro se puede calcular con la ecuación $\phi = ML/JG$. El par de torsión es $M = 1.5$ kN m, la longitud del cilindro $L = 1.3$ m, su momento polar de inercia $J = 5.1 \times 10^{-7} \text{ m}^4$ y su módulo de elasticidad en cortante $G = 77$ GPa.

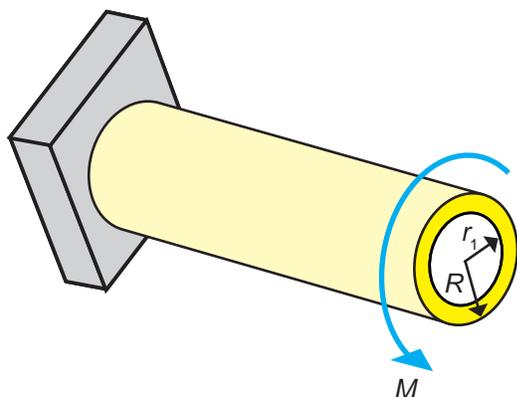
$$\phi = \frac{ML}{JG} = \frac{(1500 \text{ Nm})(1.3 \text{ m})}{(5.1 \times 10^{-7} \text{ m}^4)(77 \times 10^9 \text{ Pa})} = 0.0496 \text{ rad}$$

$$\phi = 0.0496 \text{ rad} \left(\frac{180^\circ}{\pi \text{ rad}} \right) = 2.8^\circ$$

Cuando el par de torsión tiene magnitud $M = 1.5$ kN m, el esfuerzo cortante máximo (en la superficie exterior del eje) es 73 MPa, el esfuerzo cortante mínimo (en la superficie interior del cilindro) es 47 MPa y el ángulo de torsión entre los extremos del eje es 2.8° .



Ejemplo 2.16. Un eje de transmisión hueco de acero ($G = 77 \text{ GPa}$) mide 1.5 m de largo y sus diámetros exterior e interior son $D = 60 \text{ mm}$ y $d_1 = 40 \text{ mm}$. Si el esfuerzo cortante no debe exceder 60 MPa y el ángulo de torsión permisible es de 2.5° , ¿cuál es el valor máximo M del par de torsión que puede aplicarse al eje?



Valor máximo M del par de torsión que puede aplicarse para que el esfuerzo cortante no exceda 60 MPa o el ángulo de torsión sea menor de 2.5° . La máxima magnitud M del par de torsión se determina mediante dos condiciones, con el esfuerzo cortante permisible y con el ángulo de torsión permisible. Se calculan dos valores de M , uno para cada condición. El menor de estos dos valores será la condición limitante, lo que proporciona el valor máximo de M que puede aplicarse al eje.

Cuando la condición es el esfuerzo cortante permisible, la magnitud M del par de torsión se puede obtener de la ecuación de torsión elástica $\tau = Mr/J$. El esfuerzo cortante máximo permisible $\tau = 60 \text{ MPa}$ se presenta en la superficie exterior del eje donde $r = R = D/2 = 0.030 \text{ m}$ y el momento polar de inercia para el eje cilíndrico hueco es $J = \frac{1}{2}\pi R^4 - \frac{1}{2}\pi r_1^4$, donde $r_1 = d_1/2 = 0.020 \text{ m}$.

$$J = \frac{1}{2}\pi(0.030 \text{ m})^4 - \frac{1}{2}\pi(0.020 \text{ m})^4 = 1.021 \times 10^{-6} \text{ m}^4$$

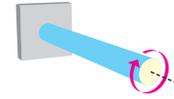
Al despejar de la ecuación de torsión elástica $\tau = Mr/J$ la magnitud M del par de torsión es

$$M = \frac{\tau J}{r} = \frac{\tau J}{R} = \frac{(60 \times 10^6 \frac{\text{N}}{\text{m}^2})(1.021 \times 10^{-6} \text{ m}^4)}{0.030 \text{ m}} = 2042 \text{ Nm} = 2.04 \text{ kNm}$$

Cualquier magnitud M del par de torsión mayor que este valor producirá un esfuerzo cortante τ que sobrepasará el esfuerzo cortante permisible de 60 MPa .

Ahora, cuando la condición es el ángulo de torsión permisible, la magnitud M del par de torsión se puede obtener de la ecuación $\phi = ML/JG$. El ángulo de torsión permisible es $\phi = 2.5^\circ(0.04363 \text{ rad})$, la longitud del cilindro es $L = 1.5 \text{ m}$, el momento polar de inercia es $J = 1.021 \times 10^{-6} \text{ m}^4$ y el módulo de elasticidad en cortante es $G = 77 \text{ GPa}$. Al despejar de la ecuación $\phi = ML/JG$ la magnitud M del par de torsión es

$$M = \frac{\phi J G}{L} = \frac{(0.04363 \text{ rad})(1.021 \times 10^{-6} \text{ m}^4)(77 \times 10^9 \text{ Pa})}{1.5 \text{ m}} = 2287 \text{ Nm} = 2.29 \text{ kNm}$$



Cualquier magnitud M del par de torsión mayor que este valor producirá un ángulo de torsión ϕ mayor que el permisible de 2.5° .

En este ejemplo, la condición limitante la proporciona el esfuerzo cortante permisible (y no el ángulo de torsión permisible), por lo que el valor máximo del par de torsión M que puede aplicarse al eje es 2.04 kN m .

2.6. Esfuerzo de volumen y deformación de volumen

Los fluidos incluyen a los líquidos y gases, como el agua o el aire. Cuando un cuerpo se sumerge en un fluido, el fluido ejerce una fuerza sobre todas las partes de la superficie del cuerpo y cambia un poco su volumen; esta fuerza es *perpendicular* a la superficie del cuerpo. La fuerza F_\perp por unidad de área que el fluido ejerce sobre la superficie de un objeto sumergido es la **presión** p en el fluido.

$$p = \frac{F_\perp}{A}$$

La presión aumenta con la profundidad, cuanto más profundo se sumerja un cuerpo, mayor será la presión que el fluido ejerce sobre el cuerpo. Las unidades de presión son las mismas que las del esfuerzo (pascal o sus múltiplos). Una unidad común para presión es la atmósfera, que se abrevia atm. Una atmósfera es la presión promedio que ejerce la atmósfera terrestre a nivel del mar.

$$1 \text{ atm} = 1.01325 \times 10^5 \text{ Pa}$$

Un cambio de presión (o esfuerzo de volumen, Δp) produce una deformación de volumen ΔV (Fig. 2.27). Se define la **deformación unitaria de volumen** e como el cociente del cambio de volumen ΔV entre el volumen original V_0 .

$$e = \frac{\Delta V}{V_0}$$

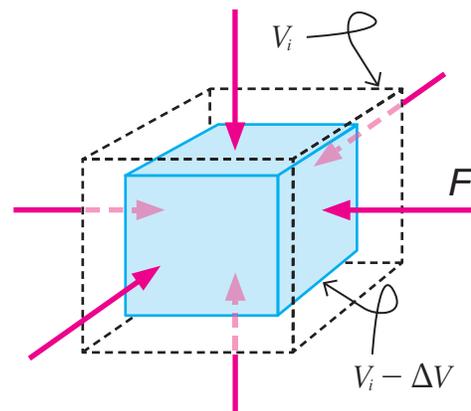


Figura 2.27. Objeto sometido a un cambio de presión Δp (o esfuerzo de volumen).





Donde se debe hacer la distinción entre la deformación de volumen ΔV y la deformación unitaria de volumen e . La deformación de volumen $\Delta V = V - V_0$ es la diferencia entre el volumen final V del cuerpo después de ser deformado y el volumen inicial V_0 del cuerpo antes de la deformación.

Si el cambio de presión y la deformación unitaria de volumen son proporcionales, se cumple la **ley de Hooke para volumen**

$$\Delta p = -Be$$

donde B es el **módulo de volumen** y tiene unidades de presión (Pa o atm). El signo negativo se debe a que un *aumento* de presión siempre origina una *disminución* de volumen. Valores del módulo de volumen B para algunos sólidos se indican en la Tabla 2.4.

Al recíproco del módulo de volumen se le denomina **compresibilidad k**

$$k = \frac{1}{B}$$

Tabla 2.4. Módulo de volumen.

Material	B (GPa)
Níquel	170
Acero	160
Cobre	140
Aluminio	75
Latón	60
Vidrio óptico	50
Plomo	41

Tabla 2.5. Compresibilidad

Material	k (Pa ⁻¹)
Alcohol etílico.	110.0×10^{-11}
Disulfuro de carbono.	93.0×10^{-11}
Agua.	45.8×10^{-11}
Glicerina.	21.0×10^{-11}
Mercurio	3.7×10^{-11}

En el Sistema Internacional, la unidad de compresibilidad es Pa⁻¹ o atm⁻¹. En la Tabla 2.5 se indican valores de compresibilidad k para varios líquidos. Los materiales con compresibilidad k grande son fáciles de comprimir (módulo de volumen B pequeño). El volumen final V de un cuerpo después de ser deformado debido a ser sometido a un cambio de presión Δp se puede obtener al sustituir la deformación unitaria de volumen $e = \Delta V/V_0$ en la ley de Hooke $\Delta p = -Be$, despejar la deformación de volumen $\Delta V (= V - V_0)$ y luego el volumen final V .

$$\Delta p = -Be$$

$$\Delta p = -B \frac{\Delta V}{V_0}$$

$$\Delta V = -\frac{V_0 \Delta p}{B}$$

$$V - V_0 = -\frac{V_0 \Delta p}{B}$$

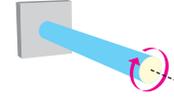
$$V = V_0 - \frac{V_0 \Delta p}{B}$$

$$V = V_0 \left(1 - \frac{\Delta p}{B}\right)$$

En términos de la compresibilidad $k = 1/B$,

$$\Delta V = -kV_0 \Delta p$$

$$V = V_0(1 - k\Delta p)$$



Ejemplo 2.17. Una esfera sólida de latón tiene un volumen de 0.03 m^3 (30 L). La esfera se arroja al océano a una profundidad donde el cambio de presión es de 20 MPa. Para el latón el módulo de volumen es de 60 GPa. Calcular la deformación de volumen que experimentó la esfera, así como, la constante de compresibilidad del latón.

Se proporciona el volumen inicial V_0 y el cambio de presión Δp , entonces la deformación de volumen ΔV se puede calcular empleando el módulo de volumen B con la ecuación $\Delta V = -V_0 \Delta p / B$. La constante de compresibilidad puede determinarse calculando el recíproco del módulo de volumen $k = 1/B$.

$$\Delta V = -\frac{V_0 \Delta p}{B} = -\frac{(0.03 \text{ m}^3)(20 \times 10^6 \text{ Pa})}{60 \times 10^9 \text{ Pa}} = -1 \times 10^{-5} \text{ m}^3$$

$$k = \frac{1}{B} = \frac{1}{60 \times 10^9 \text{ Pa}} = 1.7 \times 10^{-11} \text{ Pa}^{-1}$$

El signo negativo del cambio de volumen indica que el aumento de presión provoca que el volumen disminuya. La deformación de volumen es pequeña, el volumen de la esfera sólo disminuye en 10 mL (recordar que $1 \text{ m}^3 = 1000 \text{ L}$).

Ejemplo 2.18. Un litro de alcohol etílico contenido en un recipiente flexible se somete a un cambio de presión de 2 MPa. El alcohol tiene una compresibilidad de $110 \times 10^{-11} \text{ Pa}^{-1}$. ¿Cuál es el volumen final?

Se proporciona el volumen inicial V_0 , el cambio de presión Δp y la compresibilidad k , entonces el volumen final del alcohol se puede obtener con la ecuación $V = V_0 (1 - k\Delta p)$

$$V = V_0 (1 - k\Delta p) = [1 \text{ L}][1 - (110 \times 10^{-11} \text{ Pa}^{-1})(2 \times 10^6 \text{ Pa})] = 0.9978 \text{ L}$$

La deformación de volumen $\Delta V (= V - V_0)$ es pequeña, el volumen disminuye sólo en -2.2 mL.





3.7. Actividades de sistematización y consolidación

3.7.1. Sopa de letras con palabras clave del capítulo



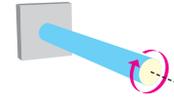
Escribe cada palabra en Wik pedia o en Encarta y da un vistazo a lo que encuentres.



- | | |
|-------------|------------|
| Compresión | Momento |
| Cortante | Normal |
| Deformación | Paralelo |
| Elasticidad | Presión |
| Elástico | Sólido |
| Esfuerzo | Tangencial |
| Estructura | Tensión |
| Externo | Torsión |
| Flexión | Volumen |
| Fuerza | |
| Inelástico | |
| Interno | |

¿Qué tipo de esfuerzo presenta el clavo?



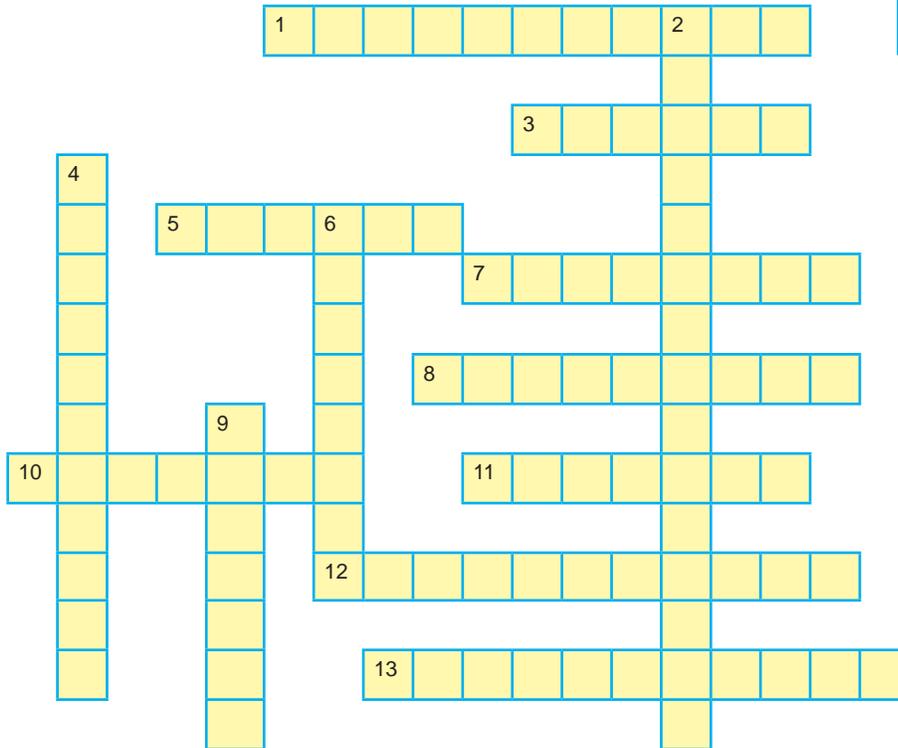


3.7.2. Conexión de conceptos e ideas

<ol style="list-style-type: none"> 1. Ángulo que ha girado la sección transversal de un cilindro sometido a torsión. 2. Cambio de forma que se produce por variación de la temperatura o por fuerzas externas que actúan sobre un sólido. 3. Cociente del cambio de volumen entre el volumen inicial de una sustancia. 4. Cociente del desplazamiento entre dos superficies y la distancia transversal entre ellas. 5. Cociente entre el alargamiento de un cuerpo y su longitud inicial. 6. Fuerza que actúa a lo largo de un elemento y cuya línea de acción pasa por el centroide de la sección del elemento. 7. Fundamento que establece que el esfuerzo es directamente proporcional a la deformación unitaria. 8. Magnitud máxima de una fuerza por debajo de la cual el alargamiento de un cuerpo elástico es proporcional a la fuerza. 9. Magnitud máxima de una fuerza que un material elástico puede soportar sin que experimente deformaciones permanentes. 10. Momento de inercia de un área en relación a un eje perpendicular a su plano. 11. Momento de un par de fuerzas que tiende a hacer girar a un elemento prismático con respecto a su eje longitudinal. 12. Parámetro de un material que caracteriza el cambio de presión (o esfuerzo de volumen) respecto a los cambios en su volumen. 13. Parámetro de un material que caracteriza el esfuerzo requerido para generar un cambio de longitud de un cuerpo. 14. Parámetro de un material que caracteriza la deformación que experimenta un cuerpo cuando se aplica una fuerza paralela a una de sus caras. 15. Pendiente en un gráfico esfuerzo contra deformación unitaria, en la región lineal del gráfico. 16. Razón entre la magnitud de la fuerza paralela a la sección transversal de un sólido y el área de ésta. 17. Razón entre la magnitud de la fuerza perpendicular a la sección transversal de un sólido y el área de ésta. 18. Razón entre la magnitud de la fuerza perpendicular a la sección transversal de un sólido y el área de ésta. Cuando se trabaja con fluidos se le denomina cambio de presión. 19. Representación gráfica del comportamiento de un material bajo la acción de un esfuerzo. 	<ul style="list-style-type: none"> () Par de torsión () Momento polar de inercia () Módulo de Young () Módulo de Young () Módulo de volumen () Módulo de corte () Límite proporcional () Límite elástico () Ley de Hooke () Fuerza normal () Esfuerzo normal () Esfuerzo de volumen () Esfuerzo de corte () Diagrama de esfuerzo-deformación () Deformación unitaria normal () Deformación unitaria de volumen () Deformación unitaria de corte () Deformación () Ángulo de torsión
	 <p>¿Los hilos de una telaraña están sometidos a tensión o a compresión?</p>



3.7.3. Crucigrama



¿Las patas del banco están sometidas a tensión o a compresión?

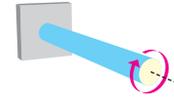


Horizontales

1. Si las deformaciones no desaparecen cuando cesan las fuerzas exteriores que las producen se dice que son cuerpos.
3. Tipo de esfuerzo cuando la fuerza aplicada a un cuerpo es perpendicular al área de su sección transversal.
5. Unidad de esfuerzo del Sistema Internacional de Unidades, equivale a una fuerza de un newton que actúa sobre una superficie de un metro cuadrado.
7. Intensidad de la fuerza por unidad de área.
8. Si las deformaciones desaparecen cuando cesan las fuerzas exteriores que las producen se dice que son cuerpos.
10. Intersección de un plano con un sólido.
11. Deformación que se presenta cuando se aplica un par de fuerzas sobre el eje longitudinal de un elemento.
12. Parte de la mecánica que estudia el comportamiento de los cuerpos que tienen la propiedad de recuperar su tamaño y forma cuando desaparecen las fuerzas que producen las deformaciones.
13. Cambio en las dimensiones de un sólido, por lo que modifica su forma.

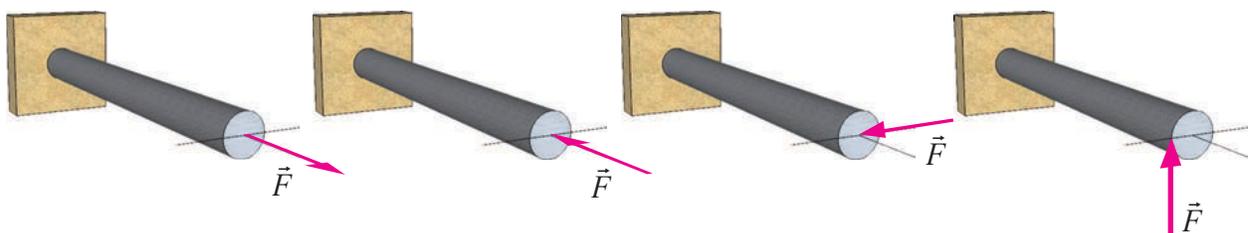
Verticales

2. Recíproco del módulo volumétrico
4. Sección que se obtiene cuando el plano de corte es perpendicular al eje longitudinal.
6. Tipo de esfuerzo cuando la fuerza aplicada a un cuerpo es paralela a una de sus caras.
9. Capacidad de un objeto sólido o elemento estructural para soportar esfuerzos sin adquirir grandes deformaciones o desplazamientos.

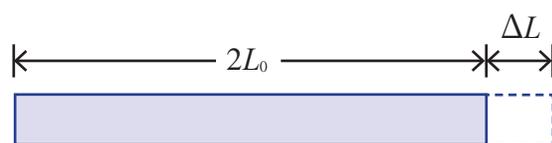
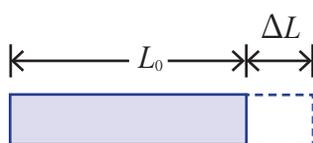


3.7.4. Actividades de repaso

1. Construye un mapa conceptual que relacione conceptos, ideas, ecuaciones, unidades, y ejemplos reales que clarifiquen e integren la unidad temática en estudio.
2. ¿Que relación hay entre esfuerzos de tensión y esfuerzos de compresión? Describa cada uno de ellos y mencione al menos cinco ejemplos.
3. ¿En qué consisten el esfuerzo normal, el esfuerzo de corte y el esfuerzo de volumen? ¿Qué símbolos se utilizan para representarlos, en que unidades se miden en el SI y cuáles son las ecuaciones mediante las cuales se definen?
4. Explica en qué consisten la deformación unitaria normal, la deformación unitaria cortante y la deformación unitaria de volumen. ¿Qué símbolos se utilizan para representarlas, en qué unidades se miden en el SI y cuáles son las ecuaciones mediante las cuales se definen?
5. ¿Cómo se definen el módulo de Young, el módulo de corte y el módulo de volumen? ¿Qué símbolos se utilizan para representarlos, en qué unidades se miden en el SI y cuales son las ecuaciones correspondientes a la ley de Hooke en las cuales se involucran?
6. Explica en qué consisten el momento de torsión, el ángulo de torsión y el momento polar de inercia.
7. Construye un diagrama de cuerpo libre y describe el esfuerzo y la deformación presente en cada situación.



8. ¿Cuál de los dos elementos estructurales tiene menor deformación unitaria, si la longitud inicial de uno es el doble de la del otro, están sometido a una misma fuerza perpendicular a sus secciones transversales y con la misma deformación?





3.7.5. Ejercicios de repaso

- Una carga de 700 N debe ser soportada por un alambre de cobre. Determinar el diámetro que como mínimo debe tener el alambre, si se sabe que el esfuerzo no debe exceder de 120 MPa.

Respuesta: 2.73 mm.

- Un alambre tiene una deformación unitaria de 0.0002 y una deformación total de 7 mm. ¿Cuál es la longitud de este alambre?

Respuesta: 35 m.

- Una varilla cilíndrica de acero de 2.00 m de longitud estará sujeta a una fuerza axial de tensión de 80 kN. La elongación total no debe exceder de 1.0 mm. Determina el diámetro que debe tener la varilla.

Respuesta: 8.00×10^{-4} m.

- Una cuerda de acero de piano mide 1.60 m de longitud y 0.20 cm de diámetro. ¿Cuál es la tensión en la cuerda si se estira 0.25 cm cuando se tensa?

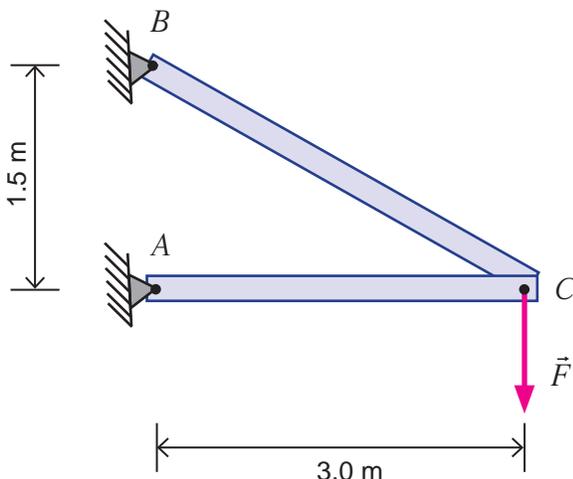
Respuesta: 982 N.

- Un gato hidráulico debe sostener la mitad del peso de un coche de 1500 kg. Si el esfuerzo es de 100 MPa y el gato tiene una sección circular maciza, ¿cuál debe ser, como mínimo, el radio de esta?

Respuesta: 5 mm.

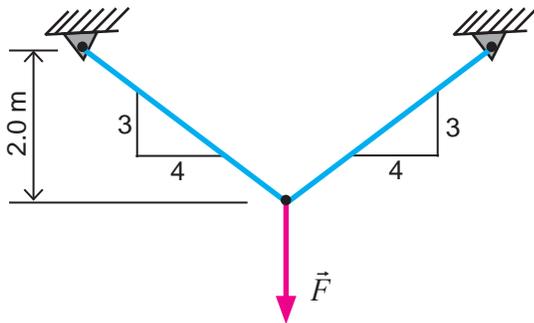
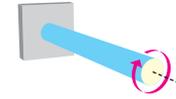
- Un poste de madera de 10 cm por 15 cm por 3.00 m sostiene una carga de 1000 N a lo largo de su longitud. (a) Hallar el esfuerzo y la deformación unitaria en el poste. (b) ¿Cuál es su cambio de longitud? El módulo de Young de la madera del poste es 10 GPa.

Respuesta: 6.67×10^{-6} , 20 μ m.



- Calcular el valor de la fuerza F que puede aplicarse a la estructura sabiendo que el esfuerzo de la barra BC es de 140 MPa y que el esfuerzo en la barra AC es de 80.0 MPa, ambas con sección transversal de 5.0 cm por 2.0 cm.

