1 unidad

Introducción a las funciones y sus gráficas

Propósito de unidad

Aplica los conocimientos básicos sobre funciones para representar situaciones de la vida diaria y de la ciencia, desarrollando su capacidad para construir e interpretar modelos matemáticos y para avanzar en la visualización de las representaciones funcionales.

Indicadores de desempeño

- Aplica la técnica de la discusión de curvas, para trazar la gráfica de ecuaciones sencillas.
- Evalúa funciones a partir de sus distintas representaciones.
- Distingue si una relación entre magnitudes es o no una función.
- Determina el dominio de funciones a partir de su representación algebraica.
- Determina el dominio y rango de funciones a partir de su gráfica
- Determina valores de funciones a partir de representaciones algebraicas, gráficas y tabulares.
- Cambia de una representación funcional a otra.
- Caracteriza la razón de cambio de funciones lineales, cuadráticas y exponenciales, y las aplica para determinar sus expresiones algebraicas a partir de una tabla de valores.
- Determina la expresión algebraica de una función lineal, a partir de una tabla de valores.
- Determina la expresión algebraica de una función cuadrática, a partir de una tabla de valores.
- Determina la expresión algebraica de una función exponencial, a partir de una tabla de valores.
- Utiliza las propiedades de los logaritmos para despejar variables que son exponentes.
- Utiliza la noción de razón de cambio para interpretar el comportamiento de variables a partir de una gráfica funcional.
- Realiza operaciones básicas con funciones.

Competencias disciplinares a evaluar

2. Formula y resuelve problemas matemáticos, aplicando diferentes enfoques.
4. Argumenta la solución obtenida de un problema, con métodos numéricos, gráficos, analíticos o variacionales, mediante el lenguaje verbal, matemático y el uso de las tecnologías de la información y la comunicación.
5. Analiza las relaciones entre dos o más variables de un proceso social o natural para determinar o estimar su comportamiento.
6. Cuantifica, representa y contrasta experimental o matemáticamente las magnitudes del espacio y las propiedades físicas de los objetos que lo rodean.
8. Interpreta tablas, gráficas, mapas, diagramas y textos con símbolos matemáticos y científicos.

Atributos de competencias genéricas a evaluar

5.3 Identifica las regularidades que subyacen a los procesos naturales y sociales, indagando además los estados de incertidumbre que generan dichos procesos.
5.6. Utiliza las tecnologías de la información y comunicación para procesar e interpretar información.
8.3. Asume una actitud constructiva al intervenir en equipos de trabajo, congruente con los conocimientos y habilidades que posee.

Actividad preliminar

¿Por qué es importante estudiar esta unidad?

En esta unidad, estudiarás el concepto de función. Una situación problemática que ilustra la importancia de estudiar esta unidad es la siguiente: En los noticieros aparecen a diario en el segmento clima, las temperaturas tanto en grados Fahrenheit como en grados Celsius (centígrados). Con esta información podría construirse la siguiente tabla:

Centigrados	−50	−40	−30	−20	−10	0	10	20	30	40
Fahrenheit	−58	−40	−22	−4	14	32	50	68	86	104

¿Qué relación existe entre los grados Fahrenheit y los Celsius?

En la primera unidad de este curso, recordarás y consolidarás tus conocimientos acerca de las funciones. Este conocimiento promoverá (entre otras) la competencia que tiene que ver con la interpretación de tablas y gráficas. En la situación descrita arriba, se ilustra la representación tabular de una función. En cursos anteriores ya has estudiado este tipo de representaciones. Reflexiona lo planteado a continuación y una vez estudiada la unidad, vuelve a revisarlo.

Actividad 1

- Aspecto a evaluar: subproducto
- Evidencia: Autoevaluación

Según la información de la tabla, estamos en presencia de una función que presenta un aumento aditivo constante en los valores de salida. Si calculamos las razones de cambio, obtenemos:

$$\frac{-40-(-58)}{-40-(-50)}=\frac{9}{5} \qquad \frac{-22-(-40)}{-30-(-40)}=\frac{9}{5} \qquad \frac{-4-(-22)}{-20-(-30)}=\frac{9}{5}$$

Si seguimos calculando más razones de cambio, obtenderemos siempre el mismo resultado. Por lo tanto, estamos en presencia de una función lineal, cuya ecuación es:

$$y=f(x)=mx+b.$$

En esta ecuación, m es el valor de la razón de cambio, es decir, $m=\frac{9}{5}$.

Asimismo, b representa el valor de la función cuando la variable independiente es cero, es decir, $b=32$.

Por lo tanto, la ecuación que relaciona a los grados Celsius y los Fahrenheit es:

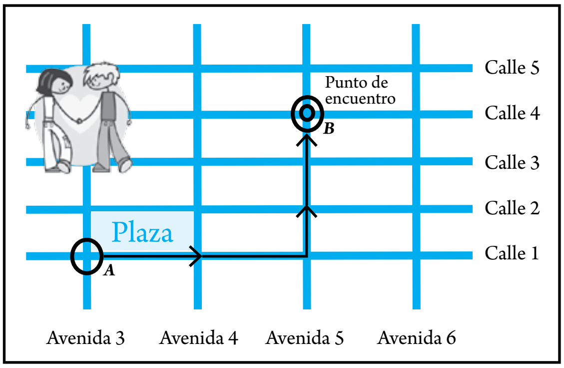
$$y=f(x)=\frac{9}{5}x+32.$$

Resuelve: utilizando esta fórmula, verifica que para $x=50$, el valor de y es 122.

1.1 Sistema de coordenadas rectangulares

Desde la escuela primaria estás familiarizado con los sistemas de coordenadas rectangulares; es muy probable que hayas usado este recurso para decirle a una persona que vaya de un punto a otro. Para tal fin, se suele decir a la persona que recorra cierta distancia en una dirección y luego otra distancia en otra dirección.

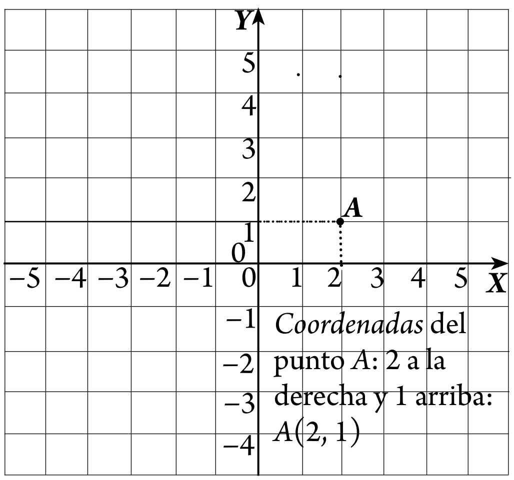
Por ejemplo, para dar orientaciones de manera que se pueda ir del punto *A* al punto *B* de la cuadrícula de la derecha, podría decirse: camina dos cuadras a la derecha y tres hacia arriba.



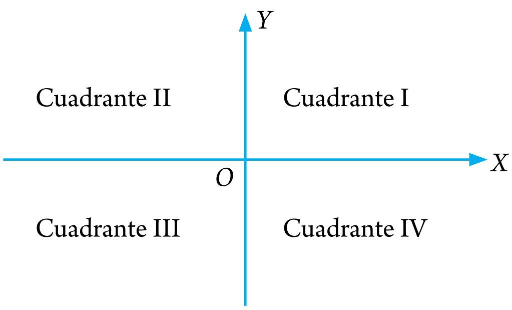
De esta manera, se está usando un sistema (para identificar el punto de encuentro), que es equivalente al sistema de coordenadas rectangulares. En este caso, el punto de encuentro tendría por coordenadas: dos cuadras a la derecha y tres cuadras hacia arriba.

Recuerda que, en matemáticas se emplean dos rectas perpendiculares numeradas para elaborar un método de localización de puntos. La recta horizontal se llama eje X o eje de las abscisas; la recta vertical se llama eje Y o eje de las ordenadas. El punto de intersección de las dos rectas se llama origen. Un par de números llamados coordenadas indican la ubicación de cada punto.

El punto A localizado en la figura de la derecha, está «2 unidades a la derecha» y «1 arriba» del origen. Se dice que A tiene coordenadas $(2, 1)$. El primer número es la coordenada x, y el segundo la coordenada y. En general un punto se representa con las coordenadas (x, y). Se empleará la notación $P(x, y)$ para representar al punto P con las coordenadas (x, y). La primera coordenada «x» también recibe el nombre de *abscisa* y la segunda coordenada «y» se denomina *ordenada*.



Tal como ha sido construido, el plano cartesiano se divide en cuatro cuadrantes numerados en sentido antihorario. Los signos de cada coordenada para cualquier punto dependerá del cuadrante en donde se encuentre.



	Signo	
Cuadrante	x (abscisa)	y (ordenada)
I	+	+
II	–	+
III	–	–
IV	+	–

- *Aspecto a evaluar:* Actividad de evaluación intermedia
- *Evidencia:* Reporte escrito de resolución de ejercicios y problemas
- *Competencia o atributo a evaluar:* 5.3, 6 y 8

1.1 EJERCICIOS

1. Representa en un sistema de coordenadas rectangulares los puntos cuyas coordenadas se dan a continuación:

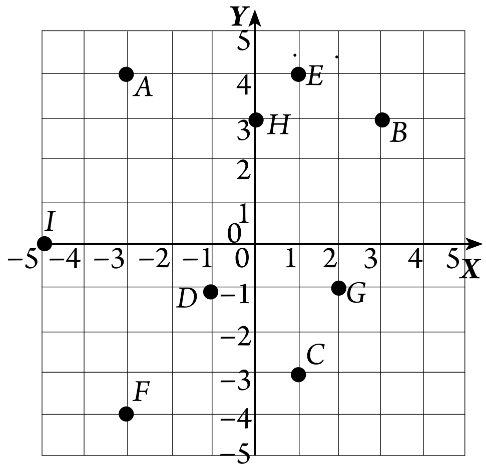
   $A\,(3, 5)$ $B\,(4, 3)$ $C\,(-3, 1)$ $D\,(-4, -4)$ $E\,(3, -2)$ $F\,(0, -3)$

   $G\,(-3, 6)$ $H\,(4, -3)$ $I\,(4, 0)$ $J\,(4, 0)$ $K\,(-4, -2)$ $L\,(3, -3)$

   $M\,(1/2, 4/3)$.

2. Los vértices A y C de un rectángulo $ABCD$ tienen por coordenadas $A\,(-2, 1)$ y $C\,(3, -2)$, si se conoce que sus lados son paralelos a los ejes coordenados: a) Represéntalo gráficamente; b) Determina las coordenadas de B y D; c) Calcula su área.
3. En un plano coordenado, traza las rectas que pasan por los puntos A y B si: a) $A\,(-5, 4)$ y $B\,(2, -3)$ b) $A\,(0, 0)$ y $B\,(2, -2)$ c) $A\,(0, 3)$ y B $(3, 0)$.
4. Representa gráficamente 5 puntos del conjunto de puntos que tienen por coordenadas $P(x, 3x + 2)$.
5. Determina las coordenadas de los puntos que se indican en el plano coordenado de la derecha.
6. Describe el conjunto de todos los puntos $P(x, y)$ de un plano que satisfaga la condición dada:

   a) $x = -2$ b) $y = 3$ c) $x \geq 0$
   d) $y < 0$ e) $x = 0$ f) $xy > 0$
   g) $xy = 0$ h) $y = -2$ i) $x = -3$



1.2 Graficación de ecuaciones sencillas

En la sección anterior localizaste puntos con coordenadas ya conocidas de antemano; en esta sección, recordarás cómo generar estos valores para trazar gráficas, a partir de una ecuación dada. Las gráficas se usan con frecuencia para ilustrar cambios en cantidades. Por ejemplo, una gráfica en un periódico puede mostrar la forma en que varía la temperatura durante un día; un ingeniero podría usar una gráfica para ilustrar el aumento de la resistencia de un cilindro de concreto en todo un mes.

Dos cantidades se relacionan a veces por medio de una ecuación o fórmula que contiene dos variables. Por las razones anteriores, la habilidad para trazar gráficas a partir de su fórmula o representación algebraica, es fundamental en matemáticas y es una de las principales capacidades que deberás desarrollar en este curso. Para tal fin, es muy útil el uso de herramientas tecnológicas. Sin embargo, previo al uso de éstas, debes ser capaz de hacer tales gráficas utilizando herramientas básicas como lápiz y papel, y calculadoras científicas no programables. La clave para empezar a graficar ecuaciones, es entender la relación entre soluciones de una ecuación con dos variables y los pares ordenados.

Soluciones de ecuaciones. Si una ecuación tiene dos variables, sus soluciones son pares ordenados de números. Una solución es un par ordenado con la propiedad de que al sustituir las variables por los números se produce una proposición verdadera.

Ejemplo

Determina si los pares ordenados $(-1, -5)$ y $(6, 8)$ son soluciones de la ecuación $y = 2x - 3$.

Solución

$(-1, -5) \rightarrow x = -1$
$y = -5$

y	$= 2x - 3$
-5	$2(-1) - 3$
-5	$-2 - 3$
-5	-5 cierto.

Sustituyendo -1 en vez de x y -5 en vez de y, obtenemos una proposición verdadera. Por lo tanto, $(-1, -5)$ es una solución de la ecuación dada.

$(6, 8) \rightarrow x = 6$
$y = 8$

y	$= 2x - 3$
8	$2(6) - 3$
8	$12 - 3$
8	9 Falso.

Sustituyendo 6 en vez de x y 8 en vez de y, obtenemos una proposición falsa. Por lo tanto, $(6, 8)$ no es una solución de la ecuación dada.

Actividad 2

- *Aspecto a evaluar:* Participación en clase
- *Evidencia:* Trabajo colaborativo
- *Competencia o atributo a evaluar:* 8.3

1. ***Intenta lo siguiente.*** Determina si los pares ordenados que se indican son soluciones de las ecuaciones correspondientes.

   a. $(1, 7), (2, 9); y = 2x + 5$ b. $(-1, 4), (0, 6); y = -2x + 5$ c. $(-2, 5), (3, 9); y = x^2$

2. Si el par ordenado $(2, a)$ es solución de $y^2 = 5x - 1$, determina el valor de a.

Gráfica de ecuaciones: técnica de tabulación

A través de este curso aprenderás varias técnicas de graficación. La primera (ya estudiada en otros años) consiste simplemente en determinar algunas soluciones de la ecuación y localizar en un plano coordenado los puntos correspondientes. Este proceso de graficación, lo denominaremos técnica de tabulación y lo ilustraremos con un ejemplo.

Ejemplo

Representa gráficamente la ecuación $y = 2x - 1$

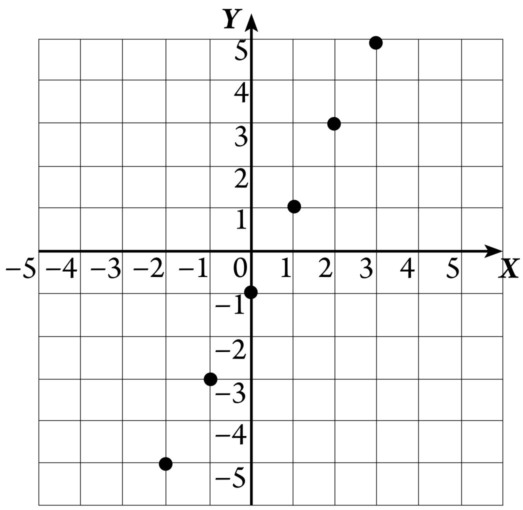
Solución

- Primero encontramos algunos pares ordenados que sean solución. Podemos escoger cualquier número para el que tenga sentido reemplazar x y después determinar y. Para ecuaciones sencillas conviene elegir valores de x alrededor del cero (positivos y negativos), como por ejemplo $-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$, y los presentamos en una tabla:

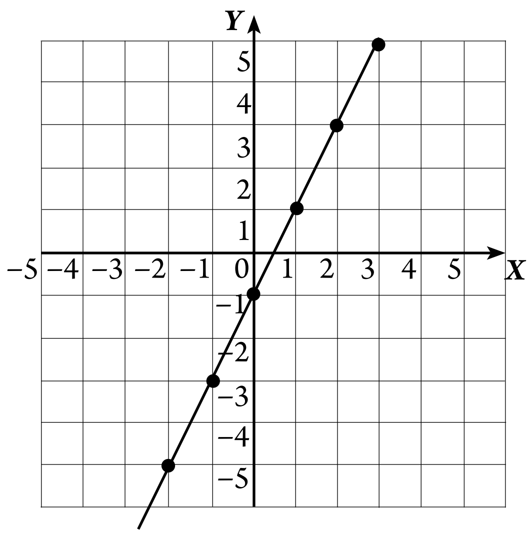
Sea $x = -3$. Entonces, $y = 2(-3) - 1 = -7$. Así $(-3, -7)$ es una solución.
Sea $x = -2$. Entonces, $y = 2(-2) - 1 = -5$. Así $(-2, -5)$ es una solución.
Sea $x = -1$. Entonces, $y = 2(-1) - 1 = -3$. Así $(-1, -3)$ es una solución.
Sea $x = 0$. Entonces, $y = 2(0) - 1 = -1$. Así $(0, -1)$ es una solución.
Sea $x = 1$. Entonces, $y = 2(1) - 1 = 1$. Así $(1, 1)$ es una solución.
Sea $x = 2$. Entonces, $y = 2(2) - 1 = 3$. Así $(2, 3)$ es una solución.
Sea $x = 3$. Entonces, $y = 2(3) - 1 = 5$. Así $(3, 5)$ es una solución.

x	y
-3	-7
-2	-5
-1	-3
0	-1
1	1
2	3
3	5

- A continuación localizamos los pares (x, y) en un plano coordenado



- Finalmente unimos los puntos representados, tratando de descifrar el patrón seguido por esos pocos puntos. En este ejemplo, los puntos parecen estar en una recta.



Resumen 1. Para graficar ecuaciones en un nivel inicial, aplicamos el siguiente procedimiento: Tabulamos algunas coordenas $P(x, y)$, las localizamos en un plano coordenado y trazamos la gráfica uniendo los puntos siguiendo un posible patrón delineado por dichos puntos.

En la siguiente actividad, podrás aplicar este procedimiento.

- *Aspecto a evaluar:* Participación en clase
- *Evidencia:* Trabajo colaborativo
- *Competencia o atributo a evaluar:* 8.3

Actividad 3

Utiliza cada una de las siguientes ecuaciones para construir una tabla de valores; en seguida, convierte esta tabla en un conjunto de pares ordenados (x, y), y finalmente, traza las gráficas correspondientes.

a) $y = 3x$ b) $y = 2x - 4$ c) $y = 1/x$ d) $y = 2x^2$ e) $y = 2$ f) $y = 0$

g) $y = x^2$ h) $y = x^3$ i) $y = \sqrt{x}$ j) , $y = \sqrt{(x-2)}$ k) $y = 2$^x,

l) , $y = \sqrt{(x+2)}$ m) $y = \sqrt{x} + 2$ n) $y = -3x + 1$ o) $y = (1/2)x + 2$

Gráfica de ecuaciones: discusión de curvas

Esta sección la iniciaremos con la siguiente actividad:

- *Aspecto a evaluar:* Participación en clase
- *Evidencia:* Trabajo colaborativo
- *Competencia o atributo a evaluar:* 8.3

Actividad 4

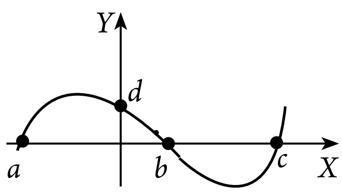
Intenta lo siguiente. Representa gráficamente cada una de las siguientes ecuaciones:

a. $y = 3 - x^2$ b. $x = y^2 - 5$ (Sugerencia: selecciona algunos valores de y.)

La graficación mediante la tabulación de algunos puntos, suele ser muy limitado, para ecuaciones con cierto grado de complejidad. Para avanzar en este sentido, resulta muy útil realizarle algunos análisis a la ecuación, los cuales nos facilitarán la búsqueda de patrones seguidos por la gráfica. Los procesos implicados se denomina discutir la ecuación. Dicho análisis, se explica a continuación:

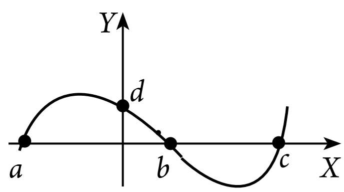
Interceptos

Interceptos con el eje X. Son los puntos de intersección de la gráfica con el eje X.



Cómo hallar:
Hacer $y = 0$ y despejar x. Aquí a, b y c son interceptos con el eje X.

Interceptos con el eje Y. Son los puntos de intersección de la gráfica con el eje Y.



Cómo hallar:
Hacer $x = 0$ y despejar y. Aquí d es un intercepto con el eje Y.

Ejemplo

Encuentra los interceptos con los ejes X y Y de la gráfica de $y = x^2 - 4$. Tabula algunos puntos adicionales y traza la gráfica.

Solución

1) Interceptos con el eje X:
Hacemos $y = 0$ y despejamos x:

$$y = x^2 - 4.$$
$$0 = x^2 - 4$$
$$x^2 = 4$$
$$x = \pm\sqrt{4} = \pm 2$$

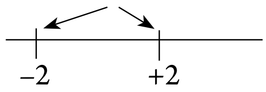
Así, las intersecciones con el eje X son $+2$ y -2. Los puntos en los que la gráfica cruza el eje X son $(2, 0)$ y $(-2, 0)$.

2) Interceptos con el eje Y:
Hacemos $x = 0 \rightarrow$ $y = x^2 - 4.$
$y = 0^2 - 4$
$y = -4$

Así, la intersección con el eje Y es -4 y el punto en el que la gráfica cruza el eje Y es $(0, -4)$.

3) Tabulamos algunos puntos adicionales, cercanos a los interceptos con x.

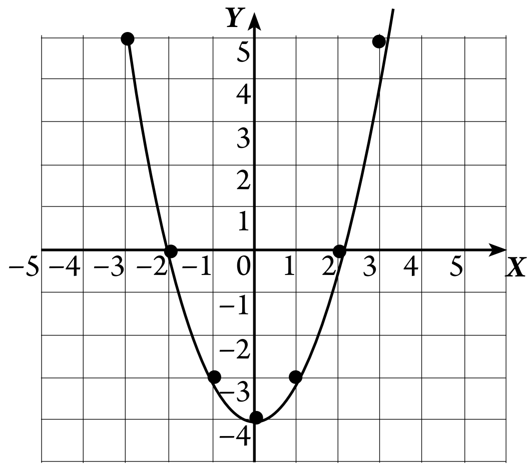
Interceptos con x.



Tabular puntos alrededor de -2 y $+2$.

x	y
−3	5
−2	0
−1	−3
0	−4
1	−3
2	0
3	5

4) Se traza la gráfica uniendo los puntos encontrados:



Resumen 2. Para graficar ecuaciones en un segundo nivel, aplicamos el siguiente procedimiento:

1. *Interceptos*. Determinamos las intersecciones con los ejes coordenados.
2. *Tabulación y gráfica*. Tabular algunos puntos. Se recomienda elegir valores de x, alrededor de los inteceptos.
3. Trazar la gráfica.

- *Aspecto a evaluar:* Participación en clase
- *Evidencia:* Trabajo colaborativo
- *Competencia o atributo a evaluar:* 8.3

Actividad 5

1) Encuentra los interceptos con los ejes X y Y de la gráfica $y = 2x - 1$, trazada en la página 15.

2) Aplicando lo estudiado hasta este momento acerca de graficación, grafica las siguientes ecuaciones: a. $x^2 + y^2 = 9$. b. $x^2 - y^2 = 9$. c. $x = y^2 - 5$

Simetría respecto a un eje

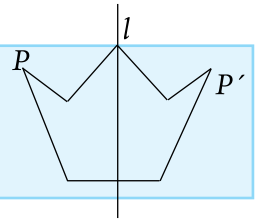
Las figuras que se muestran son ejemplos de simetría axial.

La idea se puede describir de la siguiente manera: en cada figura es posible trazar una recta de tal manera que si se dobla a lo largo de ella, la gráfica que se encuentra en la mitad izquierda del plano coincide con la de la mitad derecha.

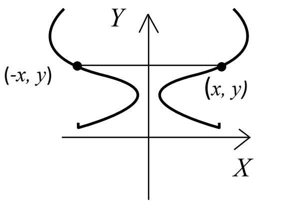
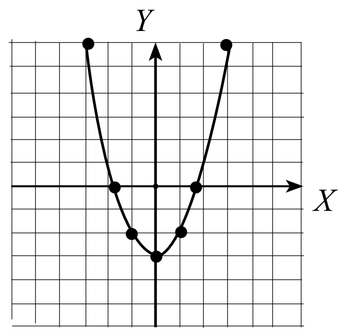
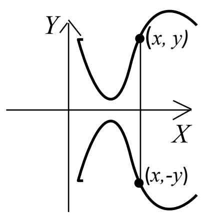
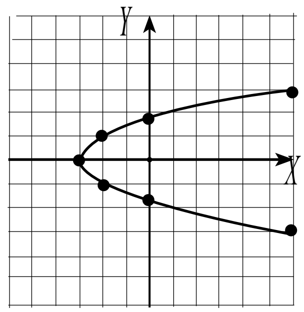
Se dice que las formas tienen simetría reflexiva y que la recta sobre la que se hace el doblado es el eje de simetría.

Estas ideas se ilustran en el siguiente dibujo y definición:

Definición. Una figura tiene simetría reflexiva si hay una recta l tal que para todo punto P de la figura existe un punto P' en la figura que es la imagen de reflexión sobre l.



En lenguaje matemático, esta idea se describe de la siguiente manera:

Definición	Interpretación gráfica	Prueba de simetría	Ejemplo
Una gráfica es simétrica con respecto al eje Y, si para cada punto (x, y) de la gráfica existe el punto $(-x, y)$	 Para cada punto (x, y) de la gráfica existe el punto $(-x, y)$	(1) La sustitución de $-x$ por x lleva a la misma ecuación. Ejemplo: Sea $y = x^2 - 3$; si cambiamos x por $-x$: $y = (-x)^2 - 3$ $y = x^2 - 3$ (Hay simetría con Y)	
Una gráfica es simétrica con respecto al eje Y, si para cada punto (x, y) de la gráfica existe el punto $(x, -y)$	 Para cada punto (x, y) de la gráfica existe el punto $(x, -y)$	(2) La sustitución de $-y$ por y lleva a la misma ecuación. Ejemplo: Sea $x = y^2 - 3$; si cambiamos y por $-y$: $x = (-y)^2 - 3$ $x = y^2 - 3$ (Hay simetría con X)	

Ejemplo

Determinar si $y = x^2 + 1$ es simétrica con respecto a los ejes coordenados.

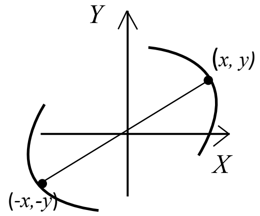
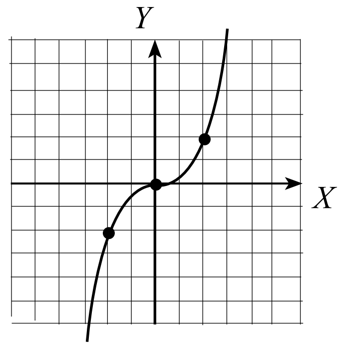
Solución

Para ver si la relación es simétrica con respecto al eje Y, sustituimos x por $-x$ para obtener $y = (-x)^2 + 1$. Esto es equivalente a $y = x^2 + 1$. Por lo tanto, la gráfica es simétrica con respecto al eje Y.

Para ver si la relación es simétrica con respecto al eje X, sustituimos y por $-y$ para obtener $-y = x^2 + 1$, o $y = -x^2 - 1$. Esto no es equivalente a $y = x^2 + 1$. Por lo tanto, la gráfica no es simétrica con respecto al eje X.

Simetría respecto a origen

En la siguiente tabla, se caracteriza la simetría con respecto al origen.

Definición	Interpretación gráfica	Prueba de simetría	Ejemplo
Una gráfica es simétrica con respecto al origen, si para cada punto (x, y) de la gráfica, existe el punto $(-x, -y)$.	 Para cada punto (x, y) de la gráfica, existe el punto $(-x, -y)$	(3) La sustitución simultánea de $-x$ por x y de $-y$ por y lleva a la misma ecuación. Ejemplo: Sea $4y = x^3$; si cambiamos simultáneamente y por $-y$, y x por $-x$: $4(-y)= (-x)^3$ $-4y = -x^3$ $4y = x^3$. (Hay simetría)	

¿De qué manera nos ayuda el análisis de las simetrías? Si la gráfica es simétrica con respecto a un eje, es suficiente determinar la gráfica en la mitad del plano de coordenadas, puesto que podemos trazar el resto de la gráfica al tomar una imagen espejo o reflexión, por el eje apropiado. Asimismo, los resultados acerca de las simetrías, nos pueden servir como revisión de la gráfica trazada.