Respuesta: 4.0×10^4 N.



8. Determina el diámetro necesario para el alambre del sistema mostrado en la figura. El esfuerzo en los alambres es de 165 MPa, y la fuerza aplicada es de 36 N .

Respuesta: 15 mm.

9. Los datos de la tabla anexa se obtuvieron de una prueba a tensión de un espécimen de aleación de aluminio. Grafique los datos y luego determine el módulo de elasticidad E .

Respuesta: 10.3 MPa.

10. Un ingeniero por su seguridad al escalar sobre un edificio, utiliza una cuerda de nylon que mide 50 m de largo y 1.0 cm de diámetro. Cuando el ingeniero de 90 kg se sostiene, la cuerda se alarga 1.6 m. Determine su módulo de Young.

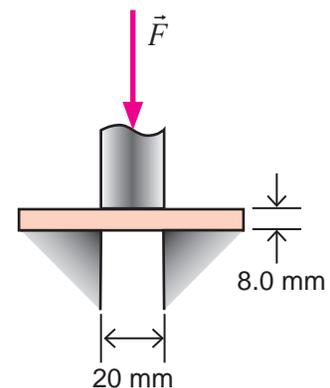
Respuesta: 3.5×10^8 Pa.

Esfuerzo (R a)	Deformación unitaria
8	0.0006
17	0.0015
27	0.0024
35	0.0032
43	0.004
50	0.0046
58	0.0052
62	0.0058
64	0.0062
65	0.0065
67	0.0073
68	0.0081



11. Para realizar un agujero en una placa de 8.0 mm de espesor se usa una broca de 20 mm de diámetro. Si se requiere una fuerza de 110 N , ¿cuál es el esfuerzo cortante en la placa y el esfuerzo de compresión en la broca?

Respuesta: 2.2×10^8 Pa, 3.5×10^8 Pa.



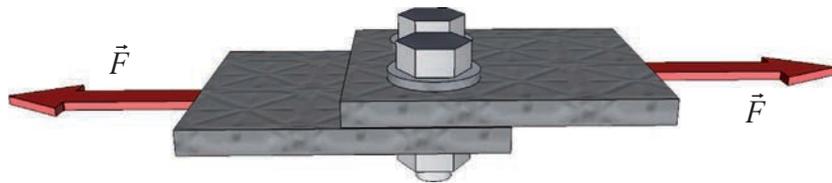


12. Un ciclista de 75 kg apoya todo su peso sobre un pedal, cuyo eje tiene un diámetro de 1.5 cm. Halle el esfuerzo cortante sobre el eje del pedal.

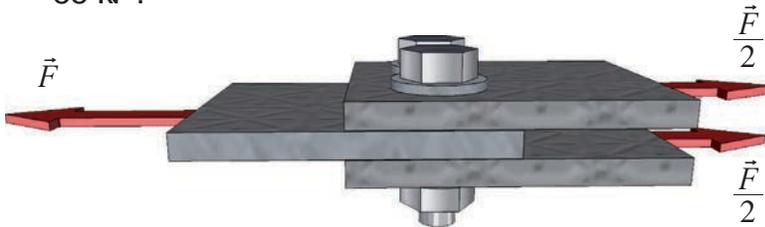
Respuesta: 4.1×10^6 Pa.

13. Dos placas se unen por medio de dos pernos de 1.5 cm de diámetro, como se muestra en la figura. Determinar el esfuerzo cortante en cada perno debido a una fuerza de 23 kN.

Respuesta: 6.5×10^7 Pa.



14. Tres placas se unen por medio de dos pernos de 2.0 cm de diámetro, como se indica en la figura. Determinar el esfuerzo cortante en cada perno debido a una fuerza de 55 kN.



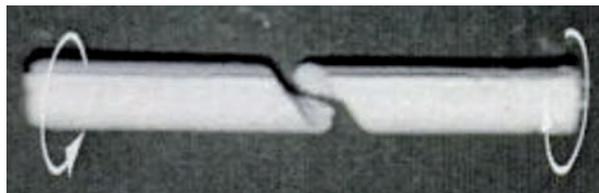
Respuesta: 4.4×10^7 Pa.

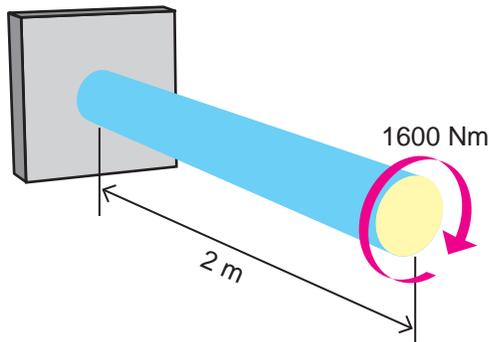
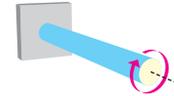
15. Un niño se desliza a través de un piso en un par de zapatos con suela de goma. La fuerza de fricción que actúa sobre cada pie es de 20.0 N. El área de la huella de cada suela de zapato es de 14.0 cm^2 , y el grosor de cada suela es de 5.00 mm. Encuentre la distancia horizontal que se desplazan las partes superior e inferior de la suela. El módulo de corte del hule es de 3.00 MPa.

Respuesta: 2.4×10^{-5} m.

16. Un gis (tiza) de 1.0 cm de diámetro se somete a dos momentos de torsión, de sentidos opuestos y de 200 Nm en los extremos. Calcular el esfuerzo cortante producido.

Respuesta: 25465 Pa.

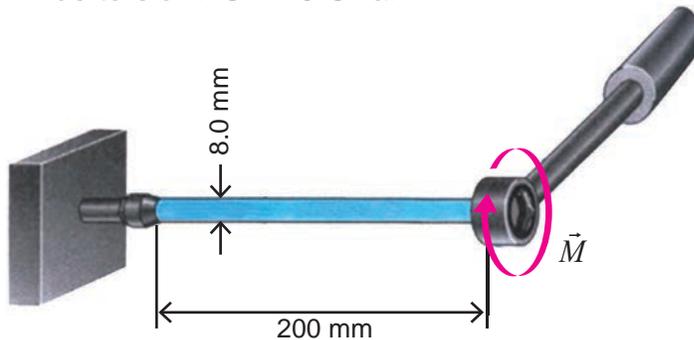




17. Calcular el diámetro que debe tener la barra sabiendo que el ángulo de torsión entre sus extremos es de 4.0° y el esfuerzo cortante del material es de 60 MPa. El material tiene un módulo de corte de 11 GPa.

Respuesta: 30 cm.

18. El eje de acero de una llave de cubo tiene un diámetro de 8.0 mm y una longitud de 200 mm. Si el esfuerzo en la barra es 60 MPa, ¿cuál es el momento de torsión que se ejerce con la llave? ¿Qué ángulo ϕ (en grados) girará el eje ante la acción del par de torsión? $G = 78$ GPa.



Respuesta: 0.0006° .

19. Un cilindro hueco de acero con un diámetro exterior de 80 mm y un diámetro interior de 50 mm está sujeto a un par de 360 Nm. Determine los esfuerzos máximos y mínimos del cilindro, así como, el ángulo de torsión entre los extremos de éste.

Respuesta: 5.28×10^5 Pa, 3.30×10^5 Pa y 0.005° .

20. Calcule el cambio de presión requerido para ocasionar una disminución en el volumen de aceite industrial de un 1.00 por ciento. El módulo volumétrico del aceite industrial es 1.3 GPa.

Respuesta: -1.3×10^7 Pa.

21. Para las condiciones descritas en el problema anterior, suponga que el 1.00 por ciento del cambio de volumen se presenta en un cilindro que tiene un diámetro interior de 2.54 cm y una longitud de 30.0 cm. Calcule la distancia axial que el pistón debe recorrer mientras se da el cambio de volumen.

Respuesta: 3 mm.

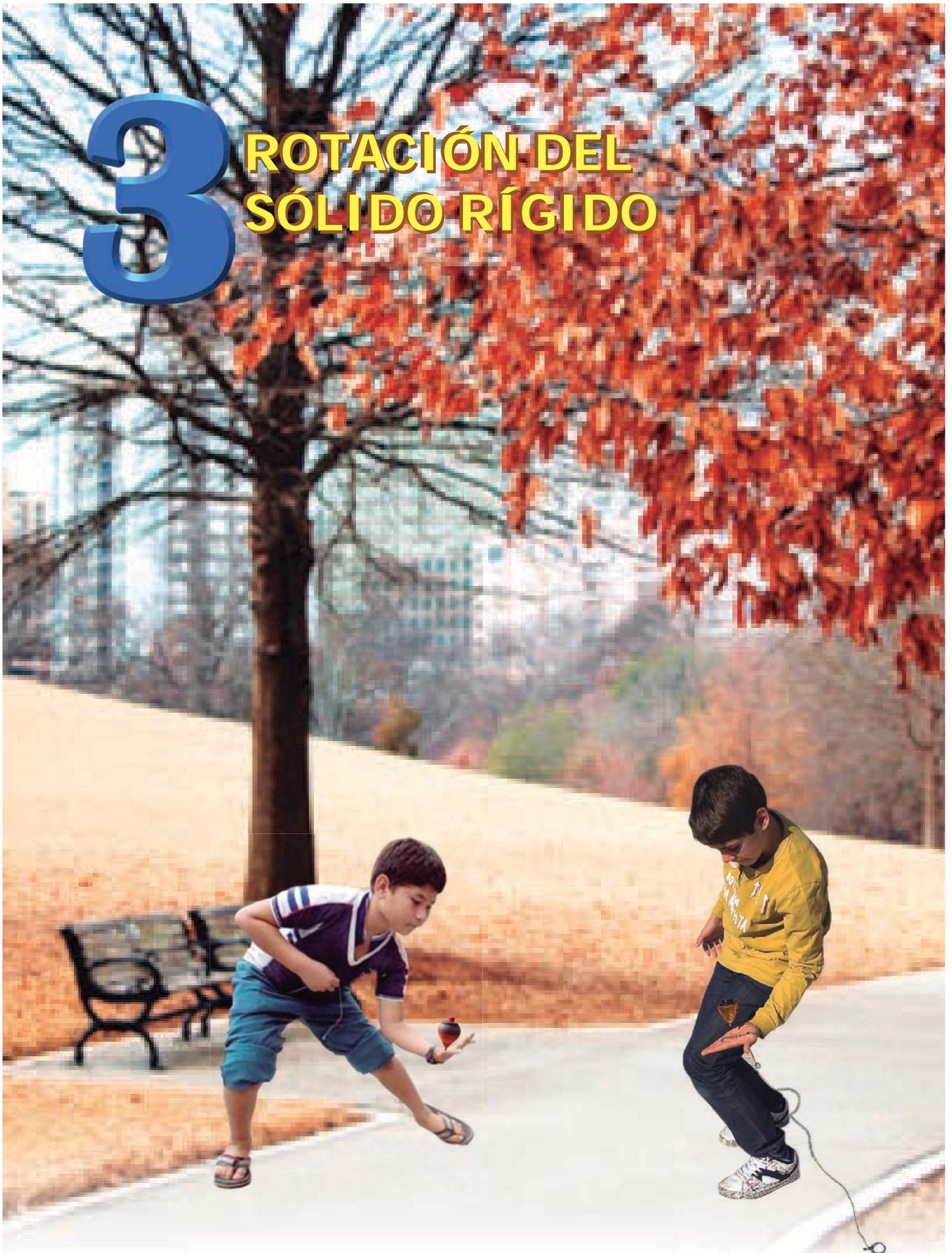
22. Un cierto sistema hidráulico opera a 20 MPa. Calcule el cambio porcentual en el volumen de aceite del sistema mientras la presión se aumenta desde cero hasta 20 MPa. El módulo de volumen del aceite industrial es 1.3 GPa.

Respuesta: -1.5×10^{-2} .



3

ROTACIÓN DEL SÓLIDO RÍGIDO





3.1. Movimiento de rotación de un cuerpo rígido

En la unidad 1 se vió que el movimiento general de un cuerpo rígido puede considerarse una combinación de **traslación** y **rotación**. En el caso de la traslación del cuerpo sólido aprendiste que es el **centro de masa** el que describe tal movimiento y que se comporta según las leyes de Newton, como se estudió en Mecánica I y Mecánica II.

En esta unidad el interés es estudiar el **movimiento de rotación de un cuerpo rígido**. Por lo que las preguntas a contestar son: *¿Qué magnitudes están involucradas en la descripción del movimiento de rotación de un cuerpo rígido? ¿Cómo se describe el movimiento de rotación de un cuerpo rígido? ¿Cuáles son las leyes que rigen a un movimiento de rotación? ¿Cuál es la ecuación fundamental que describe el movimiento de rotación de un cuerpo rígido? ¿Cuáles son las ecuaciones asociadas a la energía que describen el sistema en rotación?*

3.1.1. Tipos de movimiento de los cuerpos rígidos

El movimiento de un cuerpo rígido puede ser sumamente complejo. Así, por ejemplo, un trompo rota alrededor de su eje de simetría, pero a su vez dicho eje rota y se traslada, lo cual se hace más evidente a medida que se amortigua su movimiento. Por eso nos limitaremos a estudiar movimientos relativamente simples.

¿Qué experiencia tienes con respecto al movimiento de los cuerpos rígidos? Comenta con tus compañeros y redacta una vivencia que hayas tenido con ello.



Fig. 3.1. El trompo es un ejemplo de cuerpo rígido cuyo movimiento es relativamente complejo: rotación alrededor de un eje y a la vez rotación y traslación del eje.

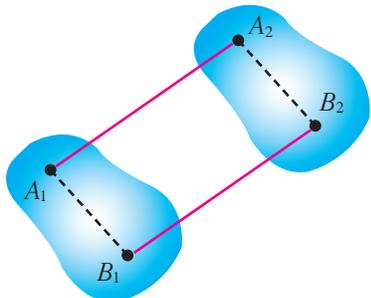


Fig. 3.2. En un movimiento de traslación rectilíneo, las trayectorias que describen las partículas del sólido son rectilíneas y paralelas entre sí.

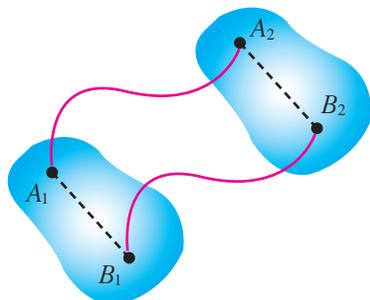


Fig. 3.3. En un movimiento de traslación curvilíneo, las trayectorias que describen las partículas del sólido son curvilíneas y paralelas entre sí.

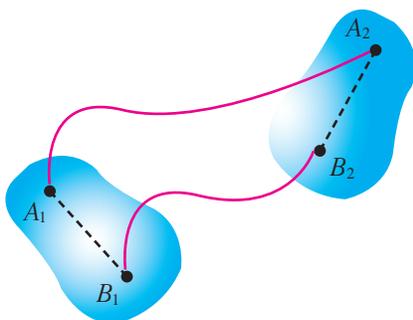
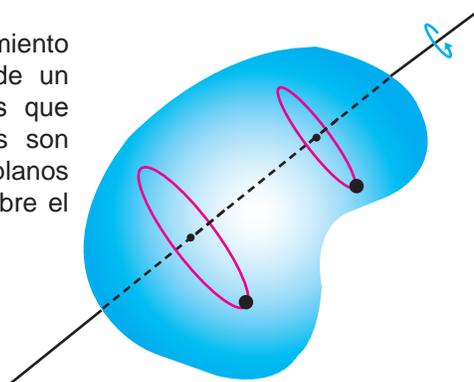


Fig. 3.5. En un movimiento plano general, el cuerpo rígido experimenta una combinación de traslación y rotación.

1. Movimiento de traslación. Este movimiento ya se ha estudiado en Mecánica I y Mecánica II. Se afirma que un movimiento es de traslación si una recta imaginaria trazada sobre el cuerpo siempre permanece paralela a sí misma. También puede observarse que en la traslación todas las partículas que constituyen el cuerpo se mueven a lo largo de trayectorias paralelas. Si estas trayectorias son líneas rectas, se afirma que el movimiento es una traslación rectilínea (figura 3.2); si las trayectorias son líneas curvas, el movimiento es una traslación curvilínea (figura 3.3).

Fig. 3.4. En un movimiento de rotación alrededor de un eje fijo, las trayectorias que describen las partículas son circunferencias, sobre planos paralelos, con centro sobre el eje de rotación.



2. Movimiento de rotación alrededor de un eje fijo. En este movimiento, las partículas que forman al cuerpo rígido se mueven en planos paralelos a lo largo de circunferencias centradas sobre una misma línea recta, denominada eje de rotación (Fig. 3.4). Si este eje, interseca al cuerpo rígido, las partículas localizadas sobre el eje tienen velocidad cero y aceleración cero.

3. Movimiento plano general. Consiste en el movimiento de rotación de un cuerpo alrededor de un eje que se mueve siempre paralelo a sí mismo (Fig. 3.5). Los puntos del cuerpo se mueven en puntos paralelos entre sí. Ejemplos típicos son el movimiento de las ruedas de una bicicleta o de un carro cuando viajan en línea recta.

En esta unidad se analizará el “**movimiento de rotación alrededor de un eje fijo**” y el “**movimiento plano**”, mientras que los movimientos más complejos se estudiarán en cursos avanzados de ingeniería.



3.1.2. Movimiento de rotación alrededor de un eje fijo

En este apartado se dará respuesta a las primeras dos preguntas que se plantearon al inicio del capítulo, es decir, ¿Qué magnitudes están involucradas en la descripción del movimiento de rotación de un cuerpo? ¿Cómo se describe el movimiento de rotación de un cuerpo rígido?

Consideremos un trompo con un movimiento “sereno”, en que la orientación de su eje de rotación no varía, sino que es fija (Fig. 3.6). El eje de rotación del trompo es una línea recta imaginaria, que atraviesa el juguete de lado a lado desde la punta hasta la cabeza del mismo y que sale por encima de éste.

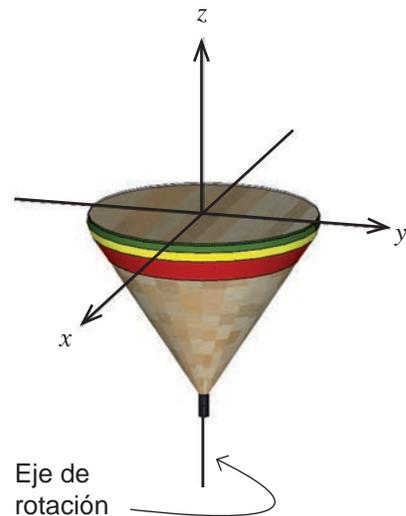


Fig. 3.6. Haciendo un corte imaginario al trompo, perpendicular al eje de rotación, se verá una superficie circular.

Imaginemos que se realiza un corte al trompo, perpendicular al eje de rotación. Se tendrá algo muy parecido a la figura 3.6. Se puede hacer un esquema de la superficie del trompo en un plano xy y describir, por ejemplo, el movimiento de uno de los puntos más externos del juguete, como se puede visualizar en la figura 3.7.

Cuando un cuerpo está girando alrededor de un eje fijo, cualquier punto P ubicado en el cuerpo viaja por una *trayectoria circular*. Por consiguiente, es posible describir el movimiento del trompo apoyandonos en el movimiento circular de sus puntos.

En la figura 3.7 se ha elegido el eje z como aquél que coincide con el eje de rotación del trompo, el cual a su vez es su eje de simetría. El punto P representa un punto del trompo que se mueve en el plano xy y describe una circunferencia de radio r .

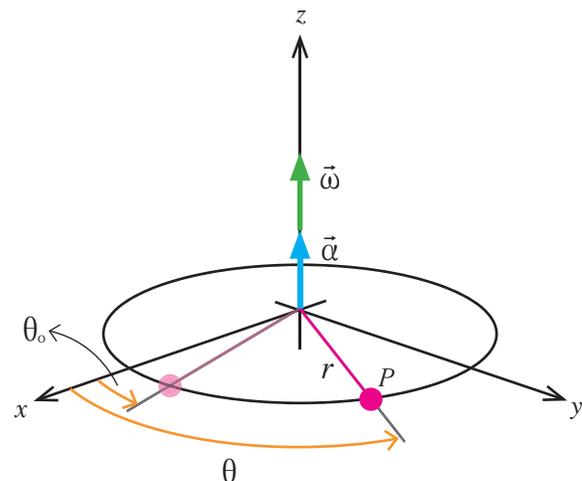
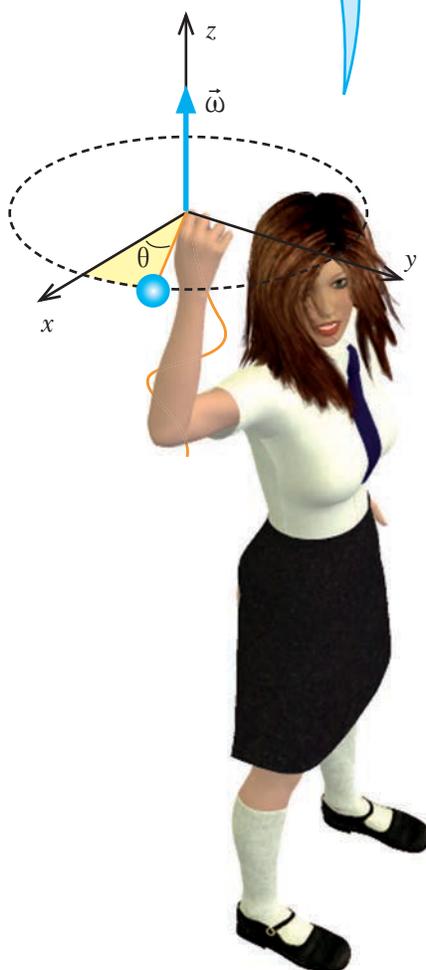


Fig. 3.7. Se representa la superficie del trompo de la figura 3.6 en un plano xy , donde el punto rojo P representa un punto del trompo.

Es importante señalar la analogía que hay entre las magnitudes que involucran el movimiento de traslación y el movimiento de rotación. En el primero se emplean la posición, el desplazamiento, la velocidad y la aceleración lineales, mientras que en



¿Cuáles parámetros crees que involucra el movimiento de rotación de un sólido rígido? Consulta el Internet para recabar información y compara con los que mencionaste. ¿Son los mismos parámetros?



el segundo se utiliza la posición, el desplazamiento, la velocidad y la aceleración angulares.

La posición angular θ es el ángulo entre una línea cualquiera trazado sobre el cuerpo perpendicularmente al eje de rotación y una línea fija elegida como referencia. Por ejemplo en la figura 3.7 la línea de referencia es el eje x y la posición angular inicial θ_0 .

Como se puede observar en la figura 3.7 el punto P pasó de la posición angular inicial θ_0 , en un tiempo inicial t_0 a una posición angular final θ , a un tiempo final t , de tal forma que se cumple,

$$\Delta\theta = \theta - \theta_0$$

El desplazamiento angular $\Delta\theta$ es el cambio en la posición angular. Medido en grados, radianes o revoluciones, donde $1 \text{ rev} = 2\pi \text{ rad}$.

La velocidad angular media ω_m es la rapidez con que se realiza el desplazamiento angular, es decir, con que cambia la posición angular.

$$\omega_m = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$$

donde ω es la letra griega “omega”. En el SI la unidad de la velocidad angular es el rad/s .

Esta ecuación permite calcular el módulo del *vector velocidad angular media*, a menudo es medida en rad/s , su dirección es siempre a lo largo del eje de rotación y su sentido de rotación obedece a la regla de la mano derecha, esto es, los dedos de la mano derecha se doblan según el sentido de la rotación, de manera que el pulgar señala el sentido. También, se puede hacer referencia al sentido de rotación como igual o contrario al de las manecillas del reloj. Aquí se ha elegido arbitrariamente la rotación en sentido contrario al de las manecillas del reloj como positiva.



La *velocidad angular instantánea* ω o simplemente *velocidad angular*, como aprendiste en Mecánica I y Mecánica II se obtiene al tomar el límite cuando el cambio temporal tiende a cero, esto es, $\Delta t \rightarrow 0$. Así

$$\omega = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \omega_m = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \theta}{\Delta t}$$

Si este límite no depende del tiempo, entonces se dice que se tiene el caso de *velocidad angular constante*. Para este caso, simple y sencillamente se puede obtener que:

$$\omega = \frac{\Delta \theta}{\Delta t} = \frac{\theta - \theta_0}{t - t_0}$$

En el conteo inicial del tiempo siempre se puede considerar que el reloj o cronómetro empieza de cero, es decir, $t_0 = 0$ s y que la posición angular inicial también sea cero, $\theta = 0^\circ$. En ese caso $\theta = \omega t$. En la tabla 3.1, se muestra la analogía entre las magnitudes del movimiento rectilíneo uniforme (MRU) y el movimiento circular uniforme (MCU):

Tabla 3.1. Analogía entre los parámetros de movimiento circular y rectilíneo, respectivamente.

Movimiento rectilíneo uniforme (MRU)	Movimiento circular uniforme (MCU)
Velocidad lineal, v	Velocidad angular, ω
Posición inicial, x_0	Posición angular inicial, θ_0
Posición final, x	Posición angular final, θ
Tiempo, t	Tiempo, t

En la tabla 3.2 se comparan las ecuaciones de posición en función del tiempo para los movimientos rectilíneo uniforme y circular uniforme.