Resumen 3. Para graficar ecuaciones en un tercer nivel, aplicamos el siguiente procedimiento:
1. *Interceptos*. Determinamos las intersecciones con los ejes coordenados.
2. *Tabulación y gráfica*. Localizar primero los Interceptos. Tabular algunos puntos. Se recomienda elegir valores de x, alrededor de las intersecciones con x. Trazar la gráfica.
3. *Simetrías*. Revisamos si la gráfica que trazamos cumple con el análisis de simetrías.

Esto es lo que harás en la siguiente actividad.

Actividad 6

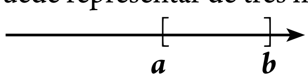
a) En la actividad 5 se te pidió graficar las ecuaciones: $x^2+y^2 = 9$; $x^2-y^2 = 9$; $x = y^2 - 5$. Analiza las simetrías de cada ecuación y comprueba que tus gráficas cumplen con los resultados de dicho análisis.

b) Traza la gráfica de $y = x^2 + 8$.

Notación de intervalos

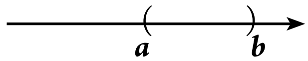
Antes de continuar con nuestro estudio, recordaremos algunos aspectos básicos de los intervalos.
Si tenemos los números reales a y b donde $a < b$, se pueden presentar las siguientes notaciones y terminología de intervalos:

1. El conjunto de los números reales mayores o iguales que a y menores o iguales que b.
   Esta declaración se puede representar de tres maneras diferentes:

   $\boldsymbol{a \leq x \leq b}$  $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$

2. El conjunto de los números reales mayores que a y menores que b.
Esta declaración se puede representar de tres maneras diferentes:

$a < x < b$



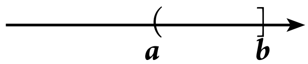
(a, b)

ATENCIÓN. Este símbolo (a, b) aparece exactamente igual que la notación para las coordenadas (a, b), pero no tienen nada que ver. Tendrán ustedes que averiguar, en cada caso, el sentido en el que se usa el símbolo. Por el contexto será usualmente muy fácil.

---

3. El conjunto de los números reales mayores que a y menores o iguales que b.
Esta declaración se puede representar de tres maneras diferentes:

$a < x \leq b$

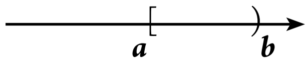


$(a, b]$

---

4. El conjunto de los números reales mayores o iguales que a y menores que b.
Esta declaración se puede representar de tres maneras diferentes:

$a \leq x < b$

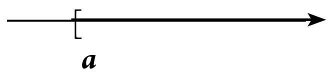


$[a, b)$

---

5. El conjunto de los números reales mayores o iguales que a.
Esta declaración se puede representar de tres maneras diferentes:

$x \geq a$

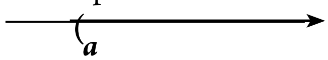


$[a, +\infty)$

---

6. El conjunto de los números reales mayores que a.
Esta declaración se puede representar de tres maneras diferentes:

$x > a$

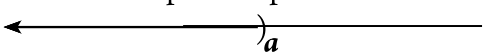


$(a, +\infty)$

---

7. El conjunto de los números reales menores que a.
Esta declaración se puede representar de tres maneras diferentes:

$x < a$

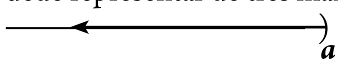


$(-\infty, a)$

---

8. El conjunto de los números reales menores o iguales que a.
Esta declaración se puede representar de tres maneras diferentes:

$x \leq a$



$(-\infty, a]$

Debes tener presente que el signo infinito ∞ no representa ningún número, es simplemente un convenio que se usa en situaciones parecidas a éstas.

Extensión de la curva en x

El paso inicial del método de tabulación aplicado a ecuaciones sencillas, consiste en elegir algunos valores de x, de preferencia aquellos ubicados en la cercanía del 0 a su izquierda y derecha. Sin embargo, para ciertas ecuaciones hay restricciones al momento de elegir tales números. En esta idea entendemos por *extensión de la curva* en x (o simplemente extensión de x), como el conjunto de todos los números reales que, sí, puede tomar x, para que y sea un número real.

Desde el punto de vista matemático, hay dos razones principales por las que la extensión de la curva en x está restringida:

- No existe la raíz cuadrada de un número negativo, ya que el resultado no es un número real.
- No se puede dividir por 0.

¿En qué tipo de ecuaciones podrían aparecer estos problemas? Esto aparecerá en ecuaciones con raíz cuadrada y en ecuaciones racionales

Caso 1. Ecuaciones con raíz cuadrada (una vez despejada la y)

Las raíces cuadradas de números negativos pueden ocurrir siempre que la ecuación tenga una x bajo un radical con una raíz par. A continuación revisaremos las raíces cuadradas.

Ecuación	Observaciones
$y = \sqrt{x}$	Si $x < 0$, estaríamos tomando la raíz cuadrada de un número negativo, por lo que la extensión de x es toda $x \geq 0$.

Cuando lo consideres necesario, puedes aplicar el siguiente procedimiento:

Para encontrar restricciones en funciones raíz cuadrada, el paso básico consiste en establecer la cantidad bajo el radical como mayor o igual a 0, y resolver la desigualdad resultante.

Ejemplo

Determina la extensión de x, si $y = \pm\sqrt{x-4}$

Solución

Puesto que la cantidad radicando debe ser positiva o cero, planteamos la desigualdad: $x - 4 \geq 0$

Resolviendo esta desigualdad por despeje: $x - 4 \geq 0$

$$x \geq 4$$

Por lo tanto, la extensión de la curva en x es toda $x \geq 4$; o bien: $[4, +\infty)$.
Esto significa, que al momento de tabular algunos valores para x, podrían ser: 4, 5, 6, 7 etc. Aplicarás esto, en la siguinete actividad.

Actividad 7

- *Aspecto a evaluar:* Participación en clase
- *Evidencia:* Trabajo colaborativo
- *Competencia o atributo a evaluar:* 8.3

a) Traza la gráfica de $y = \pm\sqrt{x-4}$. Considera que la extensión de x es: $[4, +\infty)$ y completa el análisis para tu trazo.

b) Traza la gráfica de $y = \pm\sqrt{x+9}$. Aspecto clave aquí, es que determines la extensión de x.

Ejemplo

Determina la extensión de la curva en x: $y^2 - x^2 + 4 = 0$

Solución

Primero despejamos a y: $y^2 - x^2 + 4 = 0$

$$y^2 = x^2 - 4 = 0$$

$$y = \pm\sqrt{x^2 - 4}$$

Aparece una ecuación con radicales. Planteamos la desigualdad: $x^2 - 4 > 0$. Nota: El signo igual se toma en cuenta al momento de escribir los intervalos.

Resolveremos esta desigualdad utilizando *intervalos de prueba*; esta técnica se apoya en los valores de x, que hacen al radicando 0. Estos valores se denominan *valores críticos*. El procedimiento se ilustra a continuación:

Primer paso. Factorizando $x^2 - 4 > 0$

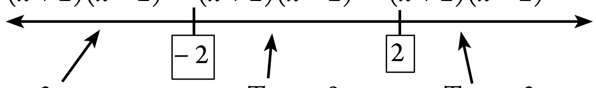
$(x + 2)(x - 2) > 0$

Segundo paso. Determinación de *valores críticos*

¿Qué valores de x convierten a $(x + 2)(x - 2)$ en 0?
Si x es -2, el factor $(x + 2)$ es 0; $\rightarrow (-2 + 2)(-2 -2) \rightarrow (0)(-4) = 0$.
Entonces $x = -2$ es un valor crítico.
Si x es 2, el factor $(x - 2)$ es 0; entonces $x = 2$ es otro valor crítico.

Tercer paso. Colocar los valores críticos en una recta numérica, toma un valor de prueba en cada intervalo y verifica los signos de cada factor y de cada producto:

$(x + 2)(x - 2)$ $(x + 2)(x - 2)$ $(x + 2)(x - 2)$



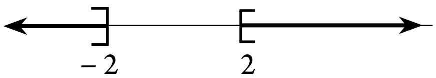
Tomar – 3
$(-3 + 2)(-3 - 2)$
$(-1)(-5)$
$(-)(-) = +$
Aquí $(x + 2)(x - 2)$ es mayor que 0

Tomar 0
$(0 + 2)(0 - 2)$
$(2)(-2)$
$(+)(-) = -$
Aquí $(x + 2)(x - 2)$ es menor que 0

Tomar 3
$(3 + 2)(3 - 2)$
$(5)(1)$
$(+)(+) = +$
Aquí $(x + 2)(x - 2)$ es mayor que 0

Cuarto paso. *Escribir la extensión de x: La extensión de x queda restringido a los intervalos*:

$(-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$



- *Aspecto a evaluar:* Participación en clase
- *Evidencia:* Trabajo colaborativo
- *Competencia o atributo a evaluar:* 8.3

Actividad 8

a. Traza la gráfica de $y^2 - x^2 + 4 = 0$. Considera que la extensión de x es : $(-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$, y aplica todo lo que has estudiado hasta este apartado.
b. Traza la gráfica de $2x^2 + y^2 = 9$. Aplica todo lo que has estudiado hasta este apartado.
c. Traza la gráfica de $2x^2 - y^2 = 9$. Aplica todo lo que has estudiado hasta este apartado.

Resumen 4. Para graficar ecuaciones en un cuarto nivel (ecuaciones con raíz cuadrada), aplicamos el siguiente procedimiento:

1. *Interceptos*. Determinamos las intersecciones con los ejes coordenados.
2. *Extensión de la curva en x*. Determinamos la extensión de la curva en x, como se indica:
   -Si la ecuación (con y despejada), presenta raíz cuadrada con x en el radicando, deben excluirse de la extensión los números que convierten al radicando en un número negativo.
3. *Tabulación y gráfica*. Localizar primero los Interceptos. Tabulamos algunos puntos. Se recomienda elegir valores de x, alrededor de las intersecciones con x. Trazar la gráfica.
4. *Simetrías*. Realizamos un análisis de simetrías y revisamos si la gráfica que trazamos cumple con dicho análisis.

Actividad 9

1. Revisa si tus respuestas de la actividad anterior, cumplen con este plan de análisis y haz los ajustes pertinentes.

Caso 2. Ecuaciones racionales (una vez despejada la y)

La división por 0 podría ocurrir cuando la ecuación escrita con y despejada, tenga a x en el denominador. Estudia los siguientes ejemplos:

Ecuación	Observaciones
$y = \frac{1}{x}$	Si $x = 0$, estaríamos dividiendo por 0, entonces la extensión de x es toda $x \neq 0$.
$y = \frac{1}{x-5}$	Si $x = 5$, estaríamos dividiendo por 0, entonces la extensión de x es toda $x \neq 5$.
$y = \frac{x+2}{x^2-4}$	Si $x = 2$, y $x = -2$, estaríamos dividiendo por 0, entonces la extensión de x es toda $x \neq 2$, $x \neq -2$

Cuando lo consideres necesario, puedes aplicar el siguiente procedimiento:

Primero. Iguala el denominador con 0.

Segundo. Resuelve la ecuación resultante.

Ejemplo

Si $y = \frac{x+6}{x^2-9}$ encuentra la extensión de x:

Solución

$x^2 - 9 = 0$

$x^2 = 9$

$x = \pm\sqrt{9} = \pm 3$

La extensión de x es toda $x \neq 3$, $x \neq -3$

- *Aspecto a evaluar:* Participación en clase
- *Evidencia:* Trabajo colaborativo
- *Competencia o atributo a evaluar:* 8.3

Actividad 10

a. Si $y = \frac{x}{x^2 + 2x - 3}$, ¿cuál es la extensión de x?

b. Si $y = 3x + 9$, ¿cuál es la extensión de x?

c. Si $y = \frac{x-3}{3} - \frac{1}{3x}$, ¿cuál es la extensión de x?

Asíntotas

Antes de formalizar el concepto de asíntota, realiza la siguiente actividad

- Aspecto a evaluar: *Participación en clase*
- Evidencia: *Trabajo colaborativo*
- Competencia o atributo a evaluar: 8.3

Actividad 11

a. Traza la gráfica de la ecuación: $y = \frac{3}{x-1}$

Al realizar la actividad previa, es probable que hayas concluido que para graficar ecuaciones racionales, resulta insuficiente lo estudiado hasta ahora. El concepto que nos hace falta es el de asíntota. Exploraremos el concepto de asíntota utilizando la ecuación de la actividad previa.

Ejemplo

Traza la gráfica de la ecuación: $y = \dfrac{3}{x-1}$

Solución

1. **Interceptos**. Determinamos las intersecciones con los ejes coordenados.

Interceptos con el eje X:

Hacemos $y = 0$ y despejamos $x \rightarrow \; y = \dfrac{3}{x-1}$

$$0 = \frac{3}{x-1}$$

$$0\,(x-1) = 3$$

$0 = 3$ Este resultado falso, se debe interpretar como que no hay intersección con X.

Interceptos con el eje Y:

Hacemos $x = 0 \rightarrow \; y = \dfrac{3}{x-1}$

$$y = \frac{3}{0-1}$$

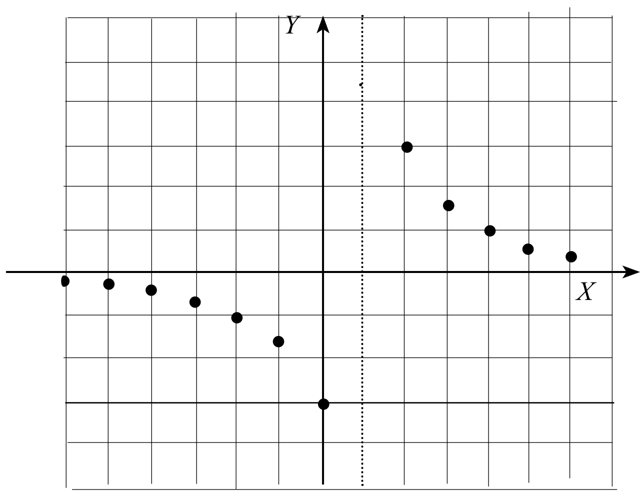
$y = \dfrac{3}{-1} = -3$ Por lo tanto, la gráfica cruza al eje Y en la coordenada -3. El punto de intersección es: $(0, -3)$.

2. **Extensión de x**. Determinamos la extensión de x, como se indica:

Puesto que la expresión (con y despejada), presenta a la x en un denominador, debemos excluir de la extensión a todo número que convierta a aquel, en 0. Si $x = 1$, estaríamos dividiendo por 0, entonces la extensión de x es toda $x \neq 1$.

3. **Tabulación**. Tabulamos algunas coordenadas $P(x, y)$, las localizamos en plano coordenado y trazamos la gráfica. Puesto que estamos explorando un concepto, observa que en este caso, hubo necesidad de más puntos de los habituales.

x	$3/(x-1)$	y
-6	$3/(-6-1) = 3/-7$	-0.4
-5	$3/(-5-1) = 3/-6$	-0.5
-4	$3/(-4-1) = 3/-5$	-0.6
-3	$3/(-3-1) = 3/-4$	-0.8
-2	$3/(-2-1) = 3/-3$	-1
-1	$3/(-1-1) = 3/-2$	-1.5
0	$3/(0-1) = 3/-1$	-3
1	$3/(1-1) = 3/0$	No
2	$3/(2-1) = 3/1$	3
3	$3/(3-1) = 3/2$	1.5
4	$3/(4-1) = 3/3$	1
5	$3/(5-1) = 3/4$	0.8
6	$3/(6-1) = 3/5$	0.6

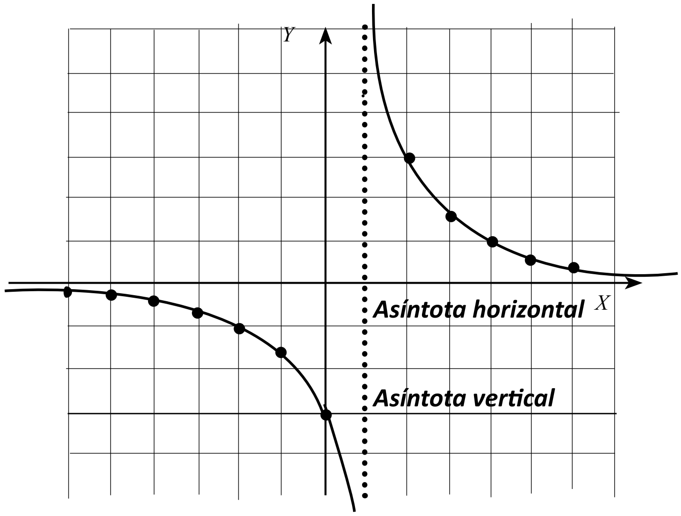


¿Cómo unir estos puntos? Puedes observar dos cosas:

1. La curva, presenta dos ramas que parecen estar separadas; cada rama, parece acercarse más y más tanto al eje X negativo, como al eje X positivo; es decir, conforme x aumenta su valor absoluto, la y disminuye cada vez más. Asigna valores a x cada vez más grandes y calcula los valores de y. Comprueba ésto con $x = 10, 15, 20, -10, -15, -20$..
2. No existe ningún punto para $x = 1$.

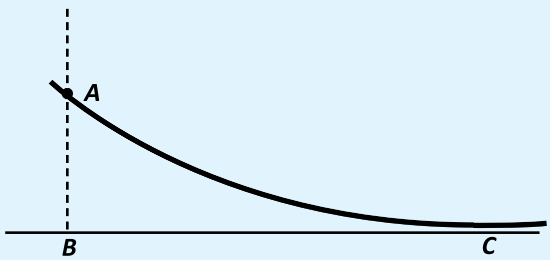
Vamos a revisar qué sucede con valores de x cercanos a 1.

x	$y = 3/(x-1)$
0.5	–6
0.9	–30
0.99	–300
0.9999	–30000
1.5	6
1.01	300
1.0001	30000
1.00001	300000



Hemos trazado la curva, asumiendo la presencia de dos rectas denominadas asíntotas, una vertical y la otra horizontal. Ésta última, la hemos inferido del comportamiento gráfico. A continuación, se formaliza de manera intuitiva este concepto.

Asíntotas. Si la distancia a una recta desde un punto móvil de una curva tiende a cero, cuando dicho punto se mueve en determinada dirección, se dice que la recta es asíntota de la curva. En la figura, la distancia AB del punto A a la recta BC tiende a cero, a medida que A se mueve en la dirección BC. La recta BC es asíntota de la curva.



Resuelve: Para que este ejemplo quede completo, haz un análisis de simetrías y revisa si la gráfica que trazamos cumple con dicho análisis.

Determinación de asíntotas

Las asíntotas verticales estarán ubicadas en aquellos valores de x, que conviertan al denominador de la ecuación (con y despejada) en 0. Es decir, en aquellos valores del denominador que restrinjan la extensión de x, habrá asíntotas verticales.

Las asíntotas horizontales estarán ubicadas en aquellos valores de y, que conviertan al denominador de la ecuación (con x despejada) en 0.

Resumen 5. Para graficar ecuaciones en un quinto nivel (ecuaciones racionales), aplicamos el siguiente procedimiento:

1. *Interceptos*. Determinamos las intersecciones con los ejes coordenados.
2. *Extensión de la curva en x*. Determinamos la extensión de x.
3. *Asíntotas*. Determinamos la posición de asíntotas horizontales y verticales.
4. *Tabulación y gráfica*. Localizar primero Interceptos y asíntotas. Tabulamos algunos puntos. Se recomienda elegir valores de x, alrededor de las asíntotas verticales.
5. *Simetrías*. Realizamos un análisis de simetrías y revisamos si la gráfica que trazamos cumple con dicho análisis.

A continuación resolveremos un ejemplo integrador. Lo planteado a continuación, ilustra el procedimiento completo para trazar la gráfica de ecuaciones en general, a través de las técnicas aquí discutidas.

Ejemplo

Aplicando las ideas y la metodología anterior de análisis y ***discusión de curvas***, discutir y gráficar la ecuación $x^2y - x^2 - y = 0$.

Solución

1. **Interceptos**. Determinamos las intersecciones con los ejes coordenados.

   Interceptos con el eje X:

   Hacemos $y = 0$ y despejamos $x \rightarrow x^2(0) - x^2 - 0 = 0.$

   $$0 - x^2 - 0 = 0.$$
   $$x^2 = 0. \rightarrow x = \pm\sqrt{0} = 0$$

   Por lo tanto, la gráfica cruza al eje X en la coordenada 0. El intercepto es: $(0, 0)$.

   Interceptos con el eje Y:

   Hacemos $x = 0$ y despejamos $y \rightarrow (0)y - (0)^2 - y = 0.$

   $$0 - 0 - y = 0.$$
   $$-y = 0. \rightarrow -y = 0$$

   Por lo tanto, la gráfica cruza al eje Y en la coordenada 0. El intercepto es: $(0, 0)$

2. **Extensión de *x***. Tener en cuenta que este análisis se hace en la ecuación que presenta a y despejada. Así que, en este ejemplo debemos despejar a y.

   $$x^2y - x^2 - y = 0.$$
   $$x^2y - y = x^2.$$
   $$y\,(x^2 - 1) = x^2.$$
   $$y = \frac{x^2}{x^2 - 1}$$

   Puesto que la expresión (con y despejada), presenta a la x en un denominador, debemos excluir de la extensión a todo número que convierta a aquel en 0. Si $x = \pm 1$, estaríamos dividiendo por 0, entonces la extensión de x es toda $x \neq 1$, $x \neq -1$.

3. **Asíntotas.**

   a) Verticales. Habrá asíntotas verticales cuando aparezca la x en un denominador y existan valores de x que conviertan a dicho denominador en 0. Por tanto, hay asíntotas verticales en $x = 1$ y $x = -1$.

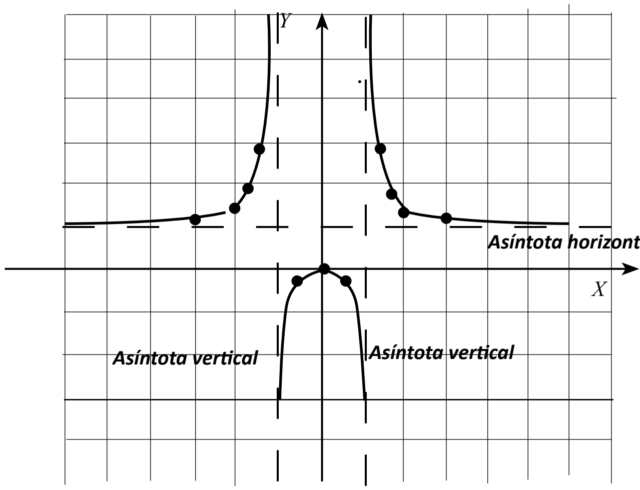
   b) Horizontales. Habrá asíntotas horizontales cuando aparezca la y en un denominador y existan valores de y que conviertan a dicho denominador en 0. Así que, el primer paso será despejar a x de la ecuación dada, $x^2y - x^2 - y = 0$, y a continuación observamos al denominador.

$$x^2y - x^2 - y = 0.$$
$$x^2y - x^2 = y.$$
$$x^2(y-1) = y.$$
$$x^2 = \frac{y}{y-1}$$
$$x = \pm\sqrt{\frac{y}{y-1}}$$

Observamos que sí $y = 1$, estaríamos dividiendo por 0, entonces $y \neq 1$. Por tanto, hay una asíntota horizontal en $y = 1$.

4. **Tabulación y gráfica**. Localizar primero Interceptos con los ejes y asíntotas. Se recomienda elegir valores de x, alrededor de las asíntotas verticales.

x	x
-3	1.1
-2	1.3
-1	No definido
-1.5	1.8
-1.25	2.8
-0.5	-0.3
0	0 (intercepto)
0.5	-0.3
1.5	1.8
1.25	2.8
2	1.3
3	1.1



5. **Simetrías.** Haz un análisis de simetrías y revisa si la gráfica que trazamos cumple con dicho análisis.

- *Aspecto a evaluar:* Actividad de evaluación intermedia
- *Evidencia:* Reporte escrito de resolución de ejercicios y problemas
- *Competencia o atributo a evaluar:* 5.3, 6 y 8

1.2 EJERCICIOS

1. En este apartado has estudiado distintas técnicas de graficación, utiliza las que consideres necesarias para trazar las gráficas de cada una de las siguientes ecuaciones:

a) $2x - 3y + 5 = 0$
b) $x^2 + 6y - 3 = 0$
c) $x^2 + y^2 - 100 = 0$
d) $4x^2 + 9y^2 - 36 = 0$
e) $xy - 2y - 3 = 0$
f) $2xy + x + 2y = 0$
g) $y^2 - 5x - 2 = 0$
h) $x^2 + 8y - 8x - 24 = 0$
i) $4x^2 - y^2 - 4 = 0$
j) $xy - x + 2y - 10 = 0$
k) $y = 3$
l) $x = -3$

Graficación de ecuaciones con ayuda de tecnología

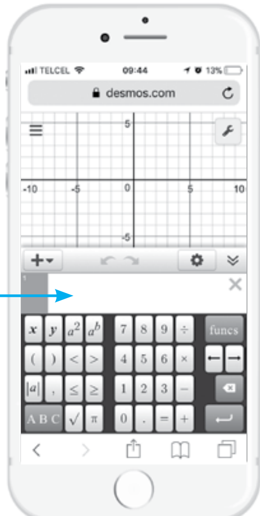
- Aspecto a evaluar: *Actividad de evaluación intermedia*
- Evidencia: *Reporte escrito de exploración con tecnología*
- Competencia o atributo a evaluar: 5.6

desmos

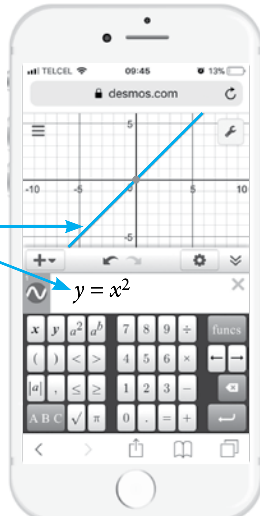
En tu curso anterior de matemáticas III, tuviste la oportunidad de conocer y aplicar el software denominado Geogebra. Este software también resulta de mucha ayuda para el trazado de gráficas, tal y como lo utilizaste en aquel curso, al graficar las funciones trigonométricas. Sin embargo, existe otro software libre denominado Desmos, que recomendamos utilices en el trabajo de graficación. Para ello, haz lo siguiente:

1. Teclea en Google, la palabra desmos, o bien Introduce directamente la dirección:
   https://www.desmos.com/calculator.
   Aparecerá de inmediato una pantalla como la que se muestra:

Introduce aquí la ecuación



Observa como al escribir la ecuación aparece la gráfica



2. Utiliza el software para trazar la ***gráfica de algunas de las ecuaciones vistas ahora***. Compara estas gráficas con las que ya habías obtenido. Si hubo diferencias, reflexiona sobre posibles errores u omisiones.
3. En el ejercicio 1.2 trazaste las gráficas de varias ecuaciones. Ahora utiliza el Desmos para que grafiques estas mismas ecuaciones. Compara estas graficas con las que ya habias obtenido, si hubo diferencias, reflexiona sobre posibles errores u omiciones.
4. Utiliza Desmos para trazar la gráfica de:
   a. $x^3 + xy^2 - y^2 = 0$ b. $2x^2 + 5y^2 - 4x + 32 = 0$ c. $x^2 + y^2 - 6x - 4y + 9 = 0$
5. Utiliza Desmos para trazar la gráfica de:
   a. $x = 2$ b. $y = 2$ c. $x = -3$
   d. $y = -3$ e. $y + 5 = 0$
6. La ecuación $x = 2$, es equivalente a $x = 2 + 0y$. Haz una tabla de valores, traza su gráfica y compárala con la obtenida con el software. Debes convencerte que la gráfica es una recta vertical.
7. La ecuación $y = 2$, es equivalente a $y = 2 + 0x$. Haz una tabla de valores, traza su gráfica y compárala con la obtenida con el software. Debes convencerte que la gráfica es una recta horizontal.

1.3 El concepto de función

La siguiente actividad permitirá contextualizar el significado de este concepto.

- Aspecto a evaluar: *Participación en clase*
- Evidencia: *Trabajo colaborativo*
- Competencia o atributo a evaluar: 8.3

Actividad 12

En cierto trayecto de varios kilómetros, un avión vuela a una velocidad uniforme de 900 km/h. Esta información se debe interpretar en el sentido de que en un determinado tiempo el avión recorre el mismo número de kilómetros. Entonces:

El avión recorre: 900 km en una hora

1800 km en dos horas

Contesta las siguientes preguntas:

Escribe aquí tus respuestas

¿Cuántos km recorrería el avión en tres horas?

¿Cuántos km recorrería el avión en cuatro horas?

¿Cuántos km recorrería el avión en cinco horas?

¿Cuántos km recorrería el avión en seis horas?

¿Cuántos km recorrería el avión en 15 minutos?