Tabla 3.2. Comparación de las ecuaciones de la posición lineal y angular como función de la velocidad y velocidad angular, respectivamente.

Movimiento rectilíneo uniforme (MRU)	Movimiento circular uniforme (MCU)
$x = x_0 + vt$	$\theta = \theta_0 + \omega t$

En la tabla 3.3 se muestran algunos valores típicos de velocidades angulares.

¿A cuánto equivale un radián en grados, sabiendo que 360° equivale 2π radianes?



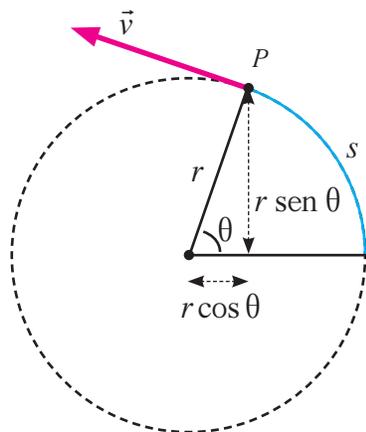


Tabla 3.3. Algunas velocidades angulares

SISTEMA	VELOCIDAD ANGULAR (en rad/s)
Rotación de nuestra galaxia	9.0×10^{-16}
Rotación promedio del Sol alrededor de su propio eje	2.39×10^{-6}
Rotación de la Tierra alrededor de su propio eje	7.3×10^{-5}
Bailarina de Ballet	18.8
Motor diesel de un barco	31.4
Hélice de un helicóptero	33.3
Lavadora	125
CD regrabable	hasta 2800
Motor de carro de carreras	hasta 3700
Ultracentrífuga	$> 1.25 \times 10^4$
Taladro dental	hasta 8.17×10^4
Rotación de un protón	6.3×10^{20}

Sin embargo, ¿cómo se relacionan estos dos movimientos? o bien, más exactamente ¿qué relación guardan los parámetros θ y x , y así mismo θ y y ?

Una vista de la figura 3.7 desde arriba, es decir a una cierta distancia en el eje z , se ve como lo muestra la figura 3.8. En ella se aprecia que las relaciones que guardan los parámetros r , y , x y θ son las siguientes:



$$x = r \cos \theta \text{ y } y = r \text{ sen } \theta$$

Ahora bien, ¿y cómo se relacionan la velocidad angular ω y la velocidad lineal v ?

Para esto, si el desplazamiento angular θ se expresa en radianes entonces la relación entre el radio r de la circunferencia y el arco de circunferencia s (ver la figura 3.8) es

$$s = r\theta$$

Fig. 3.8. Descomposición del radio r de la circunferencia en sus componentes horizontal x ($r \cos \theta$) y vertical y ($r \text{ sen } \theta$), respectivamente.

Si se consideran dos puntos cualesquiera en la circunferencia de tal forma que se tomen sus respectivos



cambios de arco y angular, respectivamente, ver figura 2.7, entonces la ecuación anterior toma la forma

$$\Delta s = r\Delta\theta.$$

Tomando el tiempo que utiliza el punto para realizar estos cambios, entonces se tiene que

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = r \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$$

Considerando el límite en el que el cambio temporal se hace muy pequeño y eso implica que los dos puntos de la circunferencia se acercan, entonces se tiene que

$$v = r\omega$$

es decir la *velocidad lineal* v es proporcional a la *velocidad angular* ω y la *constante de proporcionalidad* es el *radio de la circunferencia* r .

Un ángulo en radianes es el cociente de dos longitudes $\theta = s/r$, así que es un número adimensional, sin unidades. Si $s = 3.0$ m y $r = 2.0$ m, entonces $\theta = 1.5$, pero se acostumbra escribir esto como 1.5 rad para distinguirlo de un ángulo medido en grados o revoluciones.

Ejemplo 3.1. Se toman dos fotografías del trompo en movimiento esquematizado en la figura 3.6. ¿Cuál será la velocidad angular si pasa un punto de él desde el eje x (primera foto) hasta el ángulo de 1 rad (segunda foto) y éste lo efectúa en 0.5 s?

Puesto que ω se obtiene de la división del desplazamiento angular $\Delta\theta$ respecto al cambio en el tiempo Δt , entonces

$$\omega = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{1 \text{ rad}}{0.5 \text{ s}}, \text{ esto es, la velocidad angular del trompo es } 2 \frac{\text{rad}}{\text{s}}.$$





Ejemplo 3.2. ¿Serán iguales las velocidades lineales de dos puntos, del trompo del ejemplo anterior, uno que se encuentra a una distancia del eje de rotación de 4 cm mientras que el otro está a 2 cm del eje?

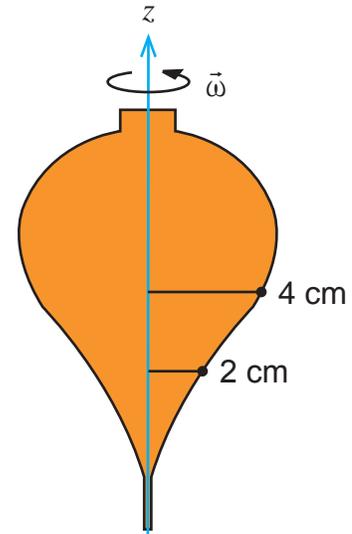
Puesto que la velocidad lineal es proporcional a la distancia del punto al eje de rotación y la constante de proporcionalidad es la velocidad angular, se obtiene que

$$v_1 = r_1 \omega = (0.04 \text{ m}) \left(2 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \right) = 0.08 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

y

$$v_2 = r_2 \omega = (0.02 \text{ m}) \left(2 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \right) = 0.04 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Se puede ver que la velocidad lineal del punto que está a 4 cm es el doble que la velocidad del que está a solo 2 cm, esto porque es proporcional al radio.



Algunos otros parámetros se pueden introducir en el movimiento circular, por ejemplo cuando un punto del trompo recorre toda una circunferencia o una vuelta completa se dice que hace una revolución. En una revolución el punto barre un ángulo de 2π rad y recorre un arco completo de $2\pi r$, que es el perímetro de la circunferencia. Al tiempo que emplea el punto para recorrer la circunferencia o en barrer el ángulo 2π rad se le conoce como **periodo** y se denota por una letra “te” mayúscula T . Así que, si se conoce el periodo del movimiento se puede evaluar la velocidad angular como,

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

La unidad del periodo es el segundo y la de la velocidad angular es rad/s. También se puede conocer la velocidad lineal, sustituyendo la ecuación anterior en $v = r\omega$, obteniendo

$$v = \frac{2\pi r}{T}$$

Al inverso del periodo T se le conoce como **frecuencia**, esto es

$$f = \frac{1}{T}$$



por lo que también se puede expresar las velocidades en términos de la frecuencia,

$$\omega = 2\pi f \quad \text{y} \quad v = 2\pi r f, \text{ respectivamente.}$$

La frecuencia es el inverso del periodo, por consiguiente su unidad es $\frac{1}{s}$, también denominada Hertz (Hz), es decir

$$[f] = \frac{1}{s} = 1 \text{ Hz.}$$

La frecuencia f esta relacionada con el número de rev o vueltas por unidad de tiempo. Otras unidades de la frecuencia son *revoluciones por segundo (rps)* y *revoluciones por minuto (rpm)*.

Cuando la frecuencia se expresa en rev/s, en la ecuación $\omega = 2\pi f$ la velocidad angular queda expresada en rad/s, ya que el factor 2π proviene de $2\pi \text{ rad/rev}$. Si $f = 10 \text{ rev/s}$, $\omega = 2\pi f = 2\pi \frac{\text{rad}}{\text{rev}} (10 \frac{\text{rev}}{s}) = 62.8 \frac{\text{rad}}{s}$.

Otra característica que se debe tomar en cuenta en estas velocidades es que, como se puede observar en las figuras 3.7 y 3.8, mientras la velocidad lineal es un vector que se encuentra en el plano xy , es decir tiene componentes en x y en y el vector de la velocidad angular está sobre el eje z de rotación, es decir solo tiene una componente en el eje z y se dice que es positiva (z positiva) si la rotación lo hace contrario a como se mueven las manecillas de un reloj analógico, mientras que será negativa en caso contrario.

Determina las equivalencias de las unidades de la velocidad angular en rpm, rps.

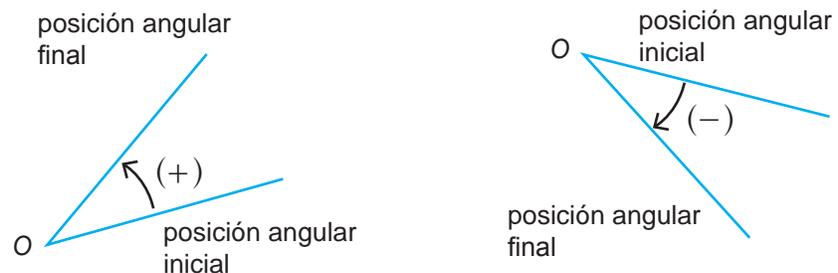


Fig. 3.10. Convenio de ángulos positivos y ángulos negativos. Como un ejercicio aplique la regla de la mano derecha a cada uno de los esquemas y verifique lo que hemos explicado en el texto.



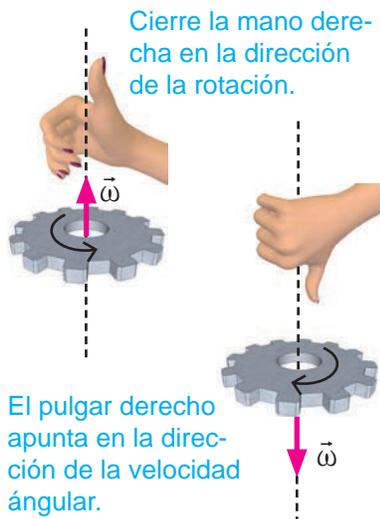


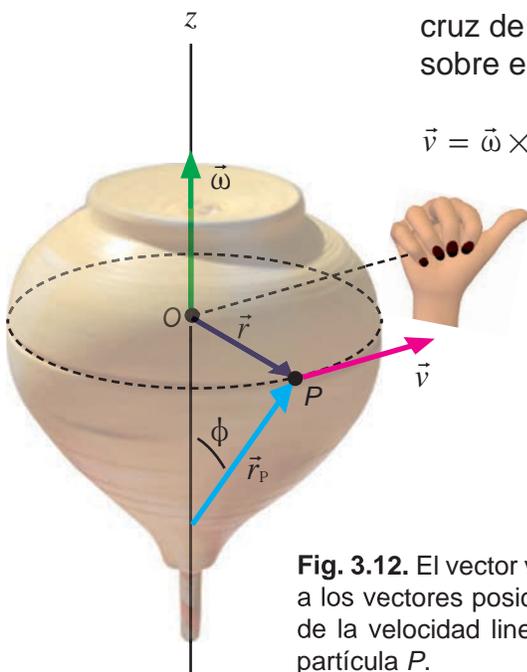
Fig. 3.11. Regla de la mano derecha: Consiste en abrir la mano con los dedos pegados a excepción del pulgar y cerrarlos hacia ángulos positivos (en este caso el pulgar queda hacia arriba) o hacia ángulos negativos (el pulgar queda dirigido hacia abajo).

Un método para determinar el sentido de la rotación es utilizando, lo que se conoce como “aplicar la *regla de la mano derecha*” y consiste en extender la mano derecha con los dedos pegados a excepción del pulgar y cerrarlos en el sentido de la rotación del cuerpo. Así, se puede dar cuenta que el pulgar queda hacia arriba si se cierran los dedos en el sentido positivo, mientras que queda hacia abajo si se cierran los dedos en el sentido negativo. La figura 3.10 ilustra el convenio de cuándo un ángulo es positivo y cuándo es negativo, mientras que la figura 3.11 muestra la aplicación de la regla de la mano derecha para verificar el sentido y la dirección de una rotación.

Se puede preguntar cómo es posible generar un vector en z , o sea paralelo al eje z , con dos vectores que se encuentran en el plano xy . La manera de abordar este problema es introduciendo una nueva operación entre cantidades vectoriales, la cual se conoce como *producto vectorial de dos vectores*, o “*producto cruz*”.

Como se puede observar en la figura 3.12 al girar el cuerpo rígido, el punto P viaja por una trayectoria circular de radio r y centro en el punto O . La posición de P es definida por el vector \vec{r} , el cual se extiende desde O hasta P . La velocidad lineal \vec{v} de P , puede ser determinada usando el producto cruz de $\vec{\omega}$ y \vec{r}_P . Aquí, \vec{r}_P está dirigido desde cualquier punto sobre el eje de rotación hasta el punto P . Se tiene que

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}_P$$



En esta formulación el orden de los vectores es importante, ya que el producto cruz no es conmutativo, esto es, $\vec{\omega} \times \vec{r}_P \neq \vec{r}_P \times \vec{\omega}$. Con respecto a esto, observe en la figura 3.12 cómo la dirección de \vec{v} es establecida aplicando la regla de la mano derecha. Los dedos de la mano derecha se doblan de $\vec{\omega}$ hasta \vec{r}_P . El pulgar indica la dirección de \vec{v} , que es tangente a la

Fig. 3.12. El vector velocidad lineal es perpendicular al plano que contiene a los vectores posición y velocidad angular. Al girar el plano, la dirección de la velocidad lineal permanece tangente a la trayectoria que sigue la partícula P .



trayectoria en la dirección del movimiento. La magnitud de \vec{v} es $v = \omega r_p \text{sen} \phi$, y como $r = r_p \text{sen} \phi$, entonces

$$v = \omega r$$

Como caso especial, el vector \vec{r} puede seleccionarse para \vec{r}_p . Aquí \vec{r} se encuentra en el plano de movimiento y de nuevo la velocidad del punto P es

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

donde $v = \omega r \text{sen} \phi$ y $\phi = 90^\circ$, resultando igualmente que

$$v = \omega r$$

En física existe una serie de conceptos cuya definición implica una rotación o viene expresada como un producto vectorial de dos vectores, algunos de ellos son por ejemplo aceleración angular $\vec{\alpha}$ (Fig. 3.7), momento angular \vec{L} y momento de una fuerza o torca \vec{M}_o , entre muchos otros. Estos últimos dos tienen una gran importancia para el estudio de la dinámica de cuerpos rígidos como se verá en en las siguientes secciones.

Hasta ahora se ha analizado el *movimiento de rotación uniforme*, en el cual la aceleración angular es cero, en consecuencia, la velocidad angular es constante, y la posición angular está dada por la ecuación mostrada en la tabla 3.2. A continuación se estudiara el movimiento de rotación acelerado.

La aceleración angular media α_m es la rapidez con que varía la velocidad angular.

$$\alpha_m = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{\omega - \omega_o}{t - t_o},$$

Donde la velocidad angular final e inicial son ω y ω_o , respectivamente. La aceleración angular instantánea o simplemente aceleración angular se obtiene cuando se toma el límite, en el cual el cambio del tiempo se va a cero o equivalentemente cuando el tiempo final tiende al tiempo inicial, esto es



Comprueba que $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$, sigue la regla de la mano derecha.





$$\alpha = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t}$$

De ahora en adelante cuando se refiera a la aceleración angular será la expresada en esta última ecuación.

De igual manera, si este límite no depende del tiempo, tenemos el caso de una aceleración angular constante por lo que

$$\alpha = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}$$

donde α es letra griega “alfa”.

De manera análoga al del movimiento lineal se dice que en el movimiento rotacional si la aceleración angular es positiva esto significa que la velocidad angular aumenta y si la aceleración angular es negativa entonces la velocidad angular disminuye. Se observa en la figura 3.7, que la dirección y el sentido de la aceleración angular son los mismos que el de la velocidad angular.

En la tabla 3.5 se hace la comparación entre las magnitudes de los dos movimientos estudiados hasta ahora, el lineal y el rotacional, en el caso que la aceleración es constante.

Tabla 3.5. Comparación de los parámetros de los movimientos lineal y rotacional con aceleración constante, respectivamente.

Movimiento rectilíneo con aceleración lineal constante	Rotación con aceleración angular constante respecto a un eje fijo.
$a = \text{constante}$	$\alpha = \text{constante}$
$v = v_0 + at$	$\omega = \omega_0 + \alpha t$
$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$	$\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$
$v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0)$	$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha(\theta - \theta_0)$
$x - x_0 = \frac{1}{2}(v + v_0)t$	$\theta - \theta_0 = \frac{1}{2}(\omega + \omega_0)t$



Puesto que $v = r\omega$, la aceleración a_t en esta misma dirección será

$$a_t = \frac{\Delta v}{\Delta t} = r \frac{\Delta \omega}{\Delta t}$$

$$a_t = r\alpha$$

La cual se conoce como aceleración lineal o tangencial.

Cabe recordar aquí que la aceleración centrípeta o radial a_c , dirigida hacia el eje de rotación (Fig. 3.15), es proporcional al cuadrado de la velocidad angular ω , esto es

$$a_c = r\omega^2$$

Para un sólido rígido que se encuentra girando respecto a un eje de rotación, como en el caso del trompo, una partícula que se encuentra a cierta distancia del eje rotación es decir r y que la consideramos constante durante el evento tiene una aceleración cuyas componentes son la aceleración tangencial (a_t con la misma dirección que v) y la aceleración centrípeta (a_c). Esta última componente tiene una dirección que apunta hacia el eje de rotación.

¿Qué relación hay entre la velocidad y aceleración angular de un objeto rígido rotatorio y la velocidad y aceleración lineales de un punto arbitrario en el objeto?



Fig. 3.15. Las aceleraciones centrípeta y tangencial se localizan en el plano de corte perpendiculares entre sí, mientras que la velocidad y la aceleración angular se localiza sobre el eje de rotación z .



Ejemplo 3.5. El volante de un motor tiene un diámetro de 0.36 m y gira con aceleración angular constante de $\alpha = 12 \text{ rad/s}^2$. Al encender un cronómetro la velocidad angular es de 5 rad/s . Calcula (a) la velocidad angular, (b) el desplazamiento angular y (c) la distancia que se mueve una partícula del borde, después de 3 s de encendido el cronómetro.

La velocidad angular se calcula con $\omega = \omega_0 + \alpha t$, el desplazamiento angular se obtiene de $\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2} \alpha t^2$ y la distancia recorrida por una partícula del borde se calcula con $\Delta s = r \Delta \theta$.

a) Velocidad angular después de 3 s.

$$\omega = \omega_0 + \alpha t$$

$$\omega = 5 \frac{\text{rad}}{\text{s}} + \left(12 \frac{\text{rad}}{\text{s}^2}\right)(3\text{s}) = 41 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

b) Desplazamiento angular después de 3 s.

$$\Delta \theta = \omega_0 t + \frac{1}{2} \alpha t^2$$

$$\Delta \theta = \left(5 \frac{\text{rad}}{\text{s}}\right)(3\text{s}) + \frac{1}{2} \left(12 \frac{\text{rad}}{\text{s}^2}\right)(3\text{s})^2 = 69 \text{ rad}$$

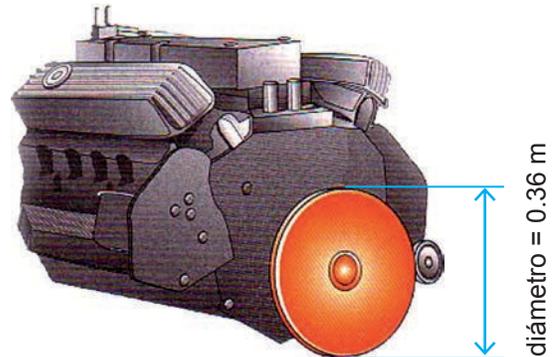
$$69 \text{ rad} = 69 \text{ rad} \times \frac{1 \text{ rev}}{2\pi \text{ rad}} = 10.98 \text{ rev, casi 11 vueltas. O bien}$$

$$69 \text{ rad} = 69 \text{ rad} \times \frac{180^\circ}{\pi \text{ rad}} = 3953.4^\circ$$

c) Distancia recorrida por una partícula del borde del volante después de 3 s.

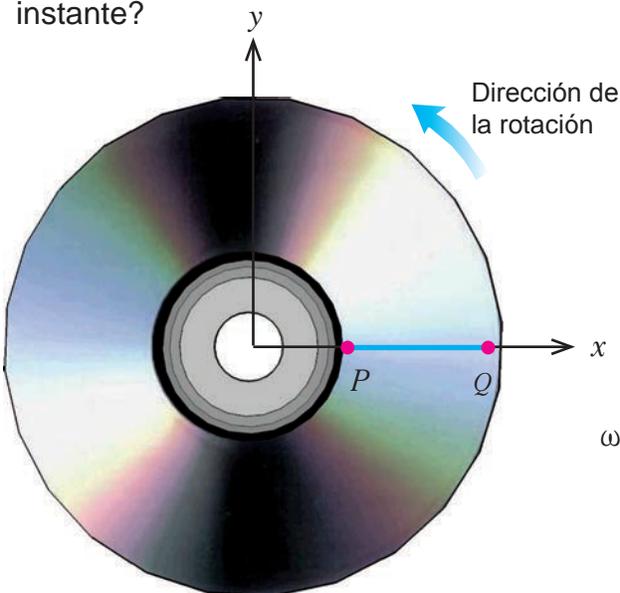
$$\Delta s = r \Delta \theta$$

$$\Delta s = (0.18 \text{ m})(69) = 12.42 \text{ m}$$





Ejemplo 3.6. Imagine que acaba de ver una película en DVD y el disco se está deteniendo. La velocidad angular del disco a $t = 0 \text{ s}$ es de $27.5 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$ y su aceleración angular constante es de $-10.0 \frac{\text{rad}}{\text{s}^2}$. En la figura se muestra una línea PQ en la superficie del disco, la cual está a lo largo del eje $+x$ en $t = 0$. a) ¿Qué velocidad angular tiene el disco en $t = 0.3 \text{ s}$? b) ¿Qué ángulo forma la línea PQ respecto al eje $+x$ en ese instante?



La velocidad angular se calcula con $\omega = \omega_0 + \alpha t$ y el ángulo que forma la línea PQ se obtiene con $\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha(\theta - \theta_0)$.

a) La velocidad angular después de 0.3 s es

$$\omega = \omega_0 + \alpha t$$

$$\omega = 27.5 \frac{\text{rad}}{\text{s}} + \left(-10.0 \frac{\text{rad}}{\text{s}^2}\right)(0.3 \text{ s}) = 24.5 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

b) El ángulo que forma la línea PQ respecto al eje $+x$ después de 0.3 s es

$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha(\theta - \theta_0)$, como la posición angular inicial es cero, al despejar θ , se tiene

$$\theta = \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{2\alpha} = \frac{\left(24.5 \frac{\text{rad}}{\text{s}}\right)^2 - \left(27.5 \frac{\text{rad}}{\text{s}}\right)^2}{2\left(-10.0 \frac{\text{rad}}{\text{s}^2}\right)} = 7.8 \text{ rad}$$

También se llega al resultado anterior utilizando la ecuación $\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$.

$$\theta = \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$$

$$\theta = \left(27.5 \frac{\text{rad}}{\text{s}}\right)(0.3 \text{ s}) + \frac{1}{2}\left(-10 \frac{\text{rad}}{\text{s}^2}\right)(0.3 \text{ s})^2 = 7.8 \text{ rad}$$

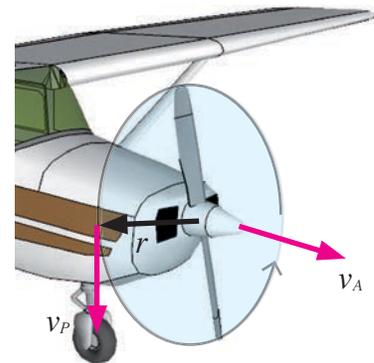
$$\theta = 7.8 \text{ rad} = 7.8 \text{ rad} \times \frac{1 \text{ rev}}{2\pi \text{ rad}} = 1.24 \text{ rev}$$

Esto quiere decir que el disco DVD ha girado una revolución completa más 0.24 vueltas. O sea un ángulo adicional de 447° .



Ejemplo 3.7. Suponga que le piden diseñar una hélice para un avión que gire a 2400 rpm. La rapidez de avance del avión en el aire debe ser de 75.0 m/s, y la rapidez de las puntas de las paletas de la hélice en el aire no debe exceder 270 m/s (esto es cerca de 0.80 veces la rapidez del sonido; si las puntas se movieran con la rapidez del sonido en el aire, producirían un ruido estrepitoso, al mantener esta rapidez en un nivel suficientemente menor, el ruido se hace aceptable). a) ¿Qué radio máximo puede tener la hélice? b) Con este radio, qué aceleración centrípeta tiene la punta de la hélice?

a) Observe la punta de una de las paletas de la hélice, ya que la incógnita es la distancia entre ésta y el eje de rotación de la hélice. Considere también que la rapidez de la partícula en el extremo es, respecto al aire, y se compone tanto de la rotación de la hélice como del movimiento hacia adelante del avión. El plano de rotación de la hélice es perpendicular a la dirección del vuelo, así que las velocidades componentes $v_p = r\omega$ y $v_A = 75$ m/s son perpendiculares y la resultante a lo más debe ser $v = 270$ m/s. Así pues, se tiene que



$$v^2 = v_p^2 + v_A^2 = r^2 \omega^2 + v_A^2.$$

Despejando r de la ecuación anterior encontramos la solución al problema planteado:

$$r = \sqrt{\frac{v^2 - v_A^2}{\omega^2}} = \sqrt{\frac{(270 \frac{\text{m}}{\text{s}})^2 - (75 \frac{\text{m}}{\text{s}})^2}{(251 \frac{\text{rad}}{\text{s}})^2}} = 1.03 \text{ m}$$

Aquí se ha usado el hecho de que, $\omega = 2\pi f$

$$f = 2400 \text{ rpm} = 2400 \frac{\text{rev}}{\text{min}} \times \frac{1 \text{ min}}{60 \text{ s}} = 40 \frac{\text{rev}}{\text{s}} = 40 \text{ Hz}$$

$$\omega = 2\pi f = 2\pi \frac{\text{rad}}{\text{rev}} \left(40 \frac{\text{rev}}{\text{s}}\right) = 251 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

b) La aceleración centrípeta es proporcional al cuadrado de la velocidad angular, así que

$$a_c = r\omega^2 = (1.03 \text{ m}) \left(251 \frac{\text{rad}}{\text{s}}\right)^2 = 6.50 \times 10^4 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Una aceleración de magnitud grande implica una fuerza grande de ahí que al diseñar una hélice se debe tomar en cuenta materiales resistentes a este tipo de esfuerzos, como por ejemplo aleación de aluminio.

3.2. Dinámica de la rotación

Para seguir en el estudio del cuerpo rígido las preguntas que tienen que ver con la dinámica de la rotación son las que hicimos al inicio de la unidad: *¿Cuáles son las leyes que sigue un movimiento de rotación? ¿Cuál es la ecuación fundamental que describe el movimiento de rotación de un cuerpo rígido?*

Hasta el momento se sabe de desplazamiento angular, velocidad angular y aceleración angular. Se conoce, por Mecánica I y Mecánica II, que la dinámica de un cuerpo implica aceleraciones, masas y fuerzas aplicadas. *¿Cuáles son los análogos de estas magnitudes en el caso del movimiento de rotación de un cuerpo?*

3.2.1. Energía cinética de rotación y momento de inercia

Hasta aquí ya se sabe que cualquier partícula de un cuerpo en rotación describe una trayectoria circular, tiene una velocidad lineal v y se le puede asociar una velocidad angular ω . Por otra parte, se sabe cómo calcular su energía cinética. *¿Cuál será la energía cinética total debida al movimiento de sus partículas?*

En la figura 3.13 se ha representado un cuerpo que rota alrededor de un eje perpendicular al plano de la hoja del libro. Consideremos una partícula del cuerpo de masa m_i situada a la distancia r_i del eje de rotación. Se sabe que la energía cinética de la partícula es

$$E_{ci} = \frac{1}{2} m_i v_i^2,$$

la cual se puede expresar en términos de la velocidad angular de la partícula, esto es

$$E_{ci} = \frac{1}{2} m_i (r_i^2 \omega^2) = \frac{1}{2} (m_i r_i^2) \omega^2$$

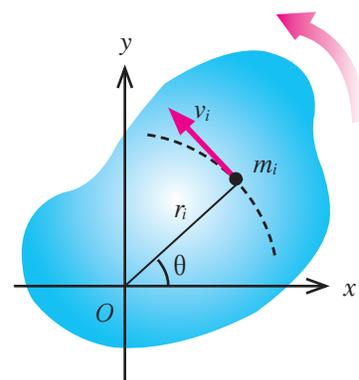


Fig. 3.13. Un objeto rígido gira alrededor del eje z con velocidad angular ω . La energía cinética de la partícula de masa m_i es $\frac{1}{2} m_i v_i^2$. La energía cinética rotacional del objeto es $\frac{1}{2} I \omega^2$.



Para hallar la energía cinética de todo el cuerpo se necesita sumar las energías cinéticas de todas sus partículas, esto se hace así,

$$E_c = E_{c1} + E_{c2} + \dots = \Sigma E_{ci},$$

aquí se ha utilizado la notación Σ para la suma. Más explícitamente queda como,

$$E_c = \Sigma \frac{1}{2} m_i r_i^2 \omega^2 = \frac{1}{2} (\Sigma m_i r_i^2) \omega^2.$$

A la expresión entre paréntesis se le conoce como *momento de inercia* y se denota con una *i* mayúscula I , de tal manera que

$$I = \Sigma m_i r_i^2$$

Con esta notación se puede expresar la energía cinética rotacional del cuerpo rígido como

$$E_c = \frac{1}{2} I \omega^2$$

Al momento de inercia también se le conoce como *inercia rotacional* y físicamente es una medida de la dificultad que ofrece un cuerpo para hacerlo rotar o a cambiar su estado de rotación.

La **energía cinética rotacional** es la energía de un cuerpo rígido de inercia rotacional I que gira con rapidez angular ω , como te puedes dar cuenta, es un medio práctico de expresar la energía cinética de todas las partículas en un cuerpo rígido, en función de su inercia rotacional, figura 3.13.

El momento de inercia depende de la distribución de masa de un cuerpo o de un sistema de partículas en rotación, respecto a un eje de giro. El momento de inercia sólo está determinado por la *geometría* del cuerpo y la posición del *eje* de rotación; pero no depende de las fuerzas que intervienen en el movimiento.

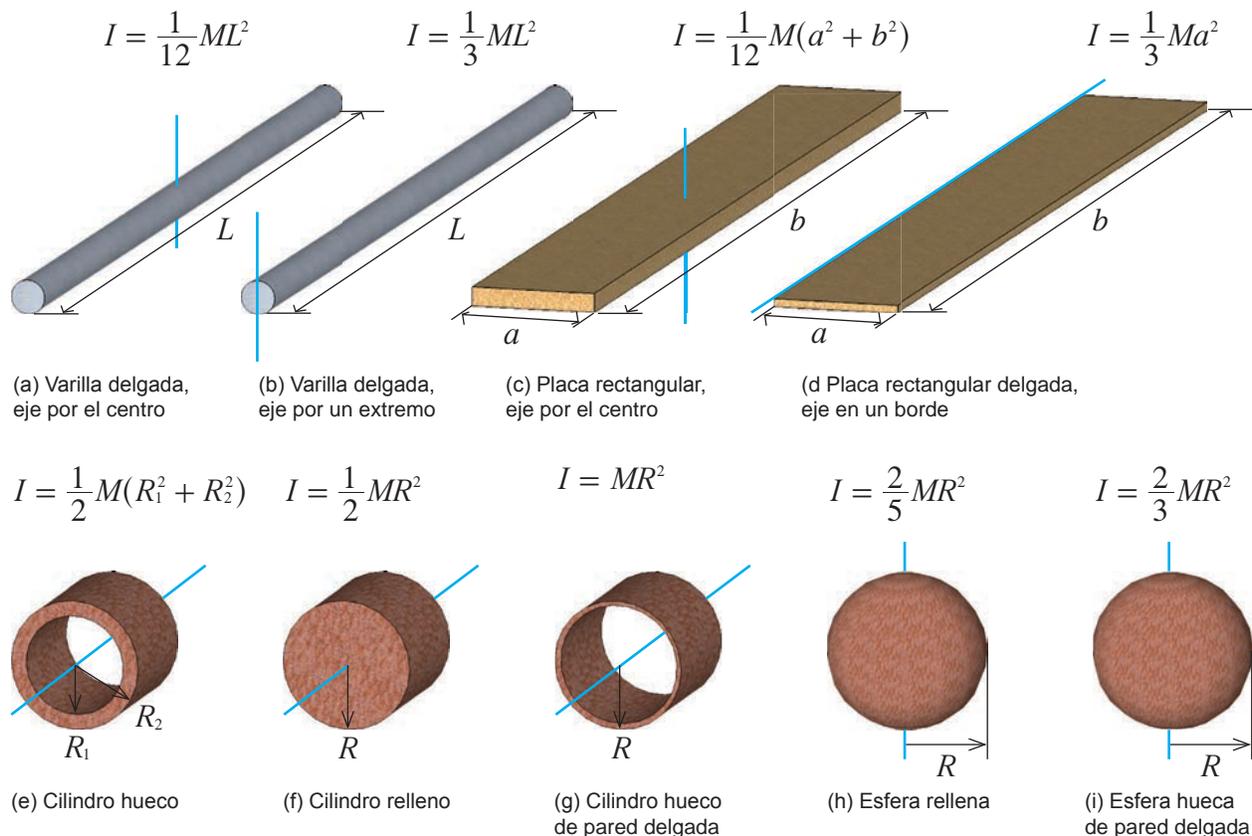


En el movimiento de rotación el momento de inercia desempeña un papel análogo al de la masa inercial en el caso del movimiento de traslación.

Aunque la expresión del momento de inercia se ha obtenido utilizando de modelo el sólido del trompo, se aplica para todo sólido rígido que se encuentra en movimiento de rotación respecto a un eje determinado.

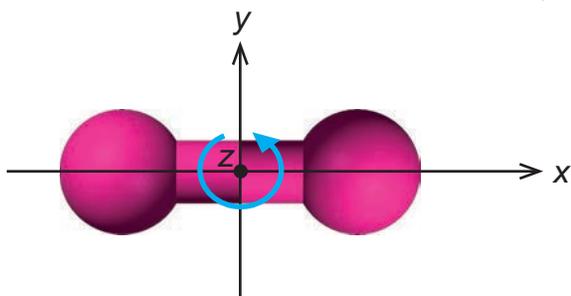
En la tabla 3.4, se muestran los momentos de inercia para algunos cuerpos con geometría bien conocida, la línea azul representa el eje de rotación de los respectivos cuerpos.

Tabla 3.4. Algunos momentos de inercia de cuerpos con geometría bien definida. La línea azul representa el eje de rotación del cuerpo respectivo.





Ejemplo 3.3. Considere que una molécula de oxígeno (O_2) se encuentra rotando en el plano xy alrededor del eje z . El eje pasa a través del centro de masa de la molécula, perpendicularmente a su longitud. La masa de cada átomo de oxígeno es de $m = 2.66 \times 10^{-26}$ kg y a temperatura ambiente la separación promedio entre los dos átomos es de $d = 1.21 \times 10^{-10}$ m (se considera que los átomos son masas puntuales). (a) Calcula el momento de inercia de la molécula respecto al eje z . b) Si la velocidad angular alrededor del eje z es de $4.60 \times 10^{12} \frac{\text{rad}}{\text{s}}$, ¿cuál es su energía cinética de rotación?



El momento de inercia se obtiene con $I_z = \sum m_i r_i^2$ y la energía cinética de rotación con $E_c = \frac{1}{2} I \omega^2$.

a) Se aplica la definición de momento de inercia, se observa que en este caso solo tenemos dos partículas, que se han ubicado en el eje x :

$$I_z = \sum m_i r_i^2$$

$$I_z = m_1 x_1^2 + m_2 x_2^2 = m \left(-\frac{d}{2}\right)^2 + m \left(\frac{d}{2}\right)^2 = 2 \left[m \left(\frac{d}{2}\right)^2 \right] = \frac{md^2}{2}$$

$$I_z = \frac{(2.66 \times 10^{-26} \text{ kg})(1.21 \times 10^{-10} \text{ m})^2}{2}$$

$$I_z = 1.95 \times 10^{-46} \text{ kg m}^2$$

b) La energía cinética de rotación de esta molécula, por otro lado, es

$$E_c = \frac{1}{2} I \omega^2 = \frac{1}{2} (1.95 \times 10^{-46} \text{ kg m}^2) \left(4.60 \times 10^{12} \frac{\text{rad}}{\text{s}}\right)^2.$$

Finalmente

$$E_c = 2.0 \times 10^{-21} \text{ J}.$$

Esta es la contribución de la energía de rotación de sólo una molécula de oxígeno (O_2).



3.2.2. Teorema de Steiner

Como se ha visto, el momento de inercia de un cuerpo depende de la ubicación del eje de rotación, así que existen tantos momento de inercia como ejes de rotación definamos en el sistema. Un resultado muy interesante, denominado *Teorema de Steiner*, también llamado *Teorema de los ejes paralelos*, permite calcular el momento de inercia respecto a cualquier eje de rotación paralelo al eje que pasa por el centro de masa del cuerpo rígido, si se conoce el momento de inercia respecto a este último.

Suponga que un cuerpo gira alrededor del eje z (Fig. 3.14). En el esquema se ha representado una porción plana y delgada del cuerpo perpendicular al eje de rotación. Consideremos que las coordenadas del centro de masa de dicha porción son x_{cm} y y_{cm} y que el elemento de masa m_i tiene coordenadas x_i , y_i . Aplicando la definición de momento de inercia en torno del eje z que pasa por O , se tiene que,

$$I_z = \sum m_i r_i^2 = \sum m_i (x_i^2 + y_i^2),$$

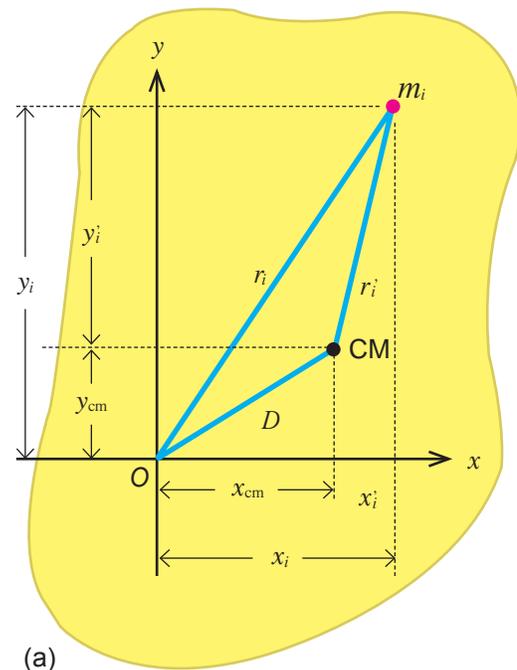
$$I_z = \sum m_i [(x_i + x_{cm})^2 + (y_i + y_{cm})^2]$$

$$I_z = \sum m_i [(x_i)^2 + 2x_i x_{cm} + x_{cm}^2 + (y_i)^2 + 2y_i y_{cm} + y_{cm}^2]$$

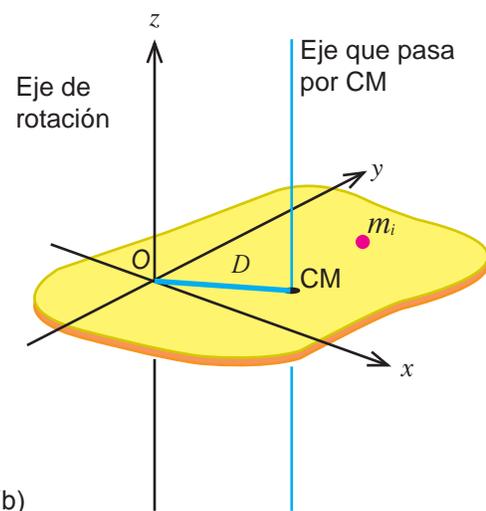
$$I_z = \sum m_i [(x_i)^2 + (y_i)^2] + 2x_{cm} \sum m_i x_i + 2y_{cm} \sum m_i y_i + \sum m_i (x_{cm}^2 + y_{cm}^2)$$

El primer término del lado derecho es, por definición, el momento de inercia alrededor de un eje que es paralelo al eje z y que pasa por el centro de masa. Los siguientes dos términos de ese mismo lado son cero por definición del centro de masa, ya que $\sum m_i x_i = 0$ y $\sum m_i y_i = 0$ respecto al eje que pasa por el centro de masa. Finalmente, el último término del lado derecho es simplemente MD^2 . En consecuencia, se concluye que

$$I_z = I_{cm} + MD^2$$



(a)



(b)

Fig. 3.14. (a) Teorema de Steiner: Si el momento de inercia alrededor de un eje perpendicular a la figura que pasa a través del centro de masa es I_{cm} , entonces el momento de inercia sobre el eje z es $I_z = I_{cm} + MD^2$. (b) La figura en perspectiva muestra el eje z (eje de rotación) y el eje paralelo que pasa a través del centro de masa (CM).

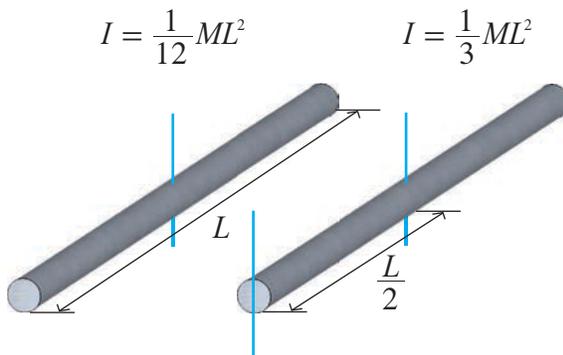


Siendo ésta, la expresión matemática que expresa el *teorema de ejes paralelos* o *teorema de Steiner*, el cual establece que el momento de inercia de un sólido rígido sobre cualquier eje es igual al momento de inercia del objeto sobre el eje paralelo que pasa a través del centro de masa más el producto de la masa por el cuadrado de la distancia perpendicular entre los ejes mencionados.

¿Cuáles son las unidades que caracterizan al momento de inercia? Obtén estas unidades.

Aplica el Teorema de Steiner y obtén la expresión del momento de inercia de la varilla delgada con eje en el extremo que se muestra en la tabla 3.3.

Ejemplo 3.4. El momento de inercia de una varilla delgada respecto a un eje que pasa por su centro de masa es $I_{\text{cm}} = \frac{1}{12}ML^2$. Utilice el Teorema de Steiner para demostrar que el momento de inercia de la varilla respecto a un eje que pasa por un extremo es $I_z = \frac{1}{3}ML^2$.



El Teorema de Steiner establece que el momento de inercia de la varilla respecto a un eje que pasa por su extremo I_z es igual a la suma del momento de inercia de la varilla respecto al eje que pasa por su centro de masa I_{cm} y del producto de la masa M de la varilla por el cuadrado de la distancia perpendicular entre los ejes $\frac{L}{2}$.

$$I_z = I_{\text{cm}} + MD^2$$

$$I_z = \frac{1}{12}ML^2 + M\left(\frac{L}{2}\right)^2$$

$$I_z = \frac{1}{12}ML^2 + \frac{1}{4}ML^2$$

$$I_z = \frac{1}{3}ML^2$$



3.2.3. Momento de una fuerza y momento angular en la rotación de un cuerpo rígido

El momento de una fuerza, también llamado momento de torsión, torca o torque, en general se define respecto a un punto elegido como referencia. Sin embargo cuando se trata de un cuerpo que rota alrededor de un eje fijo, entonces el momento efectivo es independiente del punto del eje respecto al cual se calcula. Esto da derecho a hablar de momento respecto al eje.

En la figura 3.16 se muestra una partícula de masa m atada a un extremo de una barra de masa despreciable y rígida, de longitud r y por el otro extremo hay un eje perpendicular a la barra, alrededor del cual la barra puede girar libremente. En consecuencia, la partícula sólo se mueve en una circunferencia de radio r . Asimismo, se aplica sobre la partícula una fuerza \vec{F} . Si se aplica la segunda ley de Newton a la partícula y se toman componentes en la dirección tangencial se obtiene

$$F_t = ma_t$$

La aceleración tangencial a la trayectoria circular que describe la partícula se relaciona con la aceleración angular por medio de la expresión $a_t = r\alpha$ que al sustituirla en la ecuación y multiplicar cada término por r se obtiene

$$rF_t = mr^2\alpha$$

De la figura 3.16 se observa que rF_t es el momento de la Fuerza M_o , por lo que, al sustituir se obtiene

$$M_o = mr^2\alpha$$

Un cuerpo rígido que gira alrededor de un eje fijo es simplemente un conjunto de partículas individuales, cada una de las cuales está obligada a moverse en una trayectoria circular con la misma velocidad angular ω y aceleración angular α . Aplicando la ecuación a la partícula i de ese conjunto

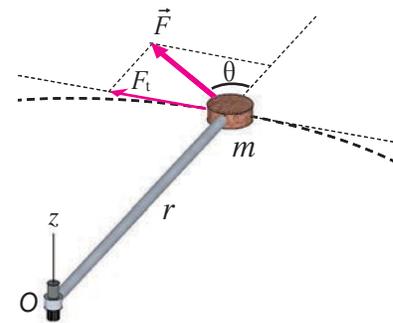


Fig. 3.16. El momento de torsión es igual al producto cruz del vector posición por el vector fuerza: $\vec{M}_o = \vec{r} \times \vec{F}$, su dirección coincide con el eje z , su sentido esta dado por la regla de la mano derecha y su magnitud es $M_o = rF \text{sen}\theta = rF_t$.





$$M_{O_i} = m_i r_i^2 \alpha$$

Sumando para todas las partículas del cuerpo los dos términos de la expresión anterior conduce a

$$\Sigma M_{O_i} = (\Sigma m_i r_i^2) \alpha$$

¿Cuál es el análogo rotacional de la segunda ley del movimiento de Newton: $F = ma$?

Obteniendo finalmente la *segunda ley de Newton para la rotación*, que establece que el momento de torsión resultante que actúa sobre el sistema (momento externo neto que actúa sobre un objeto que gira alrededor de un eje fijo) es igual al momento de inercia alrededor del eje de rotación multiplicado por la aceleración angular del objeto relativo a ese eje

$$M_o = I\alpha$$

El momento de torsión que actúa sobre la partícula es directamente proporcional a su aceleración angular, donde la constante de proporcionalidad es el momento de inercia.

Aunque cada punto sobre un objeto rígido en rotación alrededor de un eje fijo puede no experimentar la misma aceleración lineal o velocidad lineal, cada punto se someterá a la misma aceleración angular y velocidad angular en cualquier instante. Por tanto, en todo momento el objeto rígido en rotación como un todo está caracterizado por los valores específicos de la aceleración angular, el momento de torsión neto y la velocidad angular.

Todas las magnitudes rotacionales que hemos visto en el capítulo son análogas a las correspondientes en el movimiento de traslación de una partícula. El análogo de la cantidad de movimiento \vec{p} , también llamado *cantidad de movimiento lineal* o momento lineal es la *cantidad de movimiento angular* \vec{L} , llamado también *momento angular*.

El momento angular de una partícula se define como el producto vectorial del vector posición de la partícula y su cantidad de movimiento.





La figura 3.17 muestra una partícula de masa m que se mueve con velocidad \vec{v} en una posición \vec{r} relativa al origen O . La cantidad de movimiento lineal de la partícula es $\vec{p} = m\vec{v}$. El momento angular \vec{L}_o de una partícula con respecto al origen O está definido por medio del producto cruz del vector posición de la partícula y el vector cantidad de movimiento:

$$\vec{L}_o = \vec{r} \times \vec{p}$$

El vector momento angular \vec{L}_o es perpendicular al plano que contiene a los vectores posición y cantidad de movimiento, su sentido se rige por la regla de la mano derecha, en el caso de la figura 3.17 es positivo y su magnitud es

$$L_o = rpsen\theta = rmvsen\theta$$

donde θ es el ángulo entre el vector posición y el vector cantidad de movimiento, para el caso de la figura 3.17 por tratarse de una partícula que describe una órbita circular, los dos vectores son perpendiculares entre sí, es decir, forman un ángulo $\theta = 90^\circ$. Entonces

$$L_o = rmv$$

La velocidad tangencial a la trayectoria circular que describe la partícula se relaciona con la velocidad angular por medio de la expresión $v = r\omega$ que al sustituirla en la ecuación se obtiene

$$L_o = mr^2\omega$$

Como mr^2 es el momento de inercia de una sola partícula respecto al eje z , resulta que

$$L_o = I\omega$$

Puede demostrarse que la componente del momento angular de un cuerpo rígido en rotación es directamente proporcional a la velocidad angular, donde la constante de proporcionalidad es el momento de inercia del cuerpo respecto al eje de rotación.

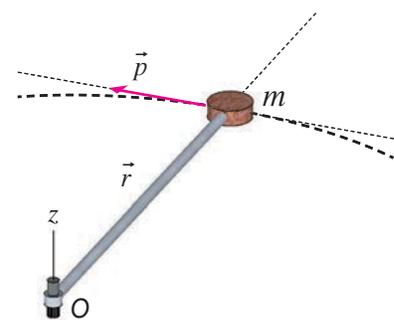


Fig. 3.17. El momento angular es igual al producto cruz del vector posición por el vector cantidad de movimiento: $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$, su dirección coincide con el eje z , su sentido esta dado por la regla de la mano derecha y su magnitud es $L = mvr$.



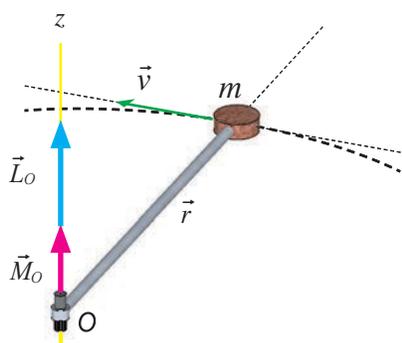


Fig. 3.18. Los vectores momento de torsión y momento angular comparten el mismo eje de rotación z .