Tus respuestas deben permitirte entender la siguiente conclusión:

Hay una relación entre el tiempo transcurrido y la distancia recorrida, de tal manera que entre más tiempo pasa, más kilómetros recorre el avión; así pues, el número de km recorridos está determinado por la cantidad de tiempo transcurrido.

Esta relación no es más que una ¡FUNCIÓN! Una función es una relación, no un número.

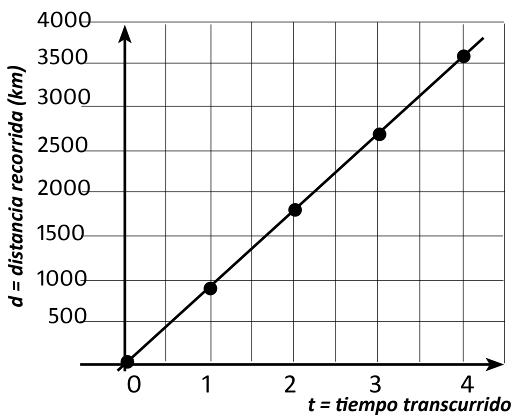
Pongamos algunos de tus resultados en una tabla:

t (tiempo transcurrido en horas)	1	2	3	4	5
d (distancia recorrida en km)	900	1800	2700	3600	4500

Estos mismos resultados pueden presentarse como un conjunto de pares ordenados:

{(1, 900), (2, 1800), (3, 2700), (4, 3600), (5, 4500)}

O bien a través de la gráfica mostrada a la derecha.



Sobre las base de esta gráfica se podrían hacer observaciones como las siguientes: Primero, el punto (0,0) está sobre la gráfica, es decir no se ha recorrido ninguna distancia en un tiempo 0. Segundo, ningún punto está trazado para valores negativos de x; en el contexto del avión, no tiene sentido hablar de distancias negativas ni de tiempos negativos, pero sí se ha considerado que existen valores decimales tanto para d como para t. Tercero, para cada tiempo transcurrido de 1 hora, la distancia total recorrida se incrementa por una cantidad constante, que es 900.

Ahora expresemos esto en una fórmula; para ello debes contestar la siguiente pregunta:

¿Cuántos km recorrería el avión en ***t*** horas? → $\boxed{}$

Tu respuesta debe ser parecida a lo siguiente: *distancia recorrida* $d = 900 \times$ tiempo t

Y la fórmula buscada es: $d = 900t$. Ésta fórmula es considerada ***la regla de la función***, puesto que, a través de ella, se establece la relación entre las magnitudes implicadas en la situación estudiada.

Es el momento de recordar el significado de ***variable***. Al respecto, cabe destacar dos cuestiones:

- En esta situación del avión, aparecen dos variables: *distancia recorrida*, y *tiempo transcurrido*.
- A cada una de estas variables, le hemos asignado un símbolo (letra), a saber: d representa la distancia recorrida y t el tiempo transcurrido.

Una variable es una cantidad o magnitud que en las condiciones de un proceso dado puede tomar diferentes valores. Las variables se representan por una letra u otro símbolo.

Es muy común, que el símbolo que representa a la variable, se trate como la variable misma. Así, en vez de referirnos a la variable "distancia", hablamos de la variable d (su símbolo). Por otro lado, la cantidad 900 es una constante. Una constante es una cantidad que no se altera en una situación determinada.

Una expresión algebraica, como $900t$, es una frase matemática formada por uno o más números o variables u operaciones entre ellos. Una expresión representa una cantidad, que se conoce como el valor de la expresión. En el caso que nos ocupa, la expresión $900t$ representa la cantidad denominada distancia. Al escribir $d = 900t$ utilizamos el signo igual (=) para asignar el símbolo d a la expresión $900t$, convirtiendo de esta manera a dicha expresión en una fórmula o ecuación.

Al trabajar con variables, podemos actuar en dos direcciones:

- Determinar un número particular pero desconocido, y
- Determinar muchos valores posibles (variando en un cierto rango).

Para explicar estos roles de la variable, retomemos la expresión ya conocida $d = 900t$, que nos permite determinar la distancia recorrida en t horas. Planteemos dos preguntas:

Pregunta 1. *¿Cuál es la distancia recorrida al transcurrir 15 horas?*

Pregunta 2. *Cuando t aumenta de 0 a 5, ¿cómo cambia la distancia recorrida?*

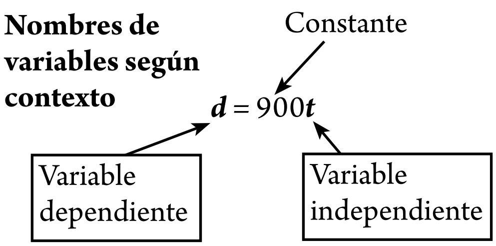
En la pregunta 1, tratamos la variable t como un valor desconocido (variable como incógnita).

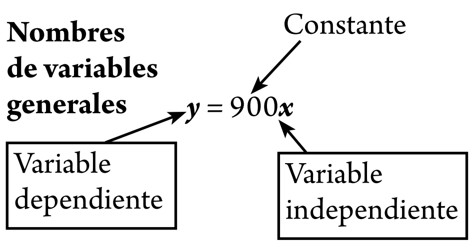
Expresión que proporciona la distancia recorrida en t horas: $900t$
Cuando t es 15, la distancia es: $900t \rightarrow 900(15) = 13500$.
En este caso, en la expresión $900t$, la variable t es una cantidad desconocida pero particular (toma el valor 15). Esta información, proporciona una "instantánea" de la situación.

En contraste, podemos ver una variable no sólo como representante de una cantidad desconocida sino también como *una cantidad variando o cambiando*. Si el tiempo total de vuelo del avión es de 15 horas, podemos pensar que la variable t de la expresión $900t$ está fluctuando sobre los números en el intervalo de 0 a 15. (No podemos considerar un número negativo de horas, pero sí un número fraccionario de horas). Aquí, estamos en presencia de dos cantidades que cambian al mismo tiempo: conforme cambia el número de horas transcurridas, cambia la distancia recorrida.

Desde esta perspectiva, podemos ver la expresión $900t$, no tanto como una expresión para determinar un solo valor desconocido de t sino como una regla.	
t y la expresión 900t como cantidades cambiando	Si t es 1 la distancia es:$\rightarrow$ 900(1) ó 900 Si t es 2 la distancia es:$\rightarrow$ 900(2) ó 1800 Si t es 3 la distancia es:$\rightarrow$ 900(3) ó 2700 Si t es 4 la distancia es:$\rightarrow$ 900(4) ó 3600 Si t es 5 la distancia es:$\rightarrow$ 900(5) ó 4500

Es importante observar que nosotros asignamos valores a t, y mediante la fórmula (o regla) calculamos los valores correspondientes de d. Por esta razón, en el ejemplo que estamos revisando, t es la variable independiente, y la variable dependiente es d. Asimismo, debes tener claro el paso de las magnitudes concretas (tiempo y distancia) a las variables generales. En nuestro ejemplo, eso se traduce en pasar de la expresión $d = 900t$, a la ecuación $y = 900x$, en la que el símbolo y representa la distancia y x representa al tiempo.





Definición de función

La discusión previa, nos permite hacer las siguientes observaciones: (1) funciones proporcionan un medio para describir y comprender relaciones entre variables; en nuestro ejemplo, las variables en juego fueron distancia recorrida y tiempo transcurrido. (2) La relación entre variables se establece a través de una regla, que en nuestro caso vino dada por la expresión algebraica, $\boldsymbol{d} = 900\boldsymbol{t}$. (3) Las variables toman valores que pueden verse como elementos de cierto conjunto numérico; en nuestro ejemplo, tanto la variable $\boldsymbol{d}$, como la variable $\boldsymbol{t}$, toman números mayores o iguales a 0. (4) Las funciones tienen múltiples representaciones, a saber, mediante una descripción verbal, una expresión algebraica, una tabla, o una gráfica. Ya estamos en condiciones de plantear la definición de función.

Existen muchas definiciones de este importante concepto; en este libro, plantearemos: una que ayuda a trabajar la parte operativa de función.

> Una ***función*** es una relación, que se estable a través de una regla entre un *valor de entrada* (o *variable independiente*) y un *valor de salida* (o *variable dependiente*), de tal manera que, siempre que se asigne un valor de entrada, la regla asignará exactamente un valor de salida.

La notación funcionalo

Hemos expuesto que la ecuación $\boldsymbol{d} = 900\boldsymbol{t}$, relaciona dos variables que varían al mismo tiempo: conforme varía el número de horas $(\boldsymbol{t})$, varía la distancia $(\boldsymbol{d})$. Por tanto, se puede afirmar que la distancia $\boldsymbol{d}$, depende del número de horas transcurridas. También se dice que la distancia está en función, o es función del número de horas transcurridas. Esto último, es lo que nos lleva a usar la llamada notación funcional, a saber:

$\boldsymbol{d}(\boldsymbol{t}) = 900\boldsymbol{t}$ (se lee: "*d* de *t*", es igual a 900 por *t*)

El signo igual define la relación.

Esto significa que la distancia d es una función del tiempo t.

La función se denomina d.

Por lo tanto, a la expresión $900t$, le hemos asignado dos "etiquetas": primero le asignamos la letra "*d*", y después la nombramos como $d(t)$. Entonces, se cumple que: $\boldsymbol{d} = \boldsymbol{d}(\boldsymbol{t}) = 900\boldsymbol{t}$

Sin embargo, normalmente para expresar que esto es una función, se escribe así:

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{t}) = 900\boldsymbol{t}$$

La "***f***" es sólo la primera letra de la palabra "función".

En este caso, la función se denomina $\boldsymbol{f}$, la variable independiente es $\boldsymbol{t}$, y la dependiente (anteriormente denominada $\boldsymbol{d}$ y $\boldsymbol{d}(\boldsymbol{t})$), ahora recibe el nombre de $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{t})$. Si es necesario manejar más de una función, éstas se denominan con las letras *g*, *h*, etc.

Inclusive, si hablamos en términos generales también podemos escribir $y(x) = 900x$, o $f(x) = 900x$.

En el siguiente esquema desciframos los elementos de estas fórmulas:

Nombre de la función	*Constante*	*Nombre de la función*	*Constante*	*Nombre de la función*	*Constante*
$\underline{\boldsymbol{d}(\boldsymbol{t})} = 900\boldsymbol{t}$		$\underline{\boldsymbol{y}(\boldsymbol{x})} = 900\boldsymbol{x}$		$\underline{\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})} = 900\boldsymbol{x}$	
Variable dependiente	*Variable independiente*	*Variable dependiente*	*Variable independiente*	*Variable dependiente*	*Variable independiente*

La notación $\boldsymbol{d}(\boldsymbol{t}) = 900\boldsymbol{t}$, nos indica que:

- La función se llama $\boldsymbol{d}$.
- La variable independiente es $\boldsymbol{t}$.
- La variable dependiente es $\boldsymbol{d}(\boldsymbol{t})$.

La notación $\boldsymbol{y}(\boldsymbol{x}) = 900\boldsymbol{x}$, nos indica que:

- La función se llama $\boldsymbol{y}$.
- La variable independiente es $\boldsymbol{x}$.
- La variable dependiente es $\boldsymbol{y}(\boldsymbol{x})$.

La notación $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = 900\boldsymbol{x}$, nos indica que:

- La función se llama $\boldsymbol{f}$.
- La variable independiente es $\boldsymbol{x}$.
- La variable dependiente es $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$.

Recuerda que en todas estas presentaciones, el signo igual se está utilizando para darle un nombre a la expresión o regla que permite calcular la distancia recorrida.

¿Por qué notaciones del tipo "$d(t)$", "$f(t)$", "$f(x)$"?

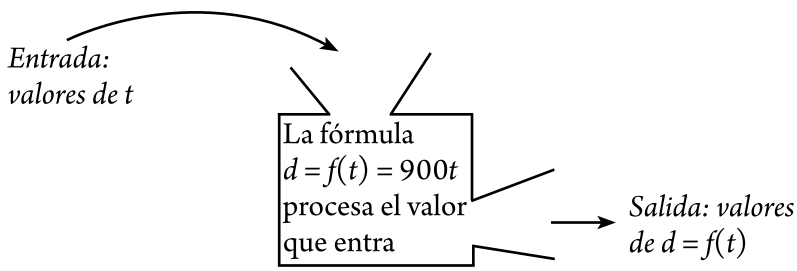
Porque describe muy bien el trabajo que hace la regla de una función.

Recordemos cómo trabaja esta regla o ecuación: nosotros le asignamos valores a t, y la regla le asigna valores a $\boldsymbol{d}$.

Entrada ↓ | ***Trabajo de la regla, $d(t) = 900t$*** Se toma el valor de $\boldsymbol{t}$, se sustituye en la expresión $900\boldsymbol{t}$, y lo que resulta se le asigna a $\boldsymbol{d}$. | **Salida** ↓

Valores de $\boldsymbol{t}$		Valores de $\boldsymbol{d}$
1	$\rightarrow d_{\text{para } t=1} = f(1) = 900 \bullet 1 = 900 \rightarrow$	900
2	$\rightarrow d_{\text{para } t=2} = f(2) = 900 \bullet 2 = 1800 \rightarrow$	1800
3	$\rightarrow d_{\text{para } t=3} = f(3) = 900 \bullet 3 = 2700 \rightarrow$	2700
4	$\rightarrow d_{\text{para } t=4} = f(4) = 900 \bullet 4 = 3600 \rightarrow$	3600
5	$\rightarrow d_{\text{para } t=5} = f(5) = 900 \bullet 5 = 4500 \rightarrow$	4500

Conforme a este proceso, podemos ver la ecuación o regla, como ***una máquina*** que procesa unos valores de $\boldsymbol{t}$, considerados como valores de entrada, y proporciona los valores de $\boldsymbol{d}$ que son valores de salida.



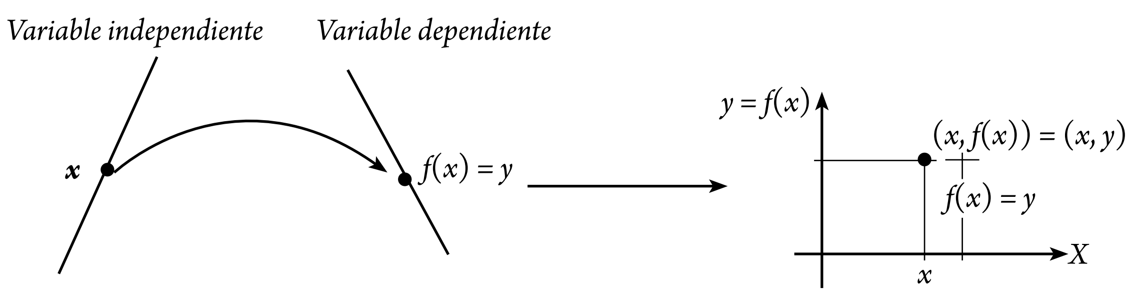
La letra "$\boldsymbol{f}$" de la notación $\boldsymbol{f(t)}$ significa que han de realizarse ciertas operaciones con el valor de $\boldsymbol{t}$ para obtener $\boldsymbol{d}$ o $\boldsymbol{f(t)}$.