3.2.4. Ecuación fundamental de la dinámica de la rotación

La relación entre el momento de torsión neto que actúa sobre el sistema y el momento angular respecto a un mismo eje de rotación, es:

$$\vec{M}_o = I\vec{\alpha} = I \frac{\Delta\vec{\omega}}{\Delta t}$$

$$\vec{M}_o = \frac{\Delta\vec{L}_o}{\Delta t}$$

El momento de torsión que actúa sobre una partícula es igual a la rapidez con que varía el momento angular de la partícula. En el caso de la situación representada en la figura 3.18 el momento de torsión y el momento angular de la partícula tienen la misma dirección y sentido.

La ecuación anterior es el análogo rotacional de la segunda ley de Newton, que expresa que la fuerza que actúa sobre un cuerpo es igual a la rapidez con que varía su cantidad de movimiento:

$$\vec{F} = \frac{\Delta\vec{p}}{\Delta t}$$



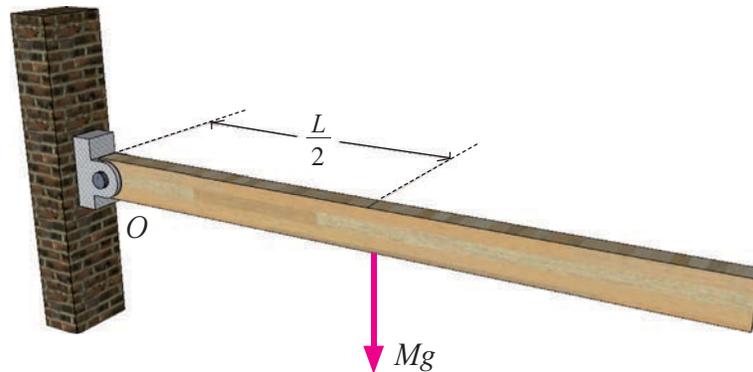
¿Cuál es el análogo rotacional de la segunda ley del movimiento de Newton: $\vec{F} = \frac{\Delta\vec{p}}{\Delta t}$?

Tabla 3.6. Comparación de las magnitudes involucradas en la dinámica del movimiento de traslación y la dinámica del movimiento de rotación.

Movimiento de traslación	Movimiento de rotación
$E_c = \frac{1}{2}mv^2$	$E_{CR} = \frac{1}{2}I\omega^2$
$p = mv$	$L_o = I\omega$
$F = \frac{\Delta p}{\Delta t}$	$M_o = \frac{\Delta L_o}{\Delta t}$
$F = ma$	$M_o = I\alpha$



Ejemplo 3.8. Un barrote uniforme de longitud L y masa M se engancha por uno de sus extremos a un pivote sin fricción y que permite rotar al barrote libremente en un plano vertical, como lo muestra la figura. El barrote se libera del reposo en la posición horizontal. Encuentra la aceleración angular inicial del barrote.



La aceleración angular se calcula con $\curvearrowright \Sigma M_o = I\alpha$.

a) Si se elige un eje que pasa por el pivote, entonces la única fuerza que contribuye a la torca es la fuerza de gravedad sobre el barrote Mg . Por otro lado, para estimar la torca en la barrote se considera que la fuerza gravitacional actúa en el centro de masa de la barrote, como se muestra en la figura. La torca debido a esta fuerza, respecto al eje que pasa por el pivote es

$$\curvearrowright \Sigma M_o = -(Mg)\left(\frac{L}{2}\right)$$

y el momento de inercia del barrote respecto a un extremo (tabla 3.4) es

$$I = \frac{1}{3}ML^2$$

Así,

$$\curvearrowright \Sigma M_o = I\alpha$$

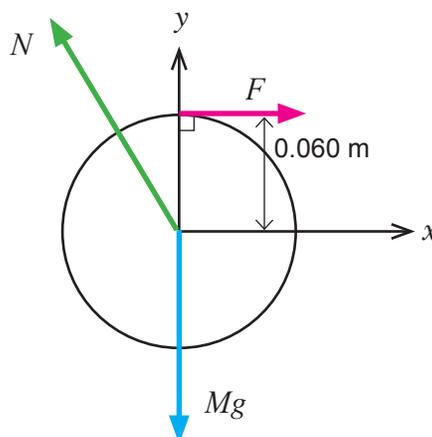
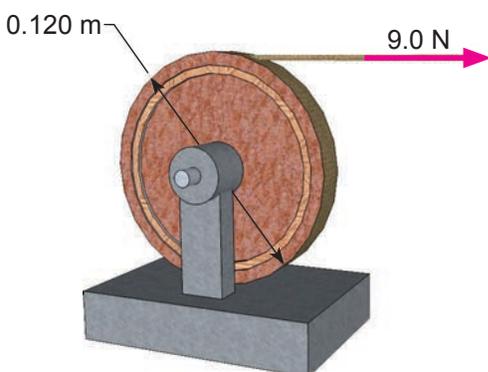
$$-(Mg)\left(\frac{L}{2}\right) = \left(\frac{1}{3}ML^2\right)\alpha$$

$$\alpha = -\frac{3g}{2L}$$

Todos los puntos del barrote tienen esta aceleración angular inicial.



Ejemplo 3.9. Se enrolla un cable varias veces en un cilindro sólido uniforme de 50 kg con un diámetro de 0.120 m, que puede girar sobre su eje. Se tira del cable con una fuerza de 9.0 N. Suponiendo que el cable se desenrolla sin estirarse y sin resbalarse, calcula la aceleración del mismo.



La aceleración del cable es igual a la aceleración tangencial a_t del borde del cilindro, se calcula con $a_t = r\alpha$ y la aceleración angular α se puede obtener de la segunda ley de Newton para la rotación $M_o = I\alpha$.

Puesto que el centro de masa del cilindro está en equilibrio de traslación, la fuerza resultante es cero. En el esquema se muestran todas las fuerzas que actúan sobre el cilindro.

La fuerza normal N y la fuerza de gravedad mg pasan por el centro de masa y no producen torca, mientras que la fuerza F si provoca una torca alrededor del eje.

La suma de las torcas o torca resultante es $M_o = rF$ y el momento de inercia del cilindro (Tabla 3.4) es $I = \frac{1}{2}mr^2$. Así,

$$\curvearrowright \sum M_o = I\alpha$$

$$-rF = \left(\frac{1}{2}mr^2\right)(-\alpha)$$

La aceleración angular es $\alpha = \frac{a_t}{r}$

$rF = \left(\frac{1}{2}mr^2\right)\left(\frac{a_t}{r}\right)$ y la aceleración del cable es

$$a_t = \frac{2F}{m} = \frac{2(9.0 \text{ N})}{50 \text{ kg}} = 0.36 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$



Ejemplo 3.10. Un abanico de la turbina del motor de un jet tiene un momento de inercia $I = 2.5 \text{ kgm}^2$ respecto a su eje de rotación. Al inicio el abanico gira a 300 rpm y después de 3 s aumenta a 2400 rpm. a) Encuentra el momento angular del abanico al inicio y después de los 3 s. b) Estima la torca neta que actúa sobre el abanico.



El momento angular del abanico es $L_o = I\omega$, donde la velocidad angular es $\omega = 2\pi f$. La torca sobre el abanico es $M_o = \Delta L_o / \Delta t$. Por tanto,

a) Al inicio, $t_o = 0$, se tiene

$$f = 300 \text{ rpm} = 300 \frac{\text{rev}}{\text{min}} \times \frac{1 \text{ min}}{60 \text{ s}} = 5 \frac{\text{rev}}{\text{s}} = 5 \text{ Hz}$$

$$\omega = 2\pi f = 2\pi \frac{\text{rad}}{\text{rev}} \left(5 \frac{\text{rev}}{\text{s}} \right) = 31.4 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

$$L_o = I\omega = (2.5 \text{ kgm}^2) \left(31.4 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \right) = 78.5 \frac{\text{kgm}^2}{\text{s}}$$

Después de 3 s

$$f = 2400 \text{ rpm} = 2400 \frac{\text{rev}}{\text{min}} \times \frac{1 \text{ min}}{60 \text{ s}} = 40 \frac{\text{rev}}{\text{s}} = 40 \text{ Hz}$$

$$\omega = 2\pi f = 2\pi \frac{\text{rad}}{\text{rev}} \left(40 \frac{\text{rev}}{\text{s}} \right) = 251.3 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

$$L_o = I\omega = (2.5 \text{ kgm}^2) \left(251.3 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \right) = 628.3 \frac{\text{kgm}^2}{\text{s}}$$

b) La torca sobre el abanico es

$$M_o = \frac{\Delta L_o}{\Delta t} = \frac{628.3 \frac{\text{kgm}^2}{\text{s}} - 78.5 \frac{\text{kgm}^2}{\text{s}}}{3 \text{ s}} = 183 \frac{\text{kgm}^2}{\text{s}^2} = 183 \text{ Nm}$$



Ejemplo 3.11. Una forma práctica de hacer ejercicio muscular, sin desplazarse del lugar, puede conseguirse mediante una bicicleta empotrada en un soporte, de tal modo que la rueda trasera gire libremente. Al pedalear, la cadena aplica una fuerza constante de 18 N a una distancia de 7 cm del eje de la rueda. Considera la rueda como un anillo de radio 35 cm y masa de 2.4 kg. Si al inicio no está girando, ¿cuál es la velocidad angular de la rueda al cabo de 5 s?

Como la fuerza es constante, el momento de torsión y la aceleración angular α son constantes. La segunda ley de Newton para la rotación $\curvearrowright \Sigma M_o = I\alpha$ permite calcular la aceleración angular y la velocidad angular de la rueda se obtiene con $\omega = \omega_o + \alpha t$.

El momento de torsión es $\curvearrowright \Sigma M_o = rF$, el momento de inercia de la rueda (Tabla 3.4) es $I = mR^2$. Así,

$$\curvearrowright \Sigma M_o = I\alpha$$

$$-rF = (mR^2)\alpha$$

La aceleración angular es

$$\alpha = \frac{-rF}{mR^2} = \frac{-(0.07 \text{ m})(18 \text{ N})}{(2.4 \text{ kg})(0.35 \text{ m})^2} = -4.3 \frac{\text{rad}}{\text{s}^2}$$

Como al inicio la rueda no gira, $\omega_o = 0$ y la velocidad angular después de 5 s es

$$\omega = \omega_o + \alpha t = 0 + \left(-4.3 \frac{\text{rad}}{\text{s}^2}\right)(5.0 \text{ s}) = -21.5 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$





Ejemplo 3.12. Una rueda de radio R , con masa M y momento de inercia I está montada en un eje horizontal sin fricción, como se muestra en la figura. Sobre ella se enrolla una cuerda ligera la cual soporta un objeto de masa m . Calcula la aceleración angular de la rueda, la aceleración lineal del objeto y la tensión de la cuerda.

La aceleración angular de la rueda se puede calcular con la segunda ley de Newton para la rotación $\curvearrowright \Sigma M_o = I\alpha$, la aceleración lineal del objeto y la tensión sobre la cuerda se pueden obtener de la segunda ley de Newton $+\uparrow \Sigma F = ma$. Las aceleraciones lineal y angular están relacionadas con $a = r\alpha$.

La única fuerza que produce torca a la rueda, respecto al eje de rotación con origen en O es la tensión T . La torca resultante es $\curvearrowright \Sigma M_o = rT$, el momento de inercia de la rueda (Tabla 3.4) es $I = \frac{1}{2}Mr^2$ y la aceleración angular es $\alpha = a/r$.

$$\curvearrowright \Sigma M_o = I\alpha$$

$$rT = \left(\frac{1}{2}Mr^2\right)\left(\frac{a}{r}\right)$$

$$T = \frac{1}{2}Ma$$

Al aplicar la segunda ley de Newton al objeto, considerando el sentido hacia arriba como positivo

$$+\uparrow \Sigma F = ma$$

$$T - mg = m(-a)$$

Al sustituir $T = \frac{1}{2}Ma$ se tiene la aceleración lineal del objeto

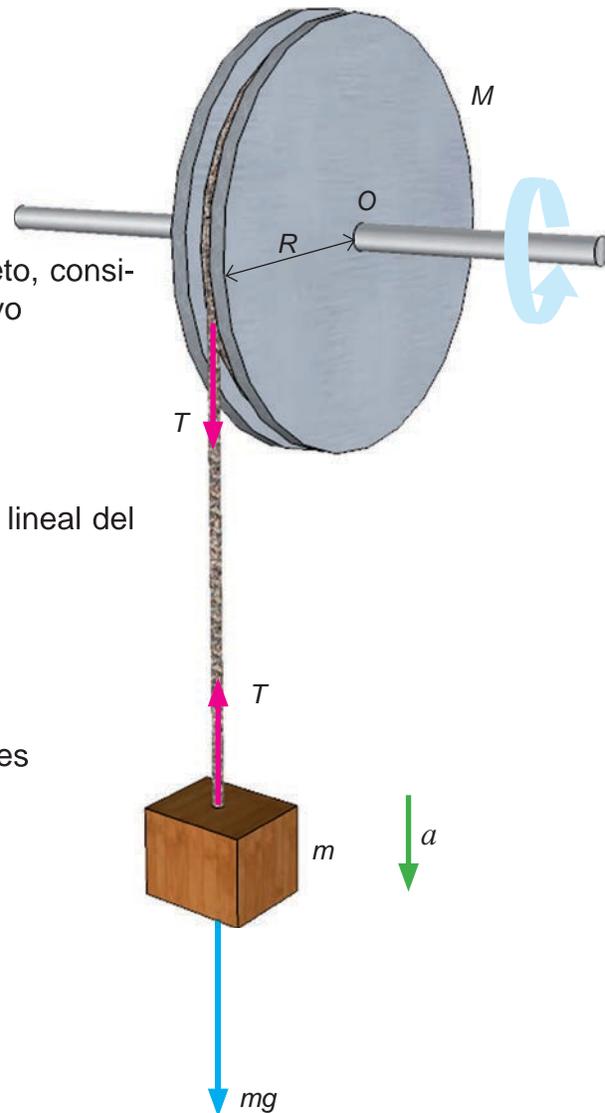
$$a = \frac{1}{1 + \frac{M}{2m}}g$$

La aceleración angular de la rueda $\alpha = a/r$ es

$$\alpha = \frac{1}{r\left(1 + \frac{M}{2m}\right)}g$$

La tensión en la cuerda $T = \frac{1}{2}Ma$ es

$$T = \frac{mg}{1 + \frac{2m}{M}}$$





Ejemplo 3.13. Dos bloques de masas m_1 y m_2 están conectados por una cuerda muy delgada y resistente que pasa por una polea sin fricción cuya masa es M y radio R . Considere que $m_1 > m_2$, encuentre (a) la aceleración de los bloques y (b) las tensiones sobre la cuerda.

La aceleración de los bloques y las tensiones sobre la cuerda se pueden obtener de la segunda ley de Newton para la rotación $\curvearrowright \Sigma M_o = I\alpha$ y para la traslación $+\uparrow \Sigma F = ma$. Las aceleraciones lineal y angular están relacionadas con $a = R\alpha$. Debido al momento de inercia de la polea, las tensiones sobre los trozos de cuerda a ambos lados de ella son diferentes.

La torca resultante sobre la polea es $\curvearrowright \Sigma M_o = T_1R - T_2R$, el momento de inercia de la polea (Tabla 3.4) es $I = \frac{1}{2}MR^2$ y la aceleración angular es $\alpha = a/R$.

$$\curvearrowright \Sigma M_o = I\alpha$$

$$T_1R - T_2R = \left(\frac{1}{2}MR^2\right)\left(\frac{a}{R}\right)$$

$$T_1 - T_2 = \frac{1}{2}Ma$$

Al aplicar la segunda ley de Newton a cada bloque, considerando el sentido hacia arriba como positivo

$$+\uparrow \Sigma F = ma$$

$$T_1 - m_1g = m_1(-a)$$

$$+\uparrow \Sigma F = ma$$

$$T_2 - m_2g = m_2a$$

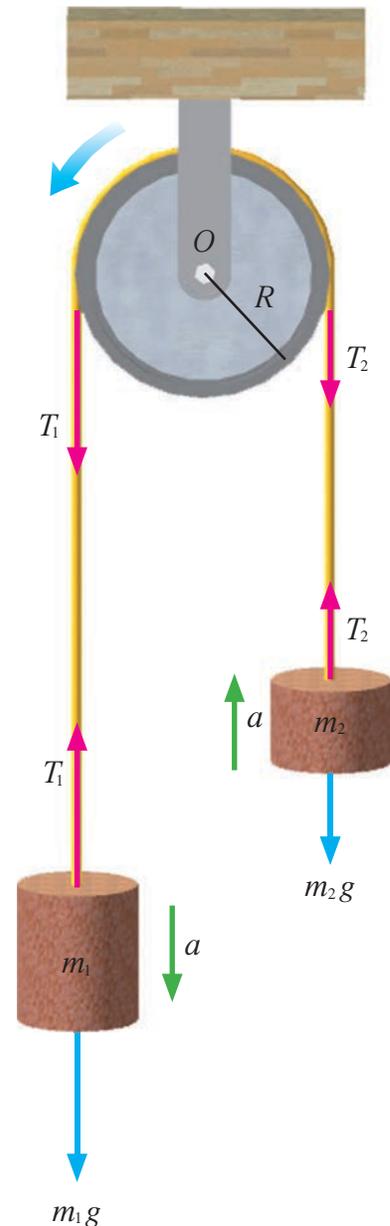
Al despejar $T_1 = m_1g - m_1a$ y $T_2 = m_2g + m_2a$ de estas ecuaciones y sustituir en la ecuación de la segunda ley de Newton para la rotación.

$$T_1 - T_2 = \frac{1}{2}Ma$$

$$(m_1g - m_1a) - (m_2g + m_2a) = \frac{1}{2}Ma$$

$$(m_1 - m_2)g = m_1a + m_2a + \frac{1}{2}Ma$$

$$a = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2 + \frac{1}{2}M}g$$



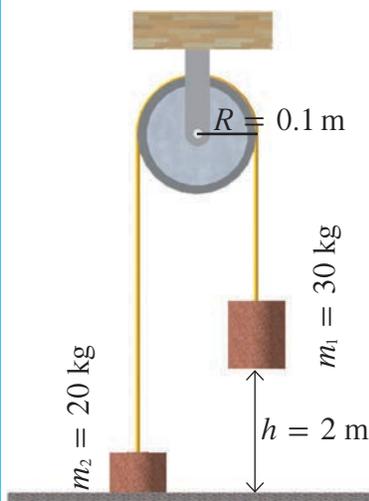


Las tensiones $T_1 = m_1g - m_1a$ y $T_2 = m_2g + m_2a$ son

$$T_1 = \frac{2m_2 + \frac{1}{2}M}{m_1 + m_2 + \frac{1}{2}M} m_1g \qquad T_2 = \frac{2m_1 + \frac{1}{2}M}{m_1 + m_2 + \frac{1}{2}M} m_2g$$

Las tensiones serían iguales si la masa M de la polea fuese despreciable.

Ejemplo 3.14. El sistema de la figura se deja libre desde el reposo. El cuerpo de 30 kg se encuentra a 2 m del suelo. La polea es un disco uniforme de 10 cm de radio y 5 kg de masa. (a) Calcule la velocidad del sistema de los dos cuerpos justo antes de que el cuerpo de 30 kg llegue a tocar el suelo. (b) Halle la expresión de la aceleración del sistema y compárela con el resultado obtenido en el ejemplo 3.13.



(a) Estos ejemplos se pueden resolver usando la segunda ley de Newton para la rotación $\curvearrowright \Sigma M_o = I\alpha$ y para la traslación $+\uparrow \Sigma F = ma$, utilizando además $a = r\alpha$. Sin embargo, es más sencillo resolverlos aplicando la ley de la conservación de la energía. Como se supone que no existe fricción, entonces la energía mecánica se conserva.

Cuando el sistema se deja libre desde el reposo, el cuerpo m_1 tiene energía potencial gravitatoria. Justo antes de que m_1 toque el suelo, el cuerpo m_1 posee energía cinética, el cuerpo m_2 tiene tanto energía cinética como potencial gravitatoria y la polea posee energía cinética rotacional.

$$E_{M_i} = E_{M_f}$$

$$m_1gh = \frac{1}{2}m_1v^2 + m_2gh + \frac{1}{2}m_2v^2 + \frac{1}{2}I\omega^2$$

Las velocidades lineal y angular se relacionan por $v = \omega R$, por tanto $\omega = v/R$ y el momento de inercia de la polea (Tabla 3.4) es $I = \frac{1}{2}MR^2$. Al sustituir,

$$m_1gh = \frac{1}{2}m_1v^2 + m_2gh + \frac{1}{2}m_2v^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}MR^2\right)\left(\frac{v}{R}\right)^2$$

$$2(m_1 - m_2)gh = \left(m_1 + m_2 + \frac{1}{2}M\right)v^2$$

Despejar v

$$v^2 = 2 \frac{(m_1 - m_2)g}{m_1 + m_2 + \frac{1}{2}M} h \qquad \text{Ecuación A}$$

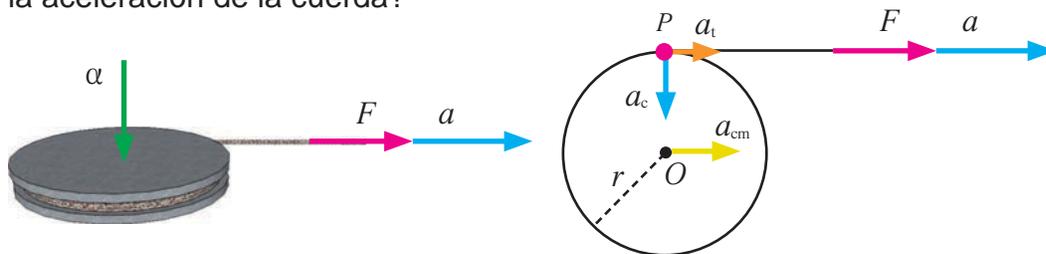


$$v = \sqrt{\frac{2(m_1 - m_2)gh}{m_1 + m_2 + \frac{1}{2}M}} = \sqrt{\frac{2(30 \text{ kg} - 20 \text{ kg})(9.8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2})(0.1 \text{ m})}{30 \text{ kg} + 20 \text{ kg} + \frac{1}{2}(5 \text{ kg})}} = 2.73 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

(b) Se sabe que $v^2 = v_0^2 + 2a\Delta y$. Por otra parte, en este caso $v_0 = 0$, $\Delta y = h$, por lo que $v^2 = 2ah$. Comparando esta ecuación con la ecuación A se ve que

$$a = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2 + \frac{1}{2}M} g. \quad \text{Resultado que es el mismo que se obtuvo en el ejercicio 3.13.}$$

Ejemplo 3.15. Un disco delgado de radio 10 cm y masa 2 kg se encuentra en una mesa plana sin fricción. Se aplica una fuerza de 5 N al final de una cuerda, la cual se ha enredado al disco. El disco rota alrededor de un eje vertical y se traslada horizontalmente, a) encuentre la aceleración del disco, b) la aceleración angular del punto P , c) ¿cuál es la aceleración de la cuerda?



a) La aceleración del disco es la aceleración de su centro de masa, así que

$$\vec{\uparrow} \Sigma F = Ma_{\text{cm}}$$

$$a_{\text{cm}} = \frac{F}{M} = \frac{5 \text{ N}}{2 \text{ kg}} = 2.5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

b) La aceleración angular del punto P está relacionada con la torca que produce la fuerza F y el momento de inercia I del disco, así pues

$$\curvearrowright \Sigma M_o = I\alpha$$

$$-rF = \left(\frac{1}{2}Mr^2\right)(-\alpha)$$

$$\alpha = \frac{2F}{Mr} = \frac{2(5 \text{ N})}{(2 \text{ kg})(0.1 \text{ m})} = 50 \frac{\text{rad}}{\text{s}^2}$$

c) La aceleración de la cuerda será la aceleración del CM más la aceleración lineal del punto P , esto es

$$a = a_{\text{cm}} + a_t = a_{\text{cm}} + \alpha r = 2.5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} + \left(50 \frac{\text{rad}}{\text{s}^2}\right)(0.1 \text{ m}) = 7.5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

¿Es la aceleración del punto P igual a la de la cuerda? ¿cuál es esta aceleración?





3.2.5. Rodadura pura

El título de esta sección también puede llamarse “*Rodadura sin deslizamiento*”. Por ejemplo, si consideras un automóvil en movimiento sobre un pavimento en el que queden impresas las huellas de los neumáticos, la rodadura pura implica que las huellas serán nítidas, bien definidas. Por el contrario si frena bruscamente se produce un bloqueo parcial de ruedas, en este caso los neumáticos resbalan sobre el pavimento y sus huellas no serían nítidas, sino el típico rastro de frenada; esta situación no corresponde a la rodadura.

Tampoco los siguientes eventos corresponden a rodadura pura. En los “arrincones” si el auto está “quemando llanta” sin avanzar, las ruedas giran con gran rapidez, las llantas giran pero no ruedan; está resbalando (o patinando) sobre el pavimento. Cuando el conductor de un auto en movimiento aplica los frenos con demasiada fuerza, las llantas se “amarran” y el auto derrapa, las llantas no giran pero resbalan. Estas situaciones no corresponden a rodadura pura.

En este apartado se aborda el movimiento de cuerpos rígidos que rotan alrededor de un eje en movimiento de traslación. En general, tal movimiento es muy complejo (Fig. 3.19). Sin embargo, se pueden simplificar las cosas al restringir el análisis a un objeto rígido

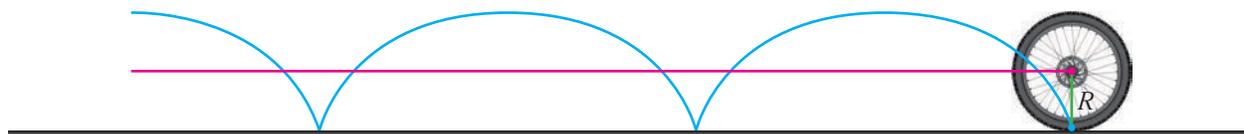


Fig. 3.19. El centro de masa del cuerpo rígido (rueda) se mueve en línea recta (línea roja), y el punto azul sobre el borde se mueve en la trayectoria denominada cicloide.

homogéneo que tiene un alto grado de simetría, como un cilindro, una esfera, o un aro. Por otra parte, se supone que el objeto se somete a movimiento de rodamiento a lo largo de una superficie plana.

Considera un cilindro de radio R que rueda sobre una superficie plana sin rozamiento. Cuando el cilindro gira un ángulo θ (figura 3.20), el punto de contacto entre la rueda y el plano se mueve una distancia s , la cual está relacionada con θ por la expresión

$$s = R\theta$$

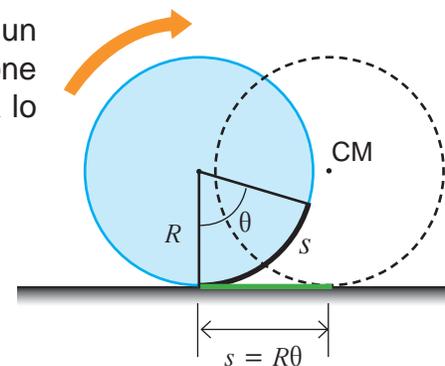


Fig. 3.20. En el movimiento de rodamiento puro, cuando la rueda gira un ángulo θ , su centro de masa se mueve una distancia s .

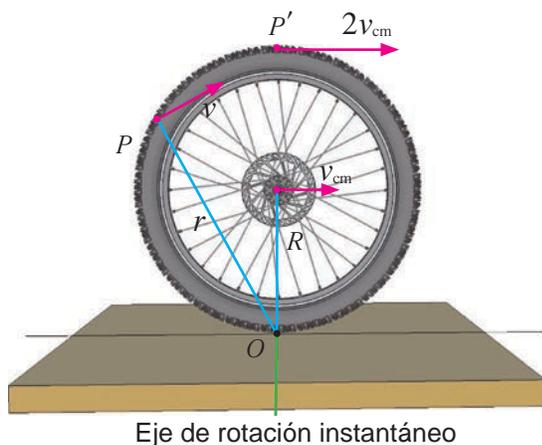


Fig. 3.21. Todos los puntos sobre un cuerpo que rueda se mueven en una dirección perpendicular a un eje que pasa por el punto de contacto con la superficie (eje de rotación instantáneo). El centro de masa del cuerpo se mueve con una velocidad v_{cm} , en tanto que el punto P' se mueve con una velocidad $2v_{cm}$.

Un cuerpo rígido tiene rodadura pura si el punto de contacto con la superficie tiene velocidad lineal nula en ese instante, es decir no resbala. En la figura 3.21 se representa cómo una rueda de radio R gira sin resbalar por una superficie plana. El punto P de la rueda, tal como se muestra, se mueve con una velocidad

$$v = r\omega$$

en donde r es la distancia perpendicular desde P al eje de rotación instantáneo (punto de contacto con la superficie). El centro de masas de la rueda se mueve con velocidad

$$v_{cm} = R\omega$$

¡ésta es la condición para obtener el movimiento con rodadura pura!

Note que para un punto en el extremo superior de la rueda, $r = 2R$, de forma que ese punto se mueve al doble de velocidad que su centro de masa.

Por otra parte, la magnitud de la aceleración lineal del centro de masa para el movimiento de rodamiento puro es

$$a_{cm} = R\alpha$$

Vamos a ver que si un objeto como un cilindro rueda sin resbalar sobre una superficie (a esto lo llamamos movimiento de rodamiento puro), existe una simple relación entre sus movimientos de rotación y traslación, figura 3.22.

Como se sabe, la rueda es simétrica por lo que su centro de masa se encuentra en su centro geométrico. Por otro lado, la suma vectorial de la velocidad del centro de masa con la velocidad lineal del cuerpo en rotación da como resultado el esquema, donde el punto 1 tiene velocidad cero, las velocidades en los puntos 2 y 4 forman un ángulo respecto a la horizontal. Se observa también que la velocidad en el punto 3 es el doble que la del centro de masa de la rueda.

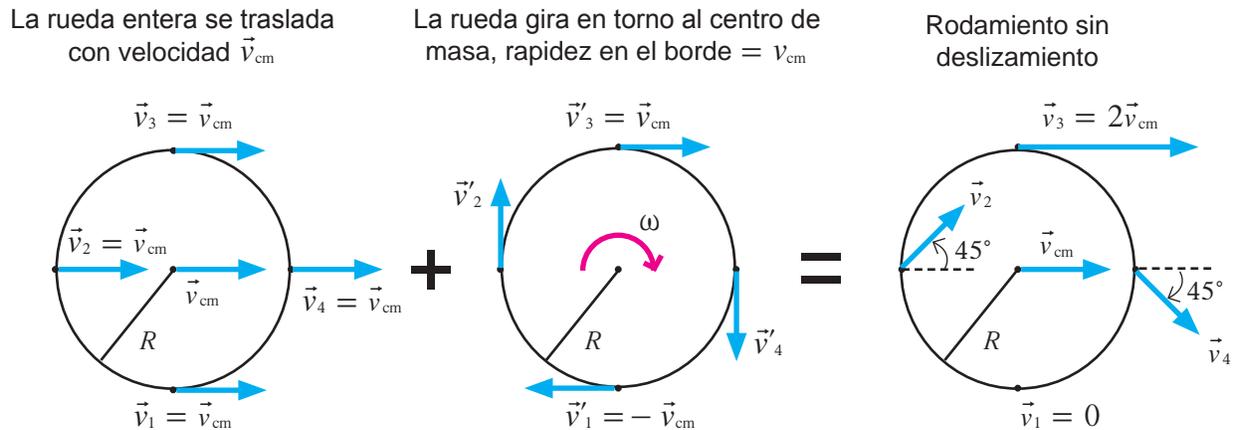


Fig. 3.22 Combinación de los movimientos de traslación y de rotación de una rueda la cual da como resultado el rodamiento sin deslizamiento.

¿Cuál será la expresión de la energía cinética de un cuerpo rígido cuando presenta rodadura pura?

De la figura 3.22 podemos expresar la energía cinética total del cilindro rodante como

$$E_c = \frac{1}{2} I_o \omega^2$$

Donde I_o es el momento de inercia alrededor del eje de rodamiento instantáneo O . Al aplicar el teorema de Steiner en la ecuación anterior se sustituye $I_o = I_{cm} + MR^2$ para obtener

$$E_c = \frac{1}{2} [I_{cm} + MR^2] \omega^2$$

$$E_c = \frac{1}{2} I_{cm} \omega^2 + \frac{1}{2} MR^2 \omega^2$$

Al sustituir la condición para la velocidad del centro de masa sin deslizamiento, $v_{cm} = R\omega$, se obtiene

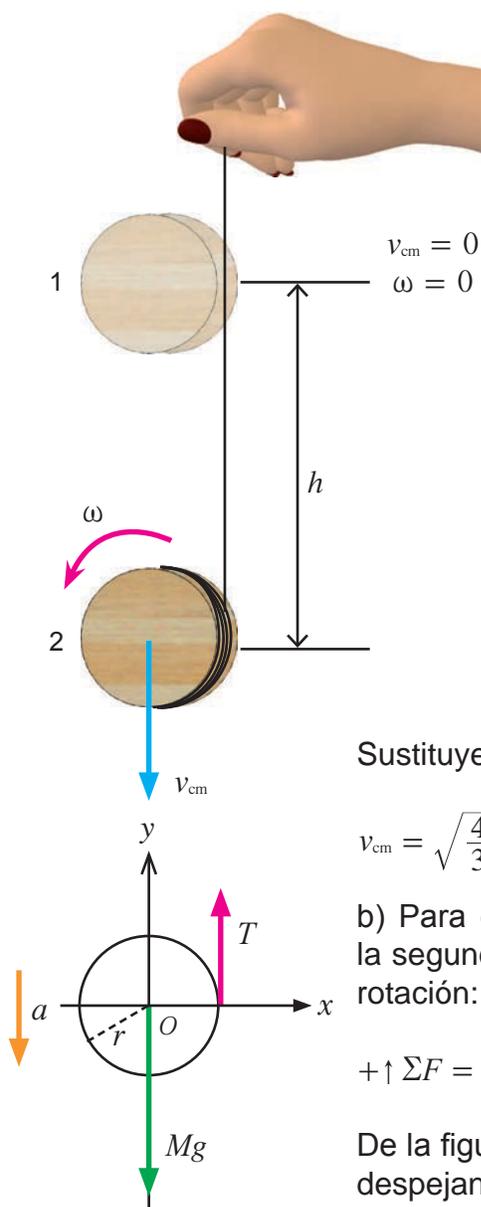
$$E_c = \frac{1}{2} I_{cm} \omega^2 + \frac{1}{2} M v_{cm}^2$$

La energía cinética total de un objeto efectuando rodadura pura es la suma de la energía cinética rotacional alrededor del centro de masa y la energía cinética traslacional del centro de masa.



Ejemplo 3.16. Se hace un yoyo burdo enrollando un cordel varias veces alrededor de un cilindro sólido de masa M y radio r . Se sostiene el extremo del cordel fijo mientras se suelta el cilindro desde el reposo. El cordel se desenrolla sin resbalar ni estirarse al caer y girar el cilindro. a) Calcule la rapidez del centro de masa v_{cm} después de caer una cierta distancia h . b) La aceleración hacia abajo del cilindro y c) La tensión del cordel.

En este ejemplo el cordel se mantiene estático, es decir, no se mueve ni se estira y solo sirve para proporcionar la rotación al cuerpo.



a) Para encontrar la rapidez aplicaremos la ley de la conservación de la energía mecánica en los puntos 1 y 2, como se muestra en el dibujo adjunto.

$$E_{M_1} = E_{M_2}$$

En el punto 1 hay energía potencial gravitatoria y en el punto 2 tenemos tanto energía cinética de traslación como de rotación.

$$Mgh = \frac{1}{2}Mv_{cm}^2 + \frac{1}{2}I_{cm}\omega^2$$

Sabemos que el momento de inercia del cilindro relleno respecto al eje de rotación que pasa por su centro, es $I_{cm} = \frac{1}{2}Mr^2$ y que la velocidad angular en función de la velocidad lineal es $\omega = \frac{v_{cm}}{r}$,

Sustituyendo y despejando la velocidad lineal (v_{cm}) tenemos

$$v_{cm} = \sqrt{\frac{4}{3}gh}.$$

b) Para calcular la aceleración lineal del yoyo, utilizaremos la segunda ley de Newton y su análoga en el movimiento de rotación:

$$+\uparrow \Sigma F = Ma_{cm} \text{ y } \curvearrowright \Sigma M_O = I\alpha.$$

De la figura, utilizando la ecuación de la torca, sustituyendo y despejando T , tenemos que

$$Tr = \frac{1}{2}Mr^2\alpha \longrightarrow T = \frac{1}{2}Mr\alpha$$



Ahora, tomando en cuenta que la aceleración angular y la aceleración lineal se relacionan con la ecuación $a_{cm} = r\alpha$, sustituimos

$$T = \frac{1}{2}Mr\alpha = \frac{1}{2}Mr\frac{a_{cm}}{r} = \frac{1}{2}Ma_{cm} \rightarrow \text{Ecuación 1}$$

Nuevamente de la figura, utilizando la segunda ley de Newton $\uparrow \Sigma F = Ma_{cm}$, sustituyendo y despejando T , tenemos que

$$T - Mg = M(-a_{cm}) \rightarrow T = Mg - Ma_{cm} \rightarrow \text{Ecuación 2}$$

igualando las ecuaciones 1 y 2, para luego despejar la aceleración lineal,

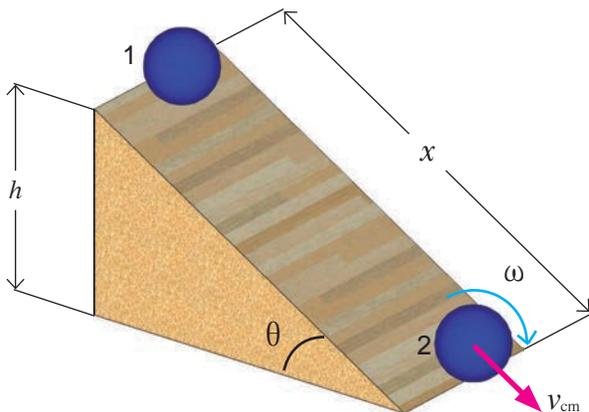
$$\frac{1}{2}Ma_{cm} = Mg - Ma_{cm}$$

resultando que $a_{cm} = \frac{2}{3}g$

c) Por último, al sustituir el resultado del inciso (b) en la ecuación 2, obtenemos

$$T = \frac{1}{3}Mg.$$

Ejemplo 3.17. a) Encuentre la velocidad lineal del centro de masa de una esfera sólida que rueda en un plano inclinado en el punto más bajo de éste. b) ¿Cuál es la aceleración lineal del centro de masa en este punto?



a) Considerando rodadura pura, aplicamos la ley de la conservación de la energía mecánica en los puntos 1 y 2.

$$Mgh = \frac{1}{2}Mv_{cm}^2 + \frac{1}{2}I_{cm}\omega^2$$

De la tabla 3.4, tenemos que el momento de inercia de una esfera rellena es

$$I_{cm} = \frac{2}{5}MR^2$$

Utilizando la ecuación $v_{cm} = R\omega$, que relaciona la velocidad lineal con la angular, sustituimos y despejamos, para obtener:

$$v_{cm} = \sqrt{\frac{10}{7}gh}$$



b) Para encontrar la aceleración lineal del centro de masa, solo necesitamos aplicar la ecuación 4 de la primera columna de la Tabla 3.4.

$$v_{cm2}^2 = v_{cm1}^2 + 2a_{cm}(x_2 - x_1)$$

$$v_{cm2}^2 = 2a_{cm}x_2 \rightarrow \text{Ecuación 1}$$

Del resultado del inciso (a), tenemos que el cuadrado de la velocidad lineal en el punto 2 es

$$v_{cm}^2 = \frac{10}{7}gh$$

De la figura, se obtiene la altura del triángulo en función del ángulo θ , siendo ésta $h = x \text{sen}\theta$. Sustituyendo estos dos resultados en la ecuación 1, despejamos a_{cm} .

$$\frac{10}{7}gx \text{sen}\theta = 2a_{cm}x$$

$$a_{cm} = \frac{5}{7}g \text{sen}\theta$$

Observa que el resultado de la velocidad y aceleración del centro de masa son independientes de la masa y el radio de la esfera que se estudia. Esto quiere decir que todas las esferas sólidas homogéneas tienen la misma velocidad y aceleración para un mismo plano inclinado. También podemos notar que esto último es válido para esferas huecas y cilindros, aunque su velocidad y aceleración serán menores, que para las esferas sólidas.

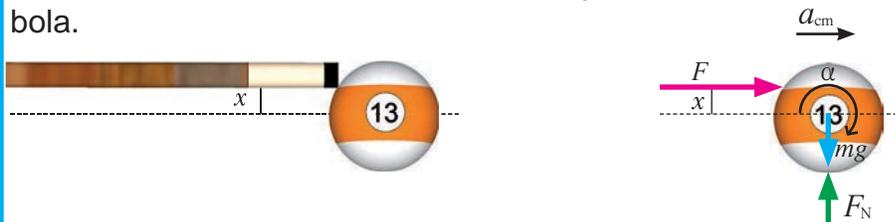
Compara con el resultado que se obtiene para un cuerpo que se desliza sobre el plano inclinado.

Para obtener un resultado numérico propon valores a los parámetros que se involucran en el ejemplo.





Ejemplo 3.18. Un taco de billar golpea la bola horizontalmente a una distancia x por encima del centro de la bola. Determine el valor de x para el cual la bola de billar rodará sin deslizamiento desde el comienzo. Expresar el resultado en función del radio R de la bola.



En el esquema mostrado, aparece la bola de billar un instante antes de que el taco se impacte sobre ella, así como, un instante después. Considerando rodadura pura, aplicamos la segunda ley de Newton de traslación y de rotación.

$$\vec{\uparrow} \Sigma F = Ma_{cm} \text{ y } \curvearrowright \Sigma M_o = I\alpha$$

Primeramente sustituimos el momento de inercia de la bola $\frac{2}{5}mR^2$, así como la condición de rodadura pura $v_{cm} = R\omega$, expresada también en términos de la aceleración angular $a_{cm} = R\alpha$, en la segunda ley de Newton para rotación eligiendo un eje que pasa por el centro de masa de la bola, se tiene.

$$\curvearrowright \Sigma M_o = I\alpha$$

$$-Fx = \left(\frac{2}{5}mR^2\right)\left(-\frac{a_{cm}}{R}\right)$$

$$F = \frac{2mRa_{cm}}{5x}$$

En seguida igualamos este resultado con la segunda ley de Newton de traslación.

$$\vec{\uparrow} \Sigma F = Ma_{cm}$$

$$\frac{2mRa_{cm}}{5x} = ma_{cm}$$

despejando, determinamos el valor de x en función de R , siendo éste

$$x = \frac{2}{5}R$$

Esto permite ver que si el taco pega a $(2/5)R$ del centro de masa de la bola de billar se asegura que ésta rueda sin deslizarse sobre la franela de la mesa de billar.



3.3. Ley de conservación del momento angular

El *momento angular* es una magnitud física importante en todas las teorías físicas, desde la mecánica clásica a la mecánica cuántica, pasando por la mecánica relativista. Su importancia en todas ellas se debe a que está relacionada con las simetrías rotacionales de los sistemas físicos. Bajo ciertas condiciones de simetría rotacional de los sistemas, el momento angular es una magnitud que se mantiene constante con el tiempo a medida que el sistema evoluciona, lo cual da lugar a una ley de conservación conocida como *ley de conservación del momento angular*.

En las secciones 3.2.1 y 3.2.2 se vió que el momento de torsión que actúa sobre un sólido rígido hace cambiar el momento angular con el tiempo, esto es

$$\vec{M}_o = \frac{\Delta \vec{L}_o}{\Delta t}$$

Cuando no hay momento de torsión externo o bien, cuando la resultante del momento de torsión externo es cero, significa que la aceleración angular del sólido rígido es cero, en otras palabras, no hay cambio en el tiempo del momento angular total; lo que equivale a decir que la suma de los momentos angulares de todas las partículas que conforman el sistema no varían en el tiempo. Este resultado se conoce como *Ley de conservación del momento angular* y posibilita junto a las leyes de conservación de la energía y de la cantidad de movimiento un método poderoso para describir, analizar y entender muchos de los fenómenos que vemos a diario en nuestra vida cotidiana.

Si $\vec{M}_o = 0$, entonces $\vec{L}_o = I\vec{\omega} = \text{constante}$.

El momento angular total de un sistema es constante si el momento de torsión externo resultante que actúa sobre el sistema es cero.

$$\vec{L}_{oi} = \vec{L}_{of}$$

Un ejemplo de un sistema donde se conserva el momento angular es la patinadora sobre hielo como se muestra en

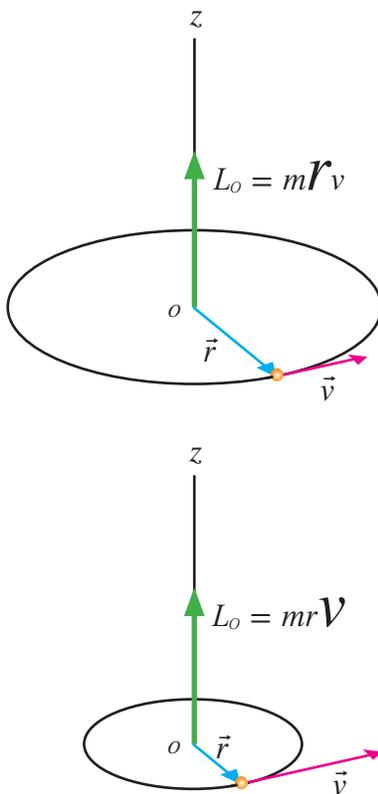


Fig. 3.23. En el movimiento circular donde los vectores posición y velocidad lineal son perpendiculares entre sí, para que el módulo del vector momento angular ($L_o = mrv$) se mantenga constante a medida que el círculo se hace más pequeño la velocidad deberá ser mayor.



la figura 3.24. Observe que si se cumple que $I\omega = cte.$ esto no significa que partes del sistema estén estáticos más al contrario pueden variar, lo que si es cierto es que si alguno de ellos aumenta, algún otro parámetro debe de disminuir; esto lo vemos en la patinadora si abre brazos y piernas la velocidad angular disminuye, sin embargo mientras mantiene los brazos y las piernas más juntas a su cuerpo entonces la velocidad angular aumenta.

La ley de la conservación del momento angular, establece de manera cualitativa y muy simplificada, que cuando el sistema esta aislado, si cambia el momento de inercia (I) del cuerpo, entonces debe alterarse su velocidad de rotación (ω) y viceversa, para que el producto (I)(ω), se mantenga constante, esto es, se conserve:

$$I_i \omega_i = I_f \omega_f.$$

Es posible que el momento de inercia I de un cuerpo que gira cambie desde I_i hasta I_f mediante un reacomodo de sus partes. Pero como \vec{L}_o es constante, si I cambia debe existir un cambio compensatorio en ω de tal manera que pase de ω_i a ω_f .

En la siguiente sección se verán más ejemplos y aplicaciones de la ley de conservación del momento angular de cuerpos rígidos en movimiento de rotación.



Fig. 3.24. Cuando la patinadora extienda los brazos, su momento de inercia aumenta y su velocidad angular disminuye, pero al encoger los brazos, el momento de inercia disminuye aumentando su velocidad angular.

Ejemplo 3.19. Un carrusel de radio $R = 2.0$ m tiene un momento de inercia $I = 250$ kgm^2 y está rotando a $f = 10.0$ rev/min alrededor de un eje vertical sin fricción con el motor apagado. De frente hacia el eje, un niño de 25.0 kg salta sobre el carrusel colocándose sobre el borde. ¿Cuál es la nueva frecuencia de este carrusel?





Aplicando la ley de la conservación del momento angular y considerando los instantes antes y después del salto del niño, tenemos que

$$L_i = L_f \quad \rightarrow \quad I_i \omega_i = I_f \omega_f \quad \rightarrow \quad I_i (2\pi f_i) = I_f (2\pi f_f)$$

El momento de inercia inicial corresponde al del carrusel, mientras que, el momento de inercia final es el del carrusel más el del niño. Por lo cual, se calcula primero el momento angular del niño para sumárselo al del carrusel y obtener así, el momento angular final.

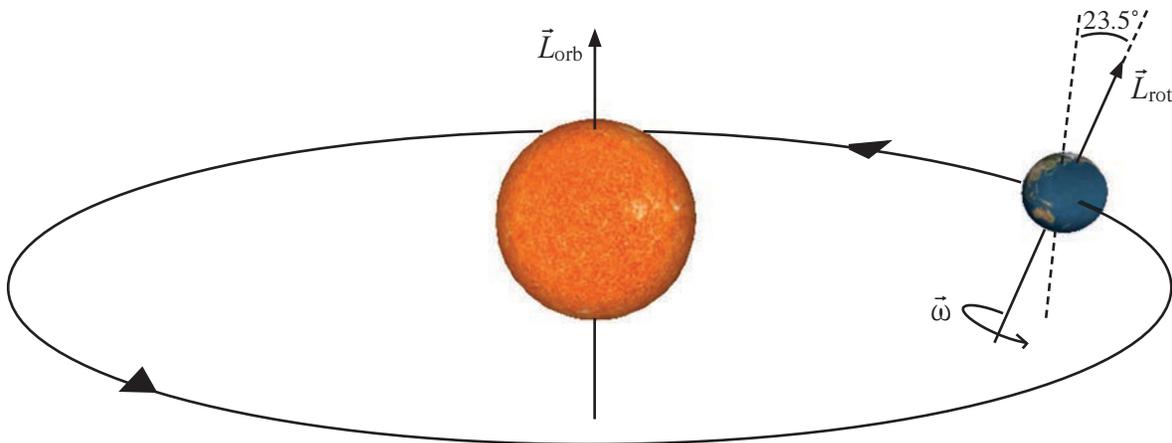
$$I_n = mR^2 = (25.0 \text{ kg})(2.0 \text{ m})^2 = 100.0 \text{ kgm}^2$$

$$I_f = I_c + I_n = 250.0 \text{ kgm}^2 + 100.0 \text{ kgm}^2 = 350.0 \text{ kgm}^2$$

Se despeja de la ley de la conservación del momento angular, la frecuencia final.

$$f_f = \frac{I_i (2\pi f_i)}{I_f (2\pi)} = \frac{I_i f_i}{I_f} = \frac{(250 \text{ kgm}^2) \left(10 \frac{\text{rev}}{\text{min}}\right)}{350 \text{ kgm}^2} = 7 \frac{\text{rev}}{\text{min}}$$

Ejemplo 3.20. Compara el momento angular de la Tierra con respecto a su eje de rotación y el momento angular asociado con su movimiento orbital alrededor del Sol. La masa y el radio de la Tierra son $5.98 \times 10^{24} \text{ kg}$ y $6.37 \times 10^6 \text{ m}$, respectivamente. El radio de su órbita alrededor del Sol es $1.5 \times 10^{11} \text{ m}$.