Entra un número de la variable independiente

$f(\quad) = \boxed{\textit{Se hacen operaciones}} =$ *Sale otro número para la variable dependiente*

Notación funcional y el plano coordenado

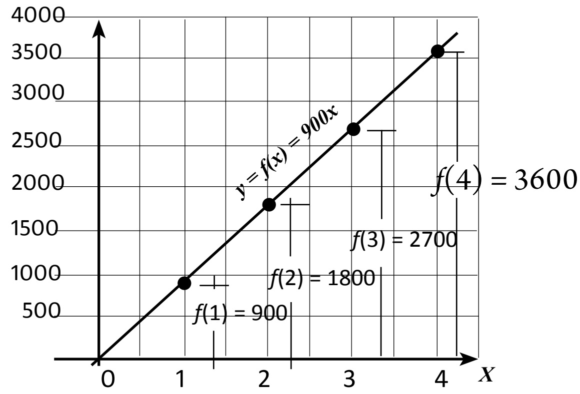
Debes tener muy presente la conexión que existe entre pares ordenados y la notación funcional. El siguiente esquema ilustra esta conexión:



Obsérvese que para pasar de la representación con flechas, a la gráfica en un plano cartesiano, básicamente lo que se hace es girar los dos ejes, de tal manera que formen un plano coordenado cartesiano.

Volvamos a la gráfica de la situación del avión, y usemos esta notación:

Pares ordenados: $\{(1, f(1)), (2, f(2)), (3, f(3)), (4, f(4))$



Imágenes y preimágenes

A los valores que toma la variable independiente se les llama *argumentos o preimágenes*, y los valores que la función le asigna a la variable dependiente, se llaman *imágenes*.

En la situación del avión: La imagen de 1 es: $y_{\text{para } x=1} = f(1) = 900$
La imagen de 2 es: $y_{\text{para } x=2} = f(2) = 1800$
La imagen de 3 es: $y_{\text{para } x=3} = f(3) = 2700$
Etcétera

$f(\ 1\ ) = 900$

Preimagen o argumento *Imagen*

Para funciones descritas por una expresión algebraica, por ejemplo la función $f(x) = 3x - 2$ (la que con frecuencia escribimos $y = 3x - 2$), podemos evaluar la función sustituyendo el valor de la variable independiente (preimagen) en dicha expesión. Por ejemplo, $f(5) = 3(5) - 2$, así que el valor de $f(x)$ cuando $x = 3$ es 13.

Ahora, considera la pregunta: en la situación descrita del avión, con $\boldsymbol{d} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{t}) = 900\boldsymbol{t}$. ¿en qué tiempo el avión recorrerá una distancia de 1000 km?

En este caso, conocemos un valor imagen (1000) y nos piden el valor de su preimagen: es decir, dado $f(t)$, determinar t.

Entonces: $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{t}) = 900\boldsymbol{t}$

$$\downarrow$$

$$1000 = 900\boldsymbol{t}.$$

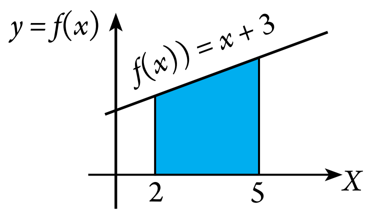
Despejando a $\boldsymbol{t}$: $\dfrac{1000}{900} = \boldsymbol{t}.$

$\dfrac{10}{9} = \boldsymbol{t}.$ $\boldsymbol{t}$ = 1.1 horas; por tanto, el avión recorrerá 1000 km en 1 hora 6 minutos.

En la siguiente actividad podrás trabajar con la notación $\boldsymbol{f}(\ )$.

Actividad 13

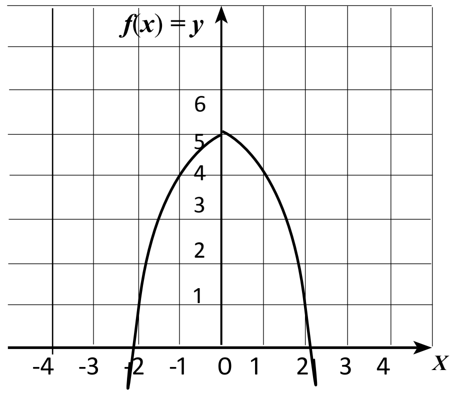
1. Calcula el valor del área sombreada:



2. La curva adjunta, representa a una función $y = f(x)$ Determina $f(0), f(1), f(-2)$ y $f(2)$.

3. Dada las funciones h, g y p tales que $h(x) = 4x$; $g(x) = 10x - 3$ y $p(x) = 5$. Determina la imagen de -2, 3 y 4 para cada una de las funciones dadas.

4. Dada $y = f(x)$, representa gráficamente lo que significa la expresión: $y = f(7) = 1$.



Para comprender totalmente el concepto de función, debemos precisar una condición determinante de toda función, a saber, "***el valor único***", y dos conceptos más: ***dominio*** y ***rango*** (o conjunto imagen). A continuación trabajaremos estas ideas.

El valor único: una característica especial de las funciones

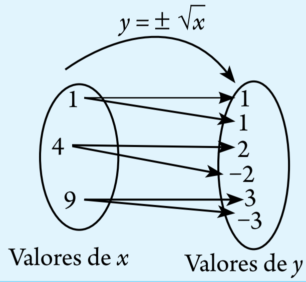
Por definición, funciones son "*de un solo valor*". Esto significa, que a cada valor de la variable independiente, le corresponde exactamente un único valor de la variable dependiente. El valor único es principalmente un requerimiento establecido para hacer el trabajo con funciones más manejable y menos ambiguo. Para entender esto, consideremos la ecuación $y = \sqrt{x}$. Atendiendo la definición de raíz cuadrada, cada x podría corresponder a dos valores y. Por ejemplo:

Si $x = 4$, entonces, $y = \sqrt{4} = \pm 2$, porque $(2)^2 = 4$,
y también $(-2)^2 = 4$,

Así, para $x = 4$, existen dos valores asignados, y en un momento dado, nosotros podríamos necesitar especificar de cuál valor estamos hablando. Consideraciones como estas llevó a matemáticos a restringir funciones como aquellas relaciones que son de valor único.

Para profundizar más en esto, presentaremos en un diagrama de flechas, algunos valores asociados mediante $y = \pm\sqrt{x}$:

Atendiendo el requerimiento de valor único, esta asociación, no es una función; para que sea función, a cada valor x, se le debe asociar exactamente un valor de y.

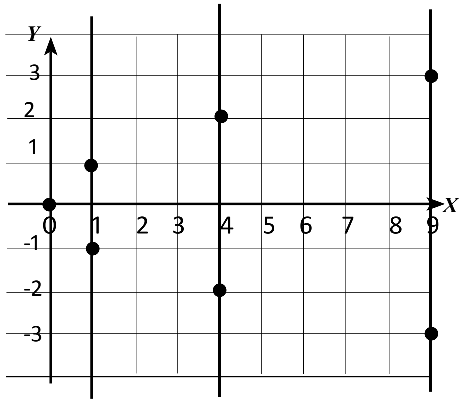


Si esta asociación se presenta como un conjunto de pares ordenados obtendríamos:

$\{(1, 1), (1, -1), (4, 2), (4, -2), (9, 3), (9, -3)\}$

Observamos que en esta asociación (que no es una función), aparecen más de un par ordenado, con el mismo primer elemento (misma abscisa).

Ahora, si representamos estos pares ordenados mediante una gráfica, obtendríamos:



Atendiendo el requerimiento de valor único, una gráfica, no es una función si al trazar al menos una recta vertical, ésta pasa por dos puntos de la gráfica. Esta técnica se denomina ***criterio de la recta vertical.***

Observamos que esta gráfica, la cual no es una función, presenta al menos dos puntos "alineados" en una recta vertical.

Realiza la siguiente actividad para que consolides esta importante propiedad de las funciones.

- Aspecto a evaluar: *Participación en clase*
- Evidencia: *Trabajo colaborativo*
- Competencia o atributo a evaluar: 8.3

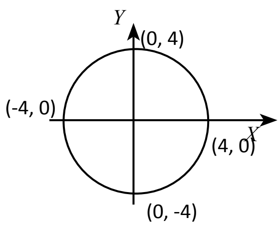
Actividad 14

En cada uno de los siguientes ejemplos ¿es y una función de x? Argumente su respuesta. Si no se presenta una gráfica, trazar la que corresponde.

a. $y = \sqrt{x}$ (***Atención:*** cuando no se escribe un signo antes del signo radical, es costumbre considerar que se trata de la raíz positiva o raíz principal)

b. $y = -\sqrt{x}$

c. El conjunto de todos los puntos sobre la gráfica mostrada abajo



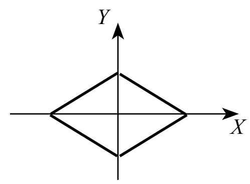
d. $\{(2, 1), (3, 1), (4, 1), (5, 1), (6, 1)\}$

e. $\{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 5)\}$

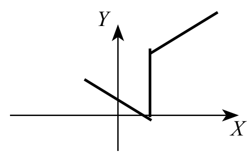
f.

x	y
-2	4
-1	1
0	0
1	1
2	4

g.



h.



Dominio y rango (o conjunto imagen)

En el apartado 1.2 de este libro, se planteó que para ciertas expresiones algebraicas, hay restricciones al momento de asignar valores a las variables. Esto dió origen a lo que se entiende por extensión de la curva en $\boldsymbol{x}$ (o simplemente extensión de $\boldsymbol{x}$), como el conjunto de todos los números reales que, sí, puede tomar $\boldsymbol{x}$, para que y sea un número real. En otras palabras, bajo ciertas circunstancias, las variables tienen un *campo o intervalo de variación* restringido. Cuando se estudian relaciones entre variables, a través de las funciones, con frecuencia es útil determinar esos intervalos de variación. Ésto nos lleva a la definición de *dominio* y *rango* de una función.

El ***dominio*** de una función es el conjunto de todos los valores que puede tomar la variable independiente. ***El rango*** o ***conjunto imagen*** de una función, es el conjunto de todos los valores que son imágenes de algún valor del dominio.

Las funciones cuyos dominios y rangos son subconjuntos de los números reales, se denominan ***funciones numéricas o de variable real***. En este curso, sólo se estudiarán este tipo de funciones.

A partir de este momento consideraremos que los conjuntos X y Y constan de números reales; así, la función f se denomina función con valor real de una sola variable real.

¿Cómo determinar el dominio y el rango? Hay que tener presente, que anteriormente este dominio fue denominado *extensión* de x. La siguiente actividad te permitirá empezar a trabajar estas ideas. Trata de resolverla y después estudia el desarrollo que se presenta inmediatamente después.

- Aspecto a evaluar: *Participación en clase*
- Evidencia: *Trabajo colaborativo*
- Competencia o atributo a evaluar: 8.3

Actividad 15

a. Se quiere elaborar un tabulador de costos de pintura por metro cuadrado, de paredes en forma de cuadrado. Piensa acerca de todas las posibles paredes de esta forma. Para cada longitud de lados, hay un área correspondiente a pintar. Describe la relación entre el *área* de una pared cuadrada y la *longitud* de su lado. Calcula algunos valores para las magnitudes implicadas y regístralos en la siguiente tabla:

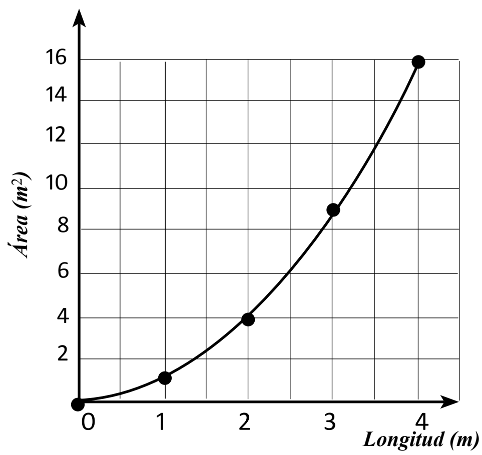
Longitud (m)	1	1.5	2	2.5	3
Área (m^2)					

a. Presenta tus resultados en pares ordenados.

b. Traza la gráfica. Si lo consideras necesario, calcula otros puntos.

c. Supongamos que la longitud de cada lado de la pared a pintar, mide 4 m. Con esta información, contesta las siguientes preguntas:
   - ¿En qué intervalos varían los valores de A y l?
   - ¿Cuál es el valor máximo y cuál es el mínimo que podemos asignarle a l?
   - ¿Cuál es el valor máximo y cuál es el mínimo que puede tomar A?

Para mostrar cómo las longitudes de los lados de las paredes y sus áreas están relacionadas, pudiste haber escrito una ecuación parecida a, $\boldsymbol{A = l^2}$, que en notación funcional sería $\boldsymbol{A(l) = l^2}$, o bien $\boldsymbol{y = f(x) = x^2}$. Asimismo, debiste trazar una gráfica parecida a la mostrada a la derecha.



Restricciones contextuales

Para establecer los intervalos de valores que pueden tomar las variables de una expresión, se debe tener en cuenta que existen dos tipos de restricciones: *contextuales* y *matemáticas*.

En nuestro ejemplo, para la expresión $\boldsymbol{A(l) = l^2}$ que relaciona el área con la longitud del lado de una pared cuadrada, hay dos restricciones contextuales: la primera consiste en atender el hecho de que en el contexto de la tarea planteada, no hay unidades de longitud negativas, por lo que los valores que puede tomar $\boldsymbol{l}$ sólo pueden ser los números reales no negativos; y la segunda consiste en considerar que la pared mide 4 m, y por tanto, el valor máximo que puede tomar $\boldsymbol{l}$ es 4. Ahora bien, aunque no existe un cuadrado de lado igual a cero, el punto de partida para empezar a generar cuadrados, está justamente en $\boldsymbol{l} = 0$. Por tanto, los valores de l variarán en el intervalo $[0,4]$. Este es el dominio de $\boldsymbol{A(l) = l^2}$

Para determinar el intervalo en el que varían los valores del área, consideramos los valores de A, obtenidos al sustituir en la fórmula del área, los valores extremos del dominio tal y como se muestra a continuación:

Si evaluamos el área para cada extremo del intervalo de $\boldsymbol{l}$, obtenemos: para $\boldsymbol{l} = 0$, $\boldsymbol{A} = 0$; si $\boldsymbol{l} = 4$, $\boldsymbol{A} = 22 = 4$. Además se debe considerar que tampoco hay unidades de área negativa. Por tanto, los valores de $\boldsymbol{A}$, estarán en el intervalo $[0, 16]$.

Valores extremos de $\boldsymbol{l}$	Valores extremos de $\boldsymbol{A}$
0	$\boldsymbol{A}(0) = 0^2 = 0$
4	$\boldsymbol{A}(4) = 4^2 = 16$
$\boldsymbol{l}$ sólo toma valores de $[0, 4]$	$\boldsymbol{l}\,\boldsymbol{A}$ sólo toma valores de $[0, 16]$

Al afirmar que $\boldsymbol{l}$ sólo toma valores del intervalo $[0, 4]$, y que $\boldsymbol{A}$ sólo lo hace de $[0, 16]$, estamos estableciendo restricciones contextuales. Este es el rango de $\boldsymbol{A(l) = l^2}$

Realiza la siguiente actividad para que puedas consolidar estas ideas.

Actividad 16

1. La expresión $d = 30t$ describe la relación que existe entre la distancia recorrida y el tiempo transcurrido, de un móvil que parte del reposo con movimiento rectilíneo a una velocidad constante de 30 m/s. Si el móvil se mueve desde un punto A hacia un punto B que se encuentra a 180 m de distancia de A, contesta las siguientes preguntas:

   Atendiendo las restricciones contextuales de esta situación:
   a. ¿Cuál es el valor máximo y cuál es el mínimo que podemos asignarle a d?
   b. ¿Cuál es el valor máximo y cuál es el mínimo que puede tomar t?

2. Un objeto se suelta en caída libre desde una altura de 30 m. La distancia recorrida d en metros por dicho objeto depende del tiempo t en segundos transcurrido según la fórmula $d = 4.9t^2$.

   Atendiendo las restricciones contextuales de esta situación:
   a. ¿Cuál es el valor máximo y cuál es el mínimo que podemos asignarle a d?
   b. ¿Cuál es el valor máximo y cuál es el mínimo que puede tomar d?

Restricciones matemáticas

En la sección 1.2 al abordar la extensión de la curva en x, estudiamos este tipo de restricciones. Recordemos que las restricciones matemáticas surgen a partir de cómo se definen las operaciones de los números reales y sus propiedades. Por ejemplo, el cero no tiene inverso multiplicativo, por tanto, una expresión que se encuentre en el denominador de una fracción debe ser distinta de cero; no es posible calcular la raíz cuadrada de un número real negativo. Asimismo no es posible calcular la raíz cuadrada de un número real negativo. Así, en la expresión $y = \frac{1}{x}$, la variable $\boldsymbol{x}$ no puede valer cero, puesto que la división por cero no está permitida; también, en la expresión $y = \sqrt{x}$, debido a que ningún número real negativo tiene raíz cuadrada, la variable x, sólo puede tomar valores del intervalo $[0, +\infty)$.

Determinación del dominio de una función a partir de su expresión

El procedimiento para determinar el dominio de una función a partir de su expresión algebraica, es el mismo que se aplicó en la determinación de la extensión de x. Dichos procedimientos pueden clasificarse en tres casos:

Caso 1. Funciones racionales

Para encontrar restricciones en funciones racionales, el paso básico consiste en igualar al denominador con 0 y resolver la ecuación resultante.

Caso 2. Funciones raíz cuadrada

Para encontrar restricciones en funciones raíz cuadrada, el paso básico consiste en establecer la cantidad bajo el radical como mayor a 0, y resolver la desigualdad resultante.

Caso 3. Funciones polinomiales.

Si la función es un polinomio, es decir una función de la forma $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{a}_0 + \boldsymbol{a}_1\boldsymbol{x} + \boldsymbol{a}^2\boldsymbol{x}^2 + \ldots + \boldsymbol{a}_n\boldsymbol{x}^n$ (donde $\boldsymbol{a}_0, \boldsymbol{a}_1, \ldots \boldsymbol{a}_n$ son constantes y $\boldsymbol{n}$ un entero no negativo), el dominio está conformado por el conjunto de todos los números reales $\Re$.

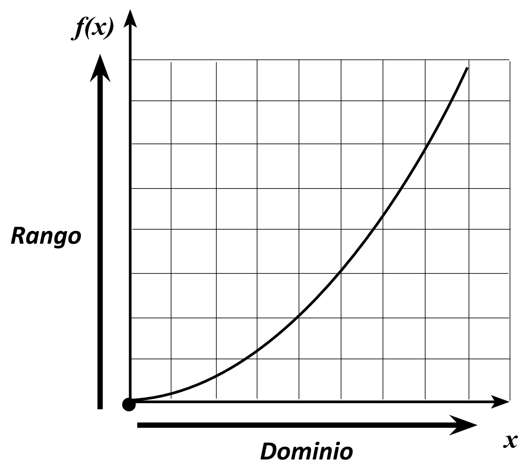
Rango

Una vez determinado el dominio de la función de interés, y considerando que el rango se va configurando conforme usamos valores del dominio, aquí orientaremos a que el rango se determine a partir del gráfico de la función. Si la gráfica de la función se traza usando algún software o calculadora gráfica, también el dominio podría obtenerse de la gráfica y en todo caso la determinación analítica de éste, serviría como comprobación y explicación.

Determinación del dominio y rango a partir de una gráfica

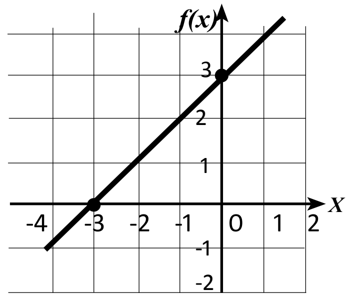
La ilustración de la derecha, muestra la posición del dominio y el rango en la gráfica de una función.

Observación: Para la determinación del rango, se recomienda trazar la gráfica de la función con la ayuda de un software (preferentemente el Desmos), y mediante una proyección sobre el eje Y, identificar el intervalo que corresponde a dicho rango.



Ejemplo

¿Cuál es el dominio y rango de la función de valor real $f(x) = x + 3$?



Solución

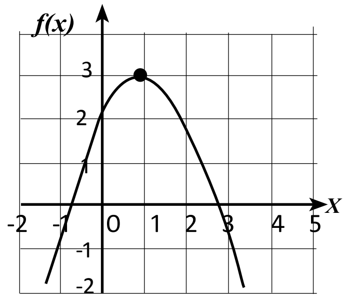
Ésta es una función polinomial de la forma: $f(x) = a_0 + a_1x$. Así que, no hay restricción matemática para el dominio; por lo tanto, cualquier número real se puede sustituir por $\boldsymbol{x}$ y obtener un real número real para $\boldsymbol{y}$.

Asimismo, de la gráfica se observa que el rango abarca todos los valores de y de la recta numérica.

Respuesta: el dominio y rango son todos los números reales $\Re$.

Ejemplo

¿Cuál es el dominio y rango de la función de valor real $f(x) = -x^2 + 2x + 2$?



Solución

Ésta es una función polinomial de la forma: $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$, por lo que, no hay restricción matemática para el dominio; por lo tanto, cualquier número real se puede sustituir por x y obtener un real número real para y.

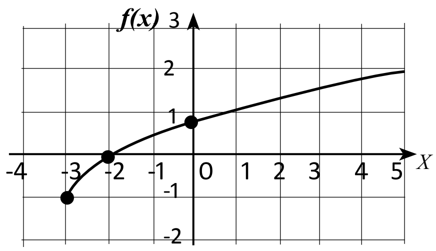
Para determinar el rango, trazamos la gráfica de la función y observamos que $f(x) \le 3$.

Respuesta: El dominio es todos los números reales $\Re$ y el rango es todos los números reales $f(x)$ tales que $f(x) \le 3$.

Ejemplo

¿Cuál es el dominio y rango de la función de valor real $f(x) = -1 + \sqrt{x+3}$?

Solución



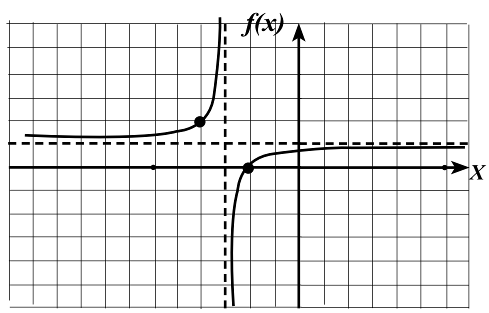
Esta es una función radical. El dominio de una función radical es cualquier valor x para el que el radicando (la expresión bajo el signo radical) no es negativo. Esto significa $x + 3 \ge 0$, entonces $x \ge -3$. (El signo $\ge$ nos indica que x también puede ser 0).

Respuesta: El dominio es todos los números reales x donde $x \ge -3$, y el rango es todos los números reales $f(x)$ tales que $f(x) \ge -1$.

Ejemplo

¿Cuál es el dominio y rango de la función de valor real $f(x) = \dfrac{x+2}{y+3}$?

Solución

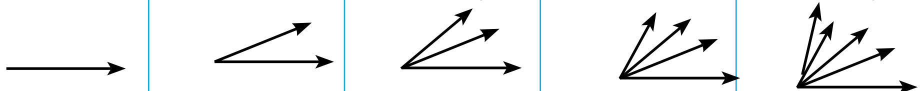


Esta es una función racional. El dominio de una función racional está restringido donde el denominador es 0. En este caso, $x + 3$ es el denominador y este es 0 sólo cuando $x = -3$. Éste valor (que corresponde a una asíntota vertical) debe excluirse del dominio. Para determinar el rango, observamos que hay una asíntota horizontal en $y = 1$, por lo que, éste valor debe exlcuirse del rango.

Respuesta: El dominio es todo número real excepto -3 y el rango es todo número real excepto 1.

Variables discretas

Ahora veamos otro tipo de dominio y rango. A continuación se muestra una serie de ángulos formados por 1, 2, 3, 4 y 5 rayos con un extremo común.



Posición 1	Posición 2	Posición 3	Posición 4	Posición 5
0 ángulos	1 ángulos	3 ángulos	6 ángulos	10 ángulos

Si consideramos el número de posición en la serie como variable independiente (valor de entrada), y el número de ángulos formado como variable dependiente (valor de salida), podemos crear una función denominada ángulos. Una entrada de 1 tiene una salida de 0, ya que la posición 1 no tiene ángulo (descartando el ángulo llano); una entrada de 2 tiene una salida de 1, ya que la posición 2 contiene 1 ángulo; una entrada de 3, produce una salida de 3 etcétera. El *dominio* de ésta función se obtiene contando el número de entradas 1, 2, 3, 4, 5 que identifican cada una de las posiciones en la serie. Las entradas de ésta función son ***valores discretos***, es decir, no son continuos sino aislados (no hay posición que sea 1.3 o 4.1). El *rango* es el número de ángulos en cada posición. Éstos números también son discretos ya que no hay ninguna posición que tenga 2, 4, 5, 7, 8, 9 o cualesquier número decimal de ángulos. Podemos agrupar ésta lista de valores dentro de llaves (en lugar de corchetes o paréntesis, que indican continuidad):

Dominio: $\{1, 2, 3, 4, 5\}$
Rango: $\{0, 1, 3, 6, 10\}$

Actividad 17

1. Determina el dominio de cada una de las siguientes funciones:
   a. $f(r) = \pi r^2$ b. $f(x) = 5x^2 + 2x - 1$ c. $h(t) = 4/t$ d. $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$
   e. $h(x) = \sqrt{x - 10}$ f. $g(x) = \dfrac{3x}{x+5}$ g. $f(x) = \dfrac{3}{x} - \dfrac{3}{x+3}$
2. Atendiendo restricciones contextuales, determina el dominio y rango de cada una de las siguientes funciones:
   a) La función $g(r) = \pi r^2$, que describe el área de una moneda en función del radio.
   b) La función $s(t) = 4.9t^2$ que describe la caída de una piedra que se suelta desde una torre de 30 m de altura; s es la distancia en metros y t el tiempo en segundos transcurrido al caer.

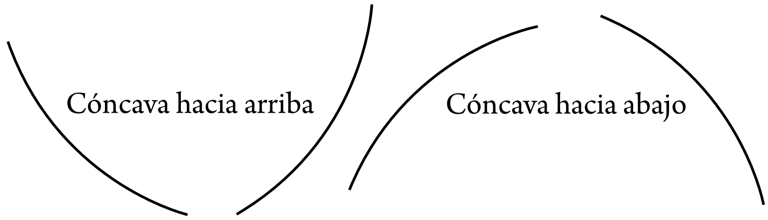
Nociones para caracterizar funciones

Además del dominio y rango, intersecciones con los ejes, simetrías y asíntotas, existen otros conceptos que nos permiten caracterizar a una función.

a. **Funciones crecientes y decrecientes**
   Una función f es creciente si los valores de $f(x)$ aumentan a medida que x aumenta.
   Una función f es decreciente si los valores de $f(x)$ decrecen a medida que x aumenta.
   La gráfica de una función creciente sube a medida que nos movemos de izquierda a derecha.
   La gráfica de una función decreciente baja a medida que nos movemos de izquierda a derecha.

b. Concavidad

La gráfica de una función es cóncava hacia arriba si está curvada hacia arriba a medida que nos movemos de izquierda a derecha; la gráfica es cóncava hacia abajo si está curvada hacia abajo.

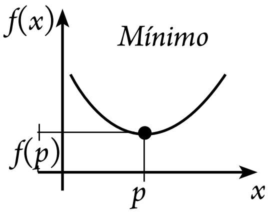


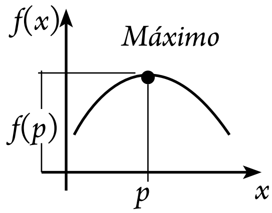
Una recta no es cóncava hacia arriba ni hacia abajo.

c. Máximos y minímos

Supongamos que p es un punto en el dominio de $\boldsymbol{f}$:

- $\boldsymbol{f}$ tiene un ***mínimo local*** en $\boldsymbol{p}$ si $\boldsymbol{f(p)}$ es menor o igual que los valores de $\boldsymbol{f}$ para los puntos cerca de $\boldsymbol{p}$.
- $\boldsymbol{f}$ tiene un máximo local en $\boldsymbol{p}$ si $\boldsymbol{f(p)}$ es mayor o igual que los valores de $\boldsymbol{f}$ para los puntos cerca de $\boldsymbol{p}$.