El momento angular de la Tierra debido a su rotación es

$$L_{\text{rot}} = I\omega = \left(\frac{2}{5} M_T R_T^2\right) \left(\frac{2\pi}{T}\right),$$



donde M_T es la masa de la Tierra con valor de $5.98 \times 10^{24} \text{ kg}$ y R_T es el radio de ésta cuyo valor es $6.37 \times 10^6 \text{ m}$. En tanto el periodo de rotación T es la duración de un día ($24 \text{ h} = 8.64 \times 10^4 \text{ s}$). Así que el valor del momento angular de la Tierra debido a su rotación es

$$L_{\text{rot}} = \left(\frac{2}{5} (5.98 \times 10^{24} \text{ kg}) (6.37 \times 10^6 \text{ m})^2 \right) \left(\frac{2\pi}{8.64 \times 10^4 \text{ s}} \right)$$

$$L_{\text{rot}} = 7 \times 10^{33} \text{ kg} \frac{\text{m}^2}{\text{s}}$$

Por otro lado, para calcular el momento angular de la Tierra debido a su movimiento orbital o de traslación respecto al Sol es necesario considerar a ésta como una partícula cuyo eje de rotación está en el propio Sol y que es perpendicular al radio de la órbita R_{orb} y al momento lineal de la Tierra $p = M_T v$.

$$\vec{L}_{\text{orb}} = \vec{R}_{\text{orb}} \times \vec{p} \quad \rightarrow \quad L_{\text{orb}} = R_{\text{orb}} p \sin 90^\circ$$

$$L_{\text{orb}} = R_{\text{orb}} p = R_{\text{orb}} M_T v = R_{\text{orb}} M_T (\omega R_{\text{orb}}), \text{ de aquí que}$$

$$L_{\text{orb}} = (M_T R_{\text{orb}}^2) \left(\frac{2\pi}{T_{\text{orb}}} \right), \text{ donde } T_{\text{orb}} \text{ es el periodo de una vuelta completa alrededor del Sol es}$$

decir $1 \text{ año} = 365 \text{ días} = 3.15 \times 10^7 \text{ s}$, sustituyendo obtenemos que

$$L_{\text{orb}} = (5.98 \times 10^{24} \text{ kg}) (1.5 \times 10^{11} \text{ m})^2 \left(\frac{2\pi}{3.15 \times 10^7 \text{ s}} \right), \text{ finalmente}$$

$$L_{\text{orb}} = 2.6 \times 10^{40} \text{ kg} \frac{\text{m}^2}{\text{s}}.$$

Se observa que, en magnitud, el momento angular orbital L_{orb} es mayor que el momento angular de rotación L_{rot} de la Tierra. Además el momento angular rotacional forma un ángulo de 23.5° respecto a la dirección del momento angular orbital de la Tierra.

Notemos, por otra parte, que estos momentos angulares son aproximadamente constantes en la vida de la Tierra.

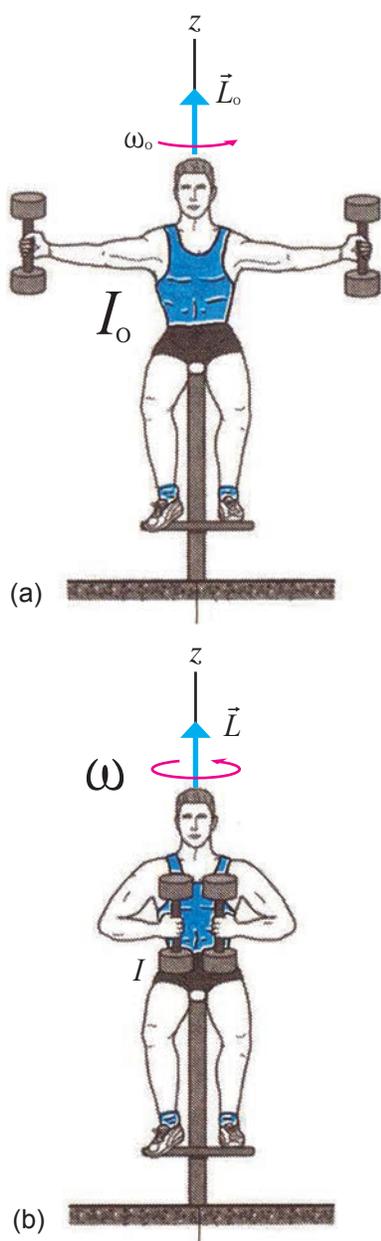


Fig. 3.25. El momento angular \vec{L}_z posee el mismo valor en ambos casos. (a) Al girar el deportista con los brazos extendidos, el momento de inercia aumenta y la velocidad angular disminuye, (b) pero al encoger los brazos, el momento de inercia disminuye aumentando la velocidad angular, girando éste más rápido.

3.3.1. Utilización de la ley de conservación de momento angular para el análisis de diversas situaciones.

El momento angular de la Tierra.

¡La rotación de la Tierra es la que nos mantiene con vida! Se sabe que por el efecto de la rotación de la Tierra sobre su propio eje se producen el día y la noche. Imagínate, por un momento, que este cambio se pierde entonces estaríamos “achicharrados” o bien “congelados” según la localización de nuestro planeta con respecto al Sol (ver ejemplo 3.20).

El atleta sentado en un banquillo que gira.

En la figura 3.25 se ilustra a un atleta sentado sobre un banquillo que puede girar libremente en torno a un eje vertical. El momento inicial es cuando el atleta extiende sus brazos sosteniendo unas pesas y que gira con una velocidad angular ω_i . Se observa que el sistema atleta más banquillo más pesas es un sistema aislado ya que no actúa ninguna torca vertical externa, por lo que \vec{L}_z se conserva.

Cuando el atleta encoge sus brazos y las pesas hacia su cuerpo el momento de inercia de su sistema se reduce desde su valor inicial I_0 hasta el valor más pequeño I porque las pesas ahora están más cerca del eje de rotación. Su velocidad angular final es

$$\omega = \left(\frac{I_0}{I}\right)\omega_0,$$

la cual es más grande que su velocidad angular inicial ya que $I < I_0$ por lo que el atleta gira más rápidamente. En caso de que quiera disminuir su velocidad angular solo basta que extienda sus brazos.



La clavadista tirándose de un trampolín.

En este ejemplo de aplicación de la ley de conservación del momento angular se va a analizar el movimiento de una clavadista en dos situaciones, cuando realiza una media vuelta y la correspondiente para vuelta y media.

En la figura 3.26 se muestran los dos casos de la clavadista. En (a) la clavadista, al saltar se impulsa a sí misma ligeramente hacia delante de tal manera que adquiere una velocidad de rotación pequeña, lo suficiente para llevarla de cabeza hacia el agua al tiempo que realiza una media vuelta.

En (b), cuando ella impulsa su cuerpo, disminuye su momento de inercia al realizar la posición de escuadra por lo que obtiene un aumento en su velocidad angular. Este aumento le permite completar vuelta y media y así al final del clavado vuelve a la posición normal de caída y disminuye su velocidad angular para entrar en el agua. Se observa que mientras la clavadista se encuentra en el aire, sobre ella no actúa ninguna torca externa que pueda cambiar su momento angular con respecto a su centro de masa. En todo caso, la única fuerza externa es la fuerza de gravedad (el peso de la clavadista) la cual actúa a través de su centro de masa por lo que no produce una torca con respecto a ese punto. Por otro lado, se está despreciando la resistencia del aire, el cual también podría producir una torca neta y cambiar el momento angular.

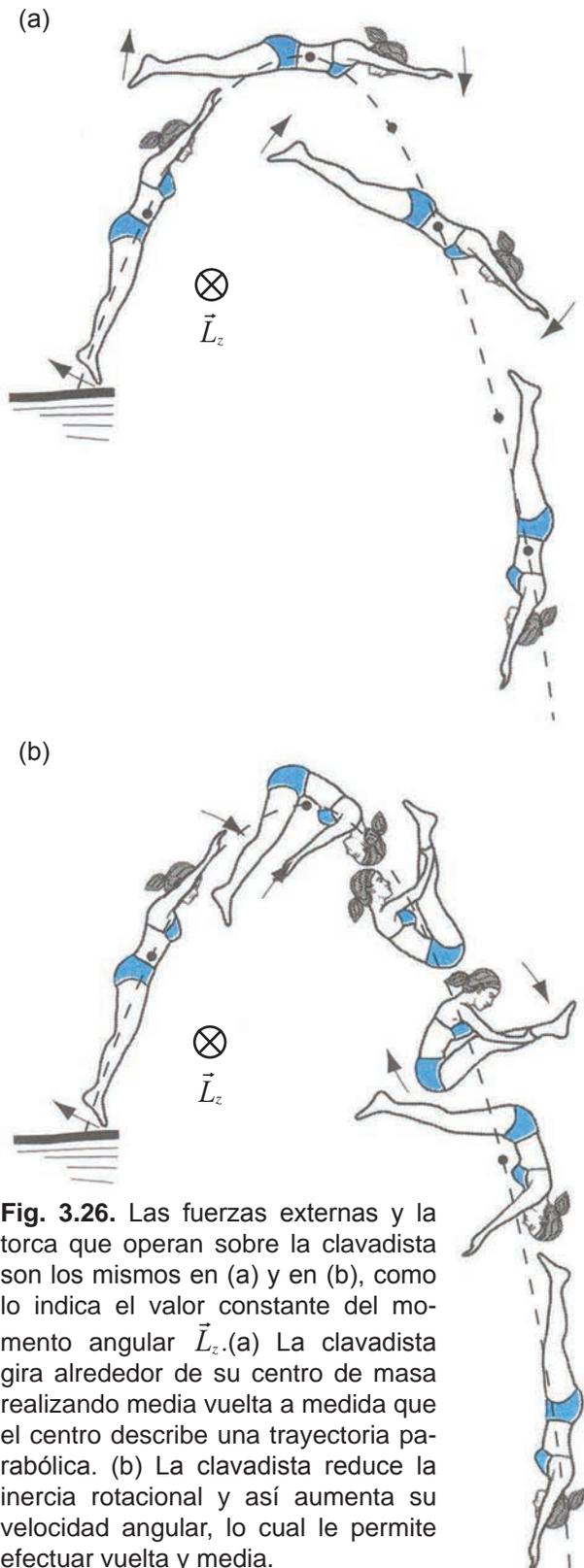
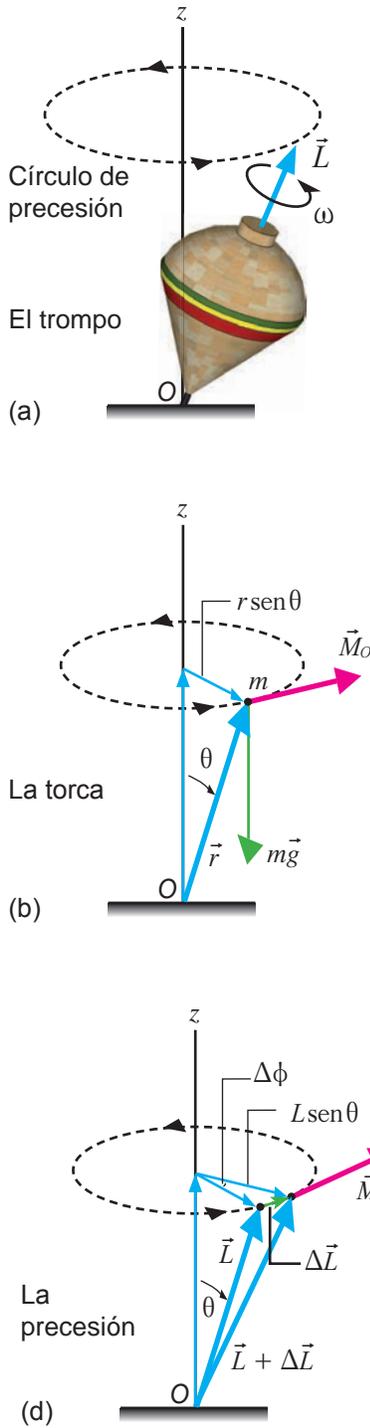


Fig. 3.26. Las fuerzas externas y la torca que operan sobre la clavadista son los mismos en (a) y en (b), como lo indica el valor constante del momento angular \vec{L}_z . (a) La clavadista gira alrededor de su centro de masa realizando media vuelta a medida que el centro describe una trayectoria parabólica. (b) La clavadista reduce la inercia rotacional y así aumenta su velocidad angular, lo cual le permite efectuar vuelta y media.



El trompo y el movimiento de precesión.

En la figura 3.27a se muestra un trompo que gira en torno a su eje. Se supone que la punta del trompo está fija en el origen O del sistema de referencia. El movimiento de *precesión* del eje del trompo es el movimiento de giro de éste en torno al eje vertical. Como se verá, este movimiento surge porque la fuerza de gravedad implementa una torca externa al trompo.

Para hacer el análisis se sustituye el trompo por una partícula con masa equivalente a la masa total del trompo (Fig. 3.27b) y situada en el centro de masa del mismo. La torca que produce el peso sobre el trompo, respecto a O , es

$$M_o = mgr \text{sen} \theta$$

Se observa que esta torca es perpendicular al momento angular \vec{L} del trompo y produce su movimiento a través del círculo de precesión (Fig. 3.27c). El cambio de \vec{L} respecto al tiempo producido por \vec{M}_o es

$$\Delta \vec{L} = \vec{M}_o \Delta t,$$

se nota también que este cambio $\Delta \vec{L}$ está en la dirección de la torca y por lo tanto, perpendicular a \vec{L} (Fig. 3.27c). El efecto de \vec{M}_o es cambiar \vec{L} por $\vec{L} + \Delta \vec{L}$ que es un vector con la misma magnitud que \vec{L} pero que apunta en una dirección diferente.

Ahora se verá cuál es la velocidad del movimiento de precesión. En un tiempo Δt , el eje gira un ángulo $\Delta \phi$ (Fig. 3.27d), entonces la rapidez angular de la precesión es

Fig. 3.27. a) Un trompo en rotación muestra precesión alrededor de un eje vertical. b) Su peso ejerce una torca alrededor del punto de contacto con el suelo. c) La torca es perpendicular al vector del momento angular. d) La torca cambia la dirección del momento angular, causando la precesión.





$$\omega_p = \frac{\Delta\phi}{\Delta t}$$

En la figura 3.27d se ve la relación de $\Delta\phi$ con $\Delta\vec{L}$ y $L\text{sen}\theta$, de tal manera que

$$\Delta\phi = \frac{\Delta L}{L\text{sen}\theta} = \frac{M_o\Delta t}{L\text{sen}\theta}$$

Por lo tanto,

$$\omega_p = \frac{\Delta\phi}{\Delta t} = \frac{M_o\Delta t}{L\text{sen}\theta} = \frac{M_o}{L\text{sen}\theta} = \frac{mgr\text{sen}\theta}{L\text{sen}\theta} = \frac{mgr}{L}$$

$$\omega_p = \frac{mgr}{I\omega}$$

Esto quiere decir que la velocidad angular de la precesión es inversamente proporcional al momento angular, y por lo mismo a la rapidez angular rotacional, lo que significa que cuanto más rápido gire el trompo, más lenta será su velocidad de precesión.

Como conclusión se puede decir que el momento angular del trompo tiene dos componentes: el momento angular rotacional alrededor de su eje de simetría y el de precesión. El momento angular total es la suma vectorial de estos dos vectores lo cuales en general no se hallan en su eje de simetría, de aquí que no siempre es correcto suponer que el momento angular total esté en el eje de simetría, pero si la precesión es muy pequeña comparada con la rotacional entonces se registrará una desviación muy pequeña entre la dirección del eje de simetría y la del momento angular.

Demuestre que los parámetros involucrados en el movimiento de precesión del trompo \vec{M}_o , $\vec{\omega}_p$ y \vec{L} satisfacen la relación $\vec{M}_o = \vec{\omega}_p \times \vec{L}$.





3.4. Actividades de sistematización y consolidación

3.4.1. Sopa de letras con palabras clave del capítulo



Escribe cada palabra en Wikipedia o en Encarta y da un vistazo a lo que encuentres.



Aceleración	Perpendicular
Ángulo	Radián
Circunferencia	Radio
Eje	Revolución
Frecuencia	Rodadura
Fuerza	Rotación
Inercia	Sólido
Masa	Steiner
Momento	Tangente
Paralelos	Torca
Partícula	Velocidad
Periodo	

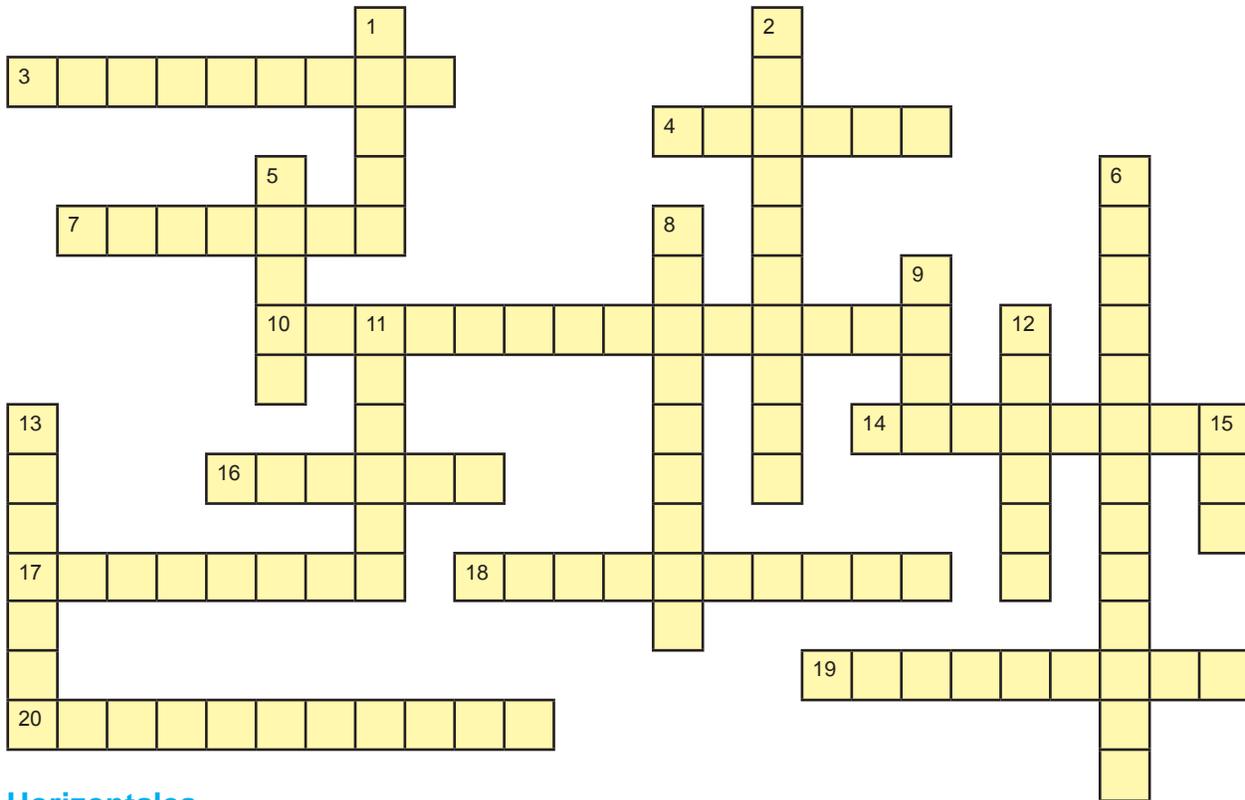


3.4.2. Conexión de conceptos e ideas

1. Cuerpo que no sufre deformación por efecto de fuerzas externas, las separaciones entre sus partículas permanecen constantes.	<input type="checkbox"/> Aceleración angular
2. Suma de los productos que resultan de multiplicar la masa de cada partícula de un cuerpo por el cuadrado de su distancia a un eje de rotación.	<input type="checkbox"/> Aceleración centrípeta
3. Movimiento de un cuerpo en el cual todo segmento rectilíneo trazado sobre él permanece paralelo a sí mismo.	<input type="checkbox"/> Aceleración tangencial
4. Movimiento de un cuerpo en el que todas sus partículas describen trayectorias circulares centradas sobre un eje y contenidas en planos normales a éste.	<input type="checkbox"/> Centro de masa
5. Ángulo medido entre una línea fija y el vector posición de una partícula que se mueve en una circunferencia.	<input type="checkbox"/> Cuerpo rígido
6. Cambio en la posición angular.	<input type="checkbox"/> Desplazamiento angular
7. Cambio que experimenta el desplazamiento angular por unidad de tiempo.	<input type="checkbox"/> Energía cinética de rotación
8. Cambio que experimenta la velocidad angular por unidad de tiempo.	<input type="checkbox"/> Energía cinética total de un objeto efectuando rodadura pura
9. Movimiento que se caracteriza por el hecho de que la aceleración angular es cero, en consecuencia, la velocidad angular es constante, y la posición angular está dada por la ecuación $\theta = \theta_0 + \omega t$.	<input type="checkbox"/> Ley de conservación del momento angular
10. Es proporcional a la velocidad angular, donde la constante de proporcionalidad es el radio de la circunferencia.	<input type="checkbox"/> Momento angular
11. Es proporcional a la aceleración angular, donde la constante de proporcionalidad es el radio de la circunferencia.	<input type="checkbox"/> Momento de inercia
12. Es proporcional al cuadrado de la velocidad angular, donde la constante de proporcionalidad es el radio de la circunferencia.	<input type="checkbox"/> Momento de torsión
13. El momento de inercia de un sólido rígido sobre cualquier eje es igual al momento de inercia del objeto sobre el eje paralelo que pasa a través del centro de masa más el producto de la masa y la distancia perpendicular entre los ejes, mencionados.	<input type="checkbox"/> Movimiento de rotación
14. Es proporcional a la aceleración angular, donde la constante de proporcionalidad es el momento de inercia.	<input type="checkbox"/> Movimiento de rotación uniforme
15. Es proporcional a la velocidad angular, donde la constante de proporcionalidad es el momento de inercia.	<input type="checkbox"/> Movimiento de traslación
16. El momento angular total de un sistema es constante si el momento de torsión externo resultante que actúa sobre el sistema es cero.	<input type="checkbox"/> Posición angular
17. Suma de la energía cinética rotacional alrededor del centro de masa y la energía cinética traslacional del centro de masa.	<input type="checkbox"/> Rodadura pura
18. Movimiento de un sólido rígido que gira alrededor de un eje de rotación instantáneo, localizado en el punto de contacto con la superficie, donde las partículas tienen velocidad nula, es decir no resbalan.	<input type="checkbox"/> Teorema de Steiner
19. Punto geométrico que dinámicamente se comporta como si en él estuviera aplicada la resultante de las fuerzas externas al sistema, o bien, punto donde, a efectos inerciales, se supone concentrada toda la masa del sistema.	<input type="checkbox"/> Velocidad angular
20. Es igual a un medio del momento inercial por el cuadrado de la velocidad angular del cuerpo rígido.	<input type="checkbox"/> Velocidad lineal



3.4.3. Crucigrama



Horizontales

3. Rapidez con que se realiza el desplazamiento, es decir, con que cambia la posición.
4. Rapidez con que cambia la cantidad de movimiento.
7. Tiempo que se requiere para que un cuerpo en rotación regrese a su posición y velocidad iniciales.
10. Curva plana, cerrada, cuyos puntos son equidistantes de otro punto fijo llamado centro, situado en el mismo plano.
14. Solo tiene un punto en común con una curva, es decir la toca en un solo punto.
16. Es uno de los cuatro estados de agregación de la materia, se caracteriza porque opone resistencia a cambios de forma y de volumen.
17. Movimiento de un cuerpo extenso en el que cualquier punto del mismo se conserva equidistante a un punto fijo.
18. Un giro completo alrededor de un eje.
19. Dos líneas o planos equidistantes entre sí y que por más que se prolonguen no pueden encontrarse.
20. Rapidez con que cambia la velocidad.

Verticales

1. Línea recta desde el centro de un círculo o esfera hacia su borde exterior.
2. Número de pulsos, repeticiones o ciclos por unidad de tiempo.
5. Su módulo se calcula multiplicando la magnitud de la fuerza aplicada por su brazo de palanca.
6. Que forma ángulo recto con otra línea o con otro plano.
8. Abstracción de un cuerpo dotado de masa concentrada idealmente en un punto.
9. Magnitud física que expresa la inercia de los cuerpos.
11. Ángulo subtendido por una longitud de arco igual al radio del arco.
12. Figura geométrica formada en una superficie por dos líneas que parten de un mismo punto.
13. Propiedad de los cuerpos de no modificar su estado de reposo o movimiento si no es por la acción de una fuerza.
15. Recta alrededor de la cual un cuerpo rígido realiza un movimiento de rotación.



3.4.4. Actividades de repaso

1. Confecciona un mapa conceptual que conecte conceptos e ideas, tratados en este capítulo, iniciando con el concepto de movimiento de rotación.
2. Responde, resumidamente, las siguientes preguntas: ¿Cómo podemos describir el movimiento rotacional? ¿Qué son la velocidad y la aceleración angular y cómo se relacionan con conceptos similares para describir el movimiento lineal? ¿Qué es el momento de torsión y cómo participa para hacer que un cuerpo gire? ¿Cómo puede adaptarse la segunda ley de Newton para explicar el movimiento de rotación? ¿Cómo se describe la inercia rotacional? ¿Qué es el momento angular y cuando se conserva?
3. Elabora una tabla de dos columnas, en una de ellas anota las magnitudes escalares y en la otra las magnitudes vectoriales que sustentan este capítulo.
4. Indica tres magnitudes vectoriales estudiadas en este capítulo que se definan como el producto vectorial o producto cruz de dos vectores y auxiliándote de un esquema gráfico explica cómo obtener sus características (módulo, dirección y sentido).
5. Utiliza un “pirinola” y ve qué tan rápido puedes hacerlo girar.
6. Aplica la regla de la mano derecha para ver el signo de la rotación de la actividad anterior. Hazlo girar en el otro sentido y vuelve a aplicar la regla de la mano derecha. ¿Es más fácil girarlo en un sentido que en el otro? Explica.
7. Elabora una tabla de dos columnas, en una de ellas anota las magnitudes para el movimiento de traslación y en la otra sus homólogas para el movimiento de rotación que sustentan este capítulo.
8. Elabora una tabla de dos columnas, en una de ellas anota las ecuaciones para el movimiento de traslación y en la otra sus homólogas para el movimiento de rotación que sustentan este capítulo.
9. ¿La velocidad lineal de una niña, será la misma, cuando está parada cerca del centro de un tiovivo que gira y cuando está parada cerca del borde? Explique por qué.
10. ¿La velocidad angular de un niño, será la misma, cuando está parado cerca del centro de un tiovivo que gira y cuando está parado cerca del borde? Explique por qué.





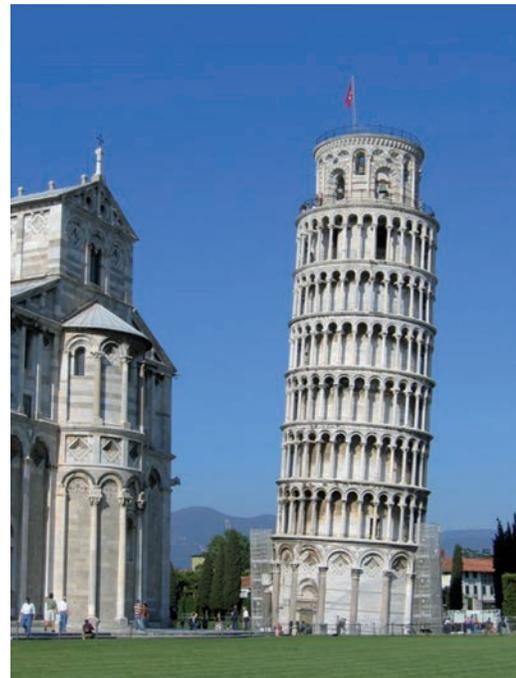
11. Indica la diferencia entre la cantidad de movimiento lineal y la cantidad de movimiento angular.
12. Si un cuerpo tiene una aceleración angular constante, ¿su velocidad angular también será constante? Explique por qué.
13. ¿Es posible que dos cuerpos con la misma masa tengan diferentes inercias rotacionales? Explique por qué.
14. Dos objetos tienen la misma masa total, pero el objeto A la tiene concentrada más cerca del eje de rotación que el B. ¿Cuál de los dos será más fácil poner en movimiento rotacional? Explique por qué.
15. ¿Es posible que un patinador en hielo cambie su velocidad angular sin que intervenga ningún momento de torsión externo? Explique por qué.
16. Una patinadora en hielo gira en sentido contrario al de las manecillas del reloj respecto a un eje vertical cuando se le ve desde arriba. ¿Cuál es la dirección de su vector momento angular? Explique por qué.
17. ¿Por qué una bicicleta se mantiene erguida cuando se pedalea pero no cuando está en reposo?
18. Construye una tabla que indique el momento de inercia de sólidos rígidos diferentes a los que contiene la tabla 3.4.
19. ¿Qué conceptos, del capítulo, tienen dos o más nombres? Investígalos y descríbelos.
20. Investiga aplicaciones del teorema de Steiner, también llamado teorema de los ejes paralelos.





3.4.5. Ejercicios de repaso

1. En Wikipedia se dice que la Torre de Pisa (en Italia) se encuentra inclinada 4° respecto a la vertical. Utilizando la imagen adjunta comprueba la afirmación anterior usando un transportador.
2. El aspa de un ventilador gira inicialmente con una frecuencia de 33 rpm. Posteriormente reduce su velocidad hasta que se detiene en un tiempo de 32 s. Calcula a) la velocidad angular media y b) la aceleración angular del aspa.



Respuesta: $1.73 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$ y $-0.108 \frac{\text{rad}}{\text{s}^2}$

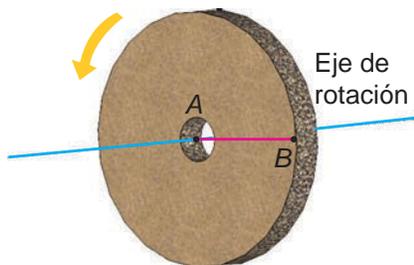
3. Un carrusel inicialmente en reposo se hace funcionar, manteniendo una aceleración angular constante de 0.06 rad/s^2 , en el instante en que trascurrieron 8.0 s, determine lo siguiente: a) la velocidad angular del carrusel, b) la velocidad lineal de un niño que va montado en un caballito localizado a 2.5 m del centro, c) la aceleración (lineal) tangencial del niño, d) la aceleración centrípeta del niño, y e) la aceleración total del niño.

Respuesta: 0.48 rad/s , 1.2 m/s , 0.15 m/s^2 , 0.58 m/s^2 y 0.60 m/s^2 15°



4. Un automóvil que va a 96.6 km/h tiene ruedas de 0.80 m de diámetro. a) ¿Cuál es la velocidad angular de las ruedas alrededor del eje? b) Si las ruedas se detienen uniformemente en 30 vueltas, ¿cuál es la aceleración angular? c) ¿Qué distancia recorre el automóvil durante este periodo de frenado?

Respuesta: 67 rad/s , -11.9 rad/s^2 y 75.4 m



5. Comenzando del reposo cuando el cronómetro dio inicio, una piedra abrasiva de molino tiene una aceleración angular constante de 3.2 rad/s^2 . En ese instante la línea de referencia AB en la figura es horizontal. Determine el desplazamiento angular de la línea AB , así como, la rapidez angular de la piedra a los 2.5 s .

Respuesta: 10 rad (1.59 rev) y $8 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$

6. Siguiendo con la piedra abrasiva de molino, suponga que se apaga la energía cuando está girando con una rapidez angular de 8.6 rad/s . Una pequeña fuerza de fricción en el eje causa una desaceleración angular constante y la piedra finalmente se detiene en un tiempo de 192 s . Determine a) la desaceleración angular y b) el ángulo total a que gira durante la reducción de la velocidad.

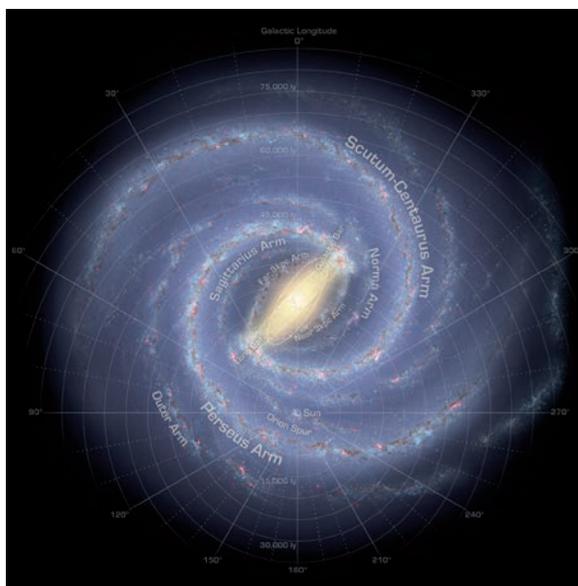
Respuesta: -0.045 rad/s^2 y 131 rev

7. Si el radio de la piedra abrasiva de molino es 0.24 m , obtenga a) la rapidez lineal o tangencial de un punto en el borde si su velocidad angular es 8.6 rad/s , b) la aceleración tangencial de un punto del borde si su aceleración angular es 3.2 rad/s^2 , y la aceleración centrípeta o radial de un punto del borde.

Respuesta: 2.06 m/s , 0.77 m/s^2 y 17.75 m/s^2

8. El Sol se encuentra a 2.3×10^4 años luz del centro de nuestra galaxia (La Vía Láctea) y se mueve en un círculo alrededor de ese centro con una rapidez de 250 km/s .
 a) ¿Cuánto tarda el Sol en completar una revolución alrededor del centro galáctico?
 b) ¿Cuántas revoluciones ha realizado desde que se formó 4.5×10^9 años?

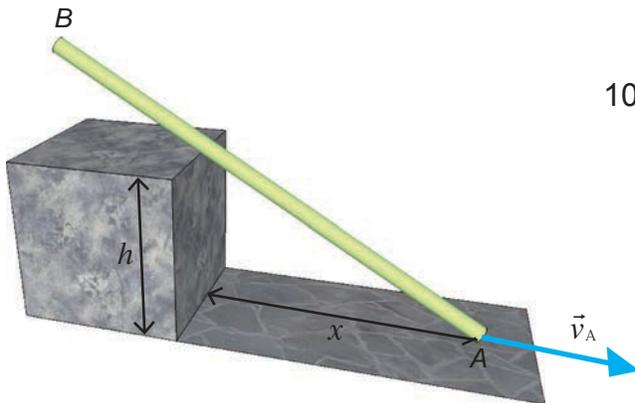
Respuesta: $5.5 \times 10^{15} \text{ s}$ (173 millones de años) y 26 rev





9. Imagina que se debe diseñar un eje cilíndrico giratorio para levantar cubetas de cemento, desde el suelo hasta una azotea. Las cubetas se colgarán de un gancho en el extremo libre de un cable que se enrolla en el eje; al girar este eje las cubetas ascienden. a) ¿Qué diámetro debe tener el eje para levantar las cubetas con rapidez constante de 20 cm/s mientras gira a 75.0 rpm ? b) Si el eje debe impartir a las cubetas una aceleración hacia arriba de 0.40 m/s^2 , ¿qué aceleración angular deberá tener el eje?

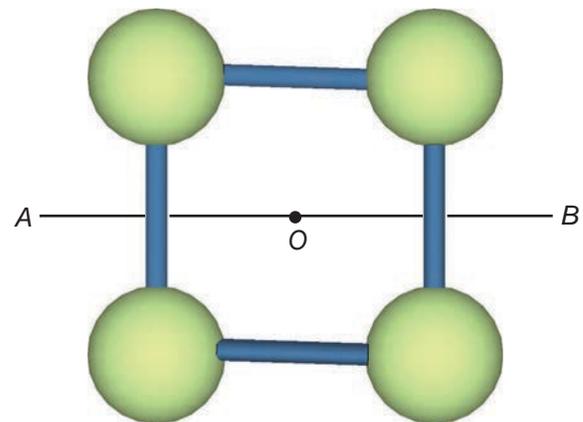
Respuesta: 5.09 cm y 15.7 rad/s^2



10. Una barra de 3 m de longitud resbala por el suelo apoyándose en un escalón de altura $h = 1 \text{ m}$. Si el extremo A , en el momento en que está separado del escalón $x = \sqrt{3} \text{ m}$ tiene una velocidad $v_A = 1 \text{ m/s}$. Calcula la velocidad angular de la barra en ese momento.

Respuesta: $0.5 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$

11. Cuatro pequeñas esferas, las cuales se pueden considerar con masas puntuales de 0.200 kg conforman un cuadrado de 0.400 m de lado conectados por alambres tan delgados que pueden considerarse sin masa. Encuentra el momento de inercia del sistema alrededor de un eje a) que pasa a través del centro del cuadrado y perpendicular a su plano (el eje que pasa por O en la figura), b) que bisecta dos lados opuestos del cuadrado (eje a lo largo de la línea AB de la figura) y c) que pasa por la esfera superior izquierda e inferior derecha pasando por O .



Respuesta: 0.064 kgm^2 , 0.032 kgm^2 y 0.032 kgm^2

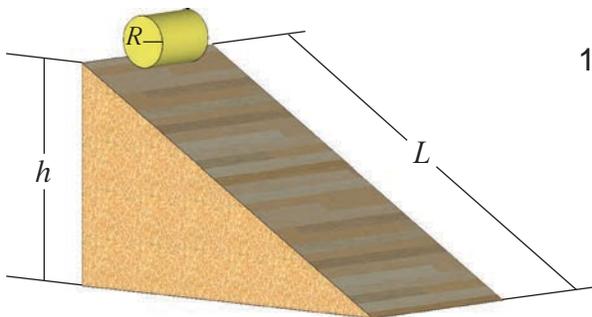
12. Se sabe que el momento de inercia respecto al extremo de una varilla es de 0.25 kgm^2 . Calcular el momento de inercia respecto a un eje paralelo al mismo que pasa por el centro de masa sabiendo que la longitud de la varilla es de $L = 1.2 \text{ m}$.

Respuesta: 0.062 kgm^2



13. Calcula el momento de inercia de cada uno de las siguientes objetos uniformes alrededor del eje indicado: (a) Una varilla delgada de 2.5 kg y de longitud 75.0 cm, alrededor de un eje perpendicular a ella y que pasa a través de (i) un lado terminal, (ii) su centro, y (iii) alrededor de un eje paralelo a la varilla y que pasa a través de ella. (b) Una esfera de 3.00 kg y 38 cm de diámetro, alrededor de un eje a través de su centro, si la esfera es (i) sólida y (ii) hueca con un casquete delgado. (c) Un cilindro de 8.00 kg y 19.5 cm de longitud y 12.0 cm de diámetro alrededor del eje central del cilindro, si el cilindro es (i) de casquete delgado y hueco, (ii) sólido.

Respuesta: 0.47 kgm^2 , 0.11 kgm^2 , 0.0 kgm^2 , 0.43 kgm^2 , 0.07 kgm^2 , 0.028 kgm^2 y 0.014 kgm^2

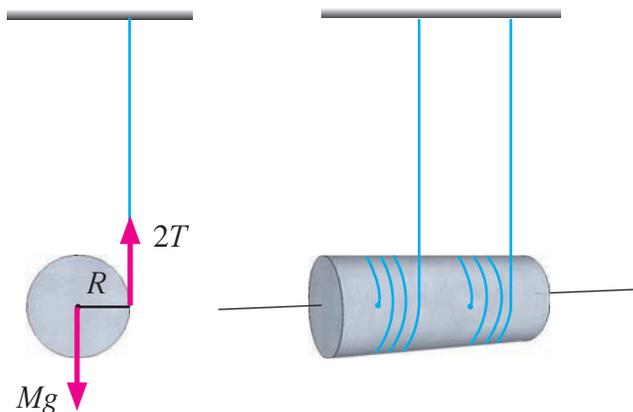


14. Un cilindro sólido de masa M y de radio R rueda hacia abajo sin deslizamiento por un plano inclinado de longitud L y altura h . Calcule la velocidad del centro de masa cuando el cilindro llega hasta abajo.

Respuesta: $\sqrt{\frac{4}{3}gh}$

15. Un cilindro sólido de longitud L y radio R tiene una masa M . Alrededor del cilindro están enrolladas dos cuerdas, cada una de ellas cerca de cada extremo, y los extremos de las cuerdas están unidos a ganchos en el techo. El cilindro se mantiene horizontalmente con las dos cuerdas verticales y luego se deja caer. Calcule a) la tensión en cada cuerda cuando se desenrollan y b) la aceleración lineal del cilindro cuando cae.

Respuesta: $\frac{1}{6}Mg$, $\frac{2}{3}g$



Para simplificar los cálculos, considera positivo el sentido del movimiento.





16. Una máquina de Atwood tiene dos cuerpos de masas $m_1 = 1.00 \text{ kg}$ y $m_2 = 2.10 \text{ kg}$, unidos por una cuerda de masa despreciable que pasa por una polea sin rozamiento. La polea es un disco uniforme de masa 400 g y un radio de 4.00 cm . La cuerda no se desliza sobre la polea, (a) Hallar la aceleración de las masas, (b) ¿Cuál es la tensión de la cuerda que soporta a m_1 ? ¿Y la de la cuerda que soporta a m_2 . ¿En cuánto difieren? (c) ¿Cuáles serías las respuestas dadas si se hubiese despreciado la masa de la polea?

Respuesta: 3.27 m/s^2 , 13.1 N , 13.7 N , 0.6 N
 3.48 m/s^2 , 13.3 N , 13.3 N , 0.0 N



17. Un disco de esmeril con un momento de inercia de $1.22 \times 10^{-3} \text{ kgm}^2$ está unido a un taladro eléctrico cuyo motor desarrolla una torca de 15.8 Nm . Encuentra a) el momento angular y b) la velocidad angular del disco, 33 ms después de haber encendido el motor.

Respuesta: 0.5 Nms y 427.3 rad/s

18. Un hombre está de pie en una plataforma sin fricción que gira con una frecuencia de 1.22 rev/s ; tiene los brazos extendidos y sostiene un peso en cada mano. Con ellas, en esa posición, el momento de inercia total del hombre, de las pesas y de la plataforma es 6.13 kgm^2 . Si el hombre moviendo las pesas reduce su momento de inercia a 1.97 kgm^2 , determine la frecuencia resultante de la plataforma.

Respuesta: 3.8 rev/s



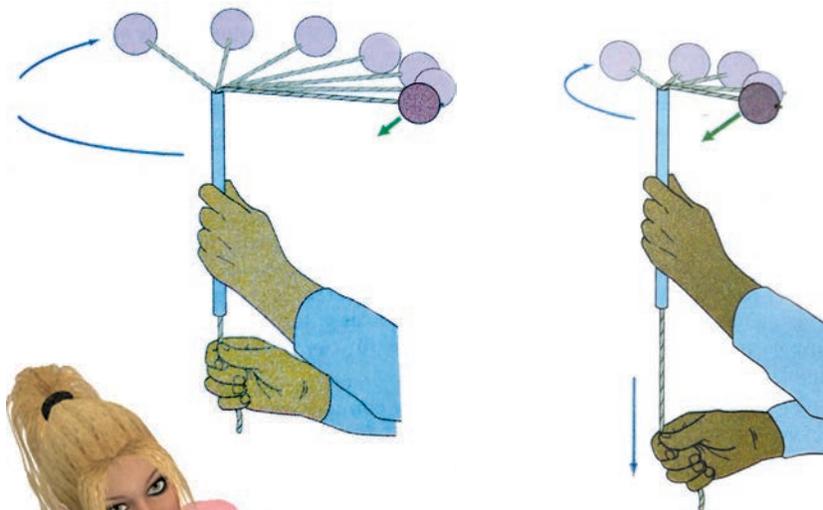
19. Un tiiovivo de radio 2 m y momento de inercia 50 kgm^2 está girando alrededor de un pivote sin rozamiento a razón de una revolución cada 5 s . Un niño de masa 25 kg que originalmente se encuentra de pie en el centro del tiiovivo, se desplaza hasta el borde. Determinar la nueva velocidad angular del tiiovivo.

Respuesta: $\frac{1}{15} \text{ rev/s}$

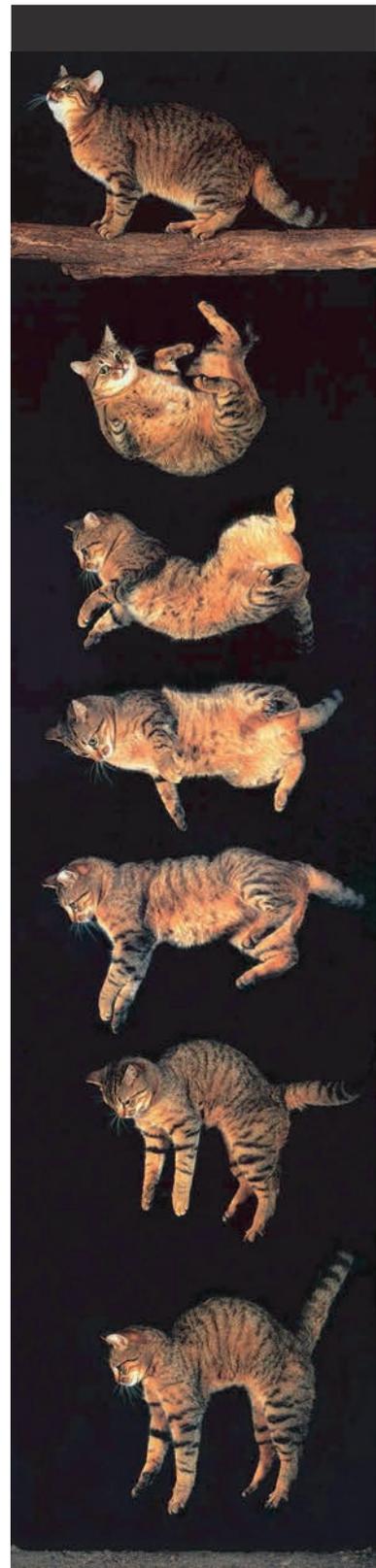


20. Se hace girar en círculo una pequeña pelota atada al extremo de una cuerda que pasa a través de un tubo, como se ilustra en la figura. Si se tira de la cuerda a través del tubo hacia abajo, la rapidez circular de la pelota se incrementa. (a) ¿Se debe a una torca ocasionada por la fuerza tirante? (b) Si la pelota está inicialmente girando en un círculo con radio de 0.30 m y una rapidez de 2.8 m/s, ¿cuál será su rapidez tangencial si se tira de la cuerda lo suficiente como para reducir el radio del círculo 0.15 m?

Respuesta: El cambio en la velocidad angular, o la aceleración angular, no es ocasionado por una torca debida a la fuerza al tirar y 5.6 m/s



Al parecer los gatos siempre caen sobre sus patas aun si se les voltea patas arriba y se les deja caer. Mientras el gato cae no hay torca externa y su centro de masa cae como una partícula. ¿Cómo pueden los gatos volverse por sí mismos mientras caen?



Bibliografía

- Alvarado, A. y Valdés, P. (2011). *Mecánica 2: Bachillerato universitario*. México: Once Ríos.
- Alvarado, A., Caro J. y Alvarado, R. (2006). *Mecánica 1: Bachillerato 2000*. México: Once Ríos.
- Alvarado, A., Caro J. y Alvarado, R. (2006). *Mecánica 2: Bachillerato 2000*. México: Once Ríos.
- Alvarado, A., Valdés, P. y Caro J. (2011). *Mecánica 1: Bachillerato universitario*. México: Once Ríos.
- Beer, F. y Johnston, E. (2002). *Mecánica vectorial para ingenieros: Estática*. México: McGraw Hill.
- Burbano, S., Burbano, E. y Gracia, C. (2006) *Física general. Tomo 1: Estática, cinemática, dinámica, gravedad, fluidos, termodinámica y ondas*. México: Alfaomega.
- Fitzgerald, R.W. (2010). *Mecánica de materiales*. México: Alfaomega.
- Gere, J. y Goodno, B. (2009). *Mecánica de materiales*. México: CENGAGE Learning.
- Hibbeler, R. (2011). *Mecánica de materiales*. México: Pearson.
- Ramos, H. y Estrella, P. (2009). *Física 2*. México: CENGAGE Learning.
- Resnick, R. y otros. (2002). *Física Vol. 1*. México: Continental.
- Salazar, J.E. (2007). *Resistencia de materiales: Básica para estudiantes de ingeniería*. Colombia: Universidad Nacional de Colombia sede Manizales.
- Serway y Beichner. (2001). *Física para ciencias e ingeniería Tomo 1*. México: McGraw Hill.
- Tipler, P. (1999). *Física para la ciencia y la tecnología*. Volumen 1. España: Editorial Reverté.
- Tippens, P. (1988). *Física: Conceptos y Aplicaciones*. México: McGraw Hill.
- Wilson, J. (1996). *Física*. México: Pearson.

ESTÁTICA Y ROTACIÓN DEL SÓLIDO
Bachillerato universitario

*Dr. José Alberto Alvarado Lemus, Dr. José de Jesús Caro Corrales,
Dr. José Bibiano Varela Nájera y Dr. Olivia Hernández Mondaca*

se terminó de imprimir en el mes de julio de 2012
en los talleres gráficos de ONCE RÍOS EDITORES, calle Río Usumacinta 821
Col. Industrial Bravo. Tel. 01(667)712-2950.
Culiacán, Sin.

Esta obra consta de 3 500 ejemplares.



Materiales didácticos

Plan 2009

para desarrollar competencias
alineados a los planes
y programas de estudio

Las competencias integran
el saber pensar, el saber decir,
el saber hacer y el querer hacer.