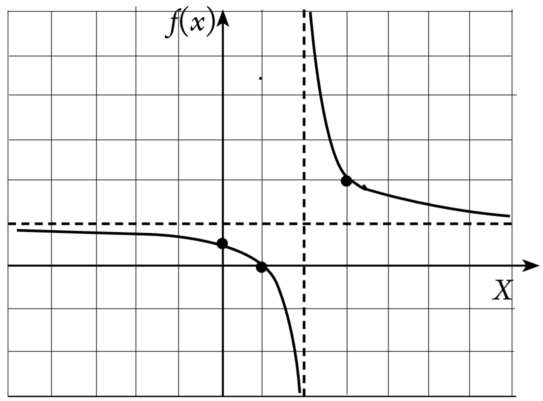




Ejemplo

Caracteriza a la función con ecuación $f(x) = \dfrac{x-1}{x-2}$

Solución



En el lado derecho, se ha trazado la gráfica utilizando Desmos.

-El dominio es todo $\Re$ diferente de 2

-El rango es todo $\Re$ diferente de 1.

-La función tiene una asíntota vertical en $x = 2$, y una horizontal en $y = 1$.

-La función es decreciente en el intervalo $(-\infty, 2)$ y $(2, +\infty)$.

-La función es cóncava hacia abajo en el intervalo $(-\infty, 2)$ y cóncava hacia arriba en el intervalo $(2, +\infty)$.

- Aspecto a evaluar: *Participación en clase*
- Evidencia: *Trabajo colaborativo*
- Competencia o atributo a evaluar: 8.3

Actividad 18

1. Utiliza Desmos, para graficar las siguientes funciones (denominadas básicas o elementales): $f(x) = c$ (c es cualquier número real); $f(x) = x$; $f(x) = 1/x$; $f(x) = |x|$; $f(x) = x^2$; $f(x) = x^3$; $f(x) = \sqrt{x}$; $f(x) = 2x$; $f(x) = log x$; $f(x)=$ sen$x$; $f(x)=$ cos$x$.
2. Caracteriza cada una de estas funciones utilizando las nociones estudiadas.

Funciones definidas a trozos

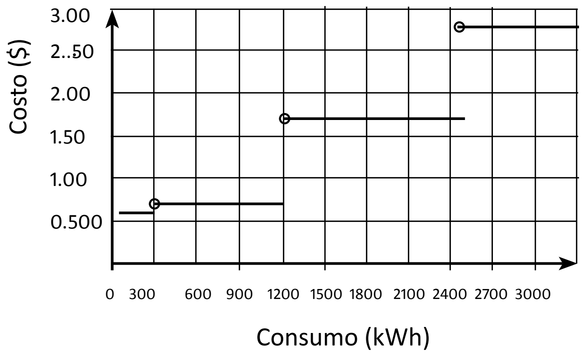
Funciones no tienen que ser definidas por una fórmula. Por ejemplo, consideremos las siguientes temperaturas máximas diarias en Culiacán:

Fecha (octubre 2017)	11	12	13	14	15	16	17
Temperatura máxima (°C)	37	35	36	35	36	39	39

La temperatura es una función de la fecha, porque cada día da lugar a una y sólo a una temperatura máxima. No hay fórmula para la temperatura (aunque dentro de un rango, la función puede aproximarse por una fórmula); sin embargo, la temperatura satisface la definición de una función: cada fecha, tiene una temperatura de salida única, relacionada con ella.

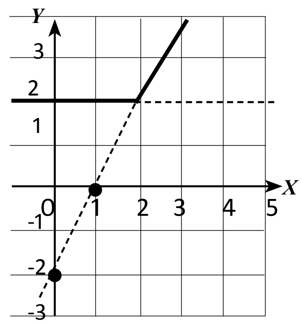
Además, algunas funciones son definidas a trozos, con diferentes fórmulas aplicadas a diferentes partes del dominio. Aunque funciones que son definidas a trozos pueden parecer extrañas, nosotros las encontramos en la vida diaria. En nuestro recibo de la luz, podemos ver el consumo como una función definida a trozos según la cantidad de kilowats-hora.

Consumo (kilowats/h)	Costo (en pesos) por kWh
1- 300	0.583
301 - 1200	0.726
1201 - 2500	1.768
Excedente	2.802



Ejemplo

Representa la función: $\begin{cases} y = 2, \text{ si } x < 2; \\ y = 2x - 2, \text{ si } x \geq 2; \end{cases}$



Solución

Podemos graficar cada ecuación en todo su dominio, y posteriormente sólo conservar el tramo en el intervalo indicado.
Así, en la figura de la derecha, la gráfica de la función pedida, está formada por los dos tramos continuos; los trazos discontínuos, sólo nos indican que inicialmente se trazó la gráfica total sin considerar las condiciones dadas.

1.3 EJERCICIOS

- *Aspecto a evaluar:* Actividad de evaluación intermedia
- *Evidencia:* Reporte escrito de resolución de ejercicios y problemas
- *Competencia o atributo a evaluar:* 5.3, 6 y 8

1. Dadas las reglas funcionales que aparecen a continuación, escribe cada fórmula en notación funcional, identifica la variables dependiente y la variable independiente.

a) $d = \frac{gt^2}{2}$
Variable independiente:___
Variable dependiente:___
Notación funcional:______

b) $C = 2\pi r$
Variable independiente:___
Variable dependiente:___
Notación funcional:______

c) $y = 5x^2 + 2x$
Variable independiente:___
Variable dependiente:___
Notación funcional:______

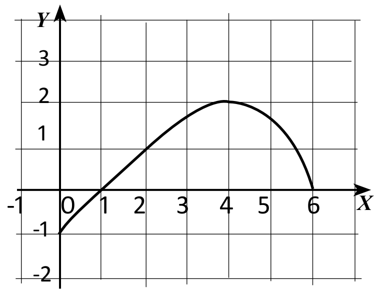
2. Si f es una función de variable real tal que $f(x) = 5x + 2$, prueba que $f(a + 1) + 4f(a) = 25a + 15$.

3. A continuación se te presentan varias expresiones algebraicas. Debes decir, para cada una de ellas, si se trata o no, de una función. Explica detalladamente tus respuestas.

   a) $f(x) = \begin{cases} 3x - 2x, & \text{si } x \le 4 \\ 0, & \text{si } 4 < x < 6 \\ 2, & \text{si } x \ge 6 \end{cases}$ b) $x^2 + y^2 = 9$ c) $y^2 = 2x - 4$

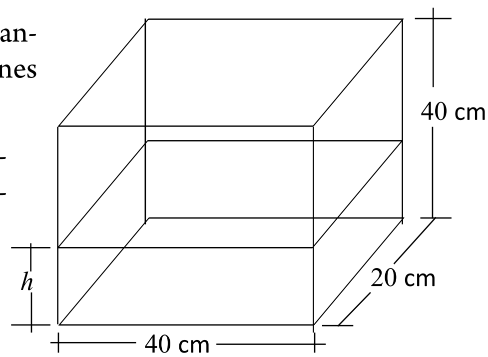
   e) $x = 5$ d) $y = 5$

4. Sea f una función de variable real tal que $f(x) = \dfrac{x^2 + 1}{2}$
   a) Calcula $f(0), f(1), f(-1)$ y $f(0.2)$
   b) Prueba que $f(a) + f(-a) = a^2 + 1$.



5. La función f está dada por el gráfico de la derecha:
   a) Determina $f(0), f(1), f(2), f(4)$ y $f(6)$
   b) Determina el valor de x si $f(x) = 0$; $f(x) = 1$; $f(x) = 2$;

6. Un recipiente cuya forma es la de un paralelepípedo rectangular se llena con un líquido. Considerando las dimensiones del recipiente de la siguiente figura:



   a. Establece una expresión algebraica que nos permita saber cuál es el volumen del líquido en tanto varía la altura.
   b. ¿Cuál es el dominio de la función?
   c. ¿Cuál es el rango de la función?
   d. Realiza una gráfica volumen contra altura.

7. Dadas las siguientes funciones, determina de manera analítica su dominio, traza sus gráfica con ayuda de algún software y determina el rango de la función.

   a. $f(x) = 5x^2 + 2x - 1$ b. $g(x) = 1/x$ c. $g(x) = \dfrac{3 + x}{x - 3}$ d. $f(x) = \dfrac{3}{x + 3}$

   e. $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$ f. $h(x) = \sqrt{x^2 - 25}$

8. Complementa la caracterización de las funciones del ejercicio anterior indicando: intervalos de crecimiento y decrecimiento, concavidad, máximos y mínimos.

1.4 Graficación de funciones: método de las transformaciones

En este apartado se estudiará cuál es el efecto en la gráfica de una función al sumar, restar o multiplicar una constante por dicha función. Este efecto, se convertirá en otro método para bosquejar la gráfica de una función, que se denomina método de las transformaciones.

Se llama transformación a toda alteración de una función. Existen tres tipos de transformaciones, a saber: *traslaciones*, *dilataciones* y *reflexiones*. Para explorar cómo es la nueva gráfica de una función una vez aplicada una transformación, deberás realizar la siguiente actividad:

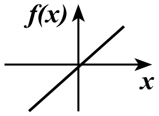
desmos

- Aspecto a evaluar: *Actividad de evaluación intermedia*
- Evidencia: *Reporte escrito de exploración con tecnología*
- Competencia o atributo a evaluar: 5.6

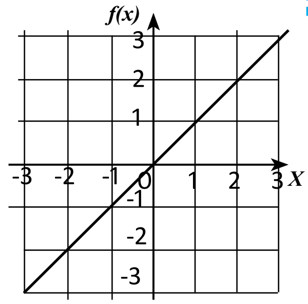
Actividad 19

a. Traslaciones verticales

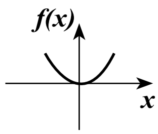
1. La gráfica de $f(x) = x$ es:



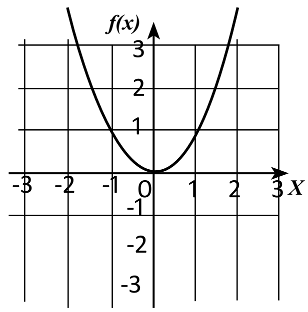
Utiliza Desmos para contestar lo siguiente:
-Obtén la gráfica de $g(x) = x + 1$, $h(x) = x + 2$, $i(x) = x + 1$, $j(x) = x - 2$.
-Traza estas gráficas en el mismo plano coordenado de la derecha.
-Compara la gráfica de la función básica con la de las nuevas funciones. Describe y explica lo observado ____________________



2. La gráfica de $f(x) = x^2$ es:



Utiliza Desmos para contestar lo siguiente:
-Obtén la gráfica de $g(x) = x^2 + 1$, $h(x) = x^2 + 2$, $i(x) = x^2 - 1$, $j(x) = x^2 - 2$.
-Traza estas gráficas en el mismo plano coordenado de la derecha.
-Compara la gráfica de la función básica con la de las nuevas funciones.
Describe y explica lo observado __________



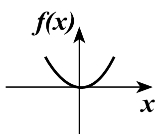
Conclusion 1

Si c es una constante positiva, y $y = f(x)$ es una función cuya gráfica se conoce, entonces la gráfica de la función:
1. $y = f(x) + c$ se desplaza c unidades hacia ________________________
2. $y = f(x) - c$ se desplaza c unidades hacia ________________________

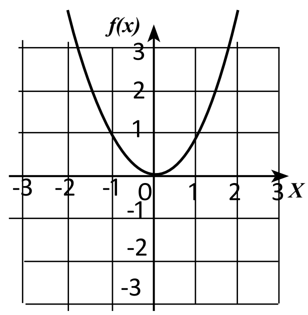
A este tipo de transformación, lo llamaremos **traslaciones verticales**.

b. Traslaciones horizontales

3. La gráfica de $f(x) = x^2$ es:



Utiliza Desmos para contestar lo siguiente:
-Obtén la gráfica de $g(x) = (x + 1)^2$, $h(x) = (x + 2)^2$, $i(x) = (x - 1)^2$, $j(x) = (x - 2)^2$.
-Traza estas gráficas en el mismo plano coordenado de la derecha.
-Compara la gráfica de la función básica con la de las nuevas funciones.
Describe y explica lo observado ___________



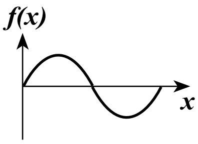
Conclusion 2

Si c es una constante positiva, y $y = f(x)$ es una función cuya gráfica se conoce, entonces la gráfica de la función:
1. $y = f(x + c)$ se desplaza c unidades hacia ________________________
2. $y = f(x - c)$ se desplaza c unidades hacia ________________________

A este tipo de transformación, lo llamaremos **traslaciones horizontales**.

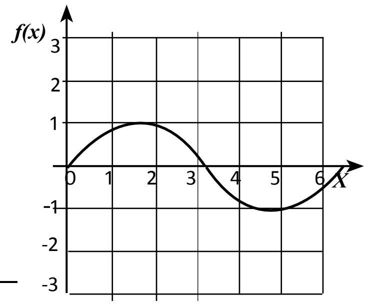
c. Dilataciones o distorsiones verticales

4. La gráfica de un ciclo de $f(x) = \text{Sen } x$ es:



Utiliza Desmos para contestar lo siguiente:
-Obtén la gráfica de $g(x) = 2 \text{ sen } x$ y $h(x) = (1/2) \text{ sen } x$.
-Traza estas gráficas en el mismo plano coordenado de la derecha.
-Compara la gráfica de la función básica con la de las nuevas funciones.
Describe y explica lo observado

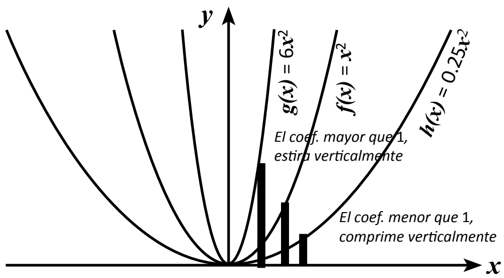
____



Conclusion 3

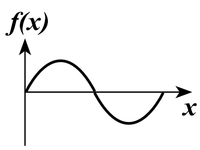
1. Si $c > 1$, y $y = f(x)$ es una función cuya gráfica se conoce, entonces la gráfica de la función: $y = c\,f(x)$ se estira verticalmente.
2. Si $0 < c < 1$, y $y = f(x)$ es una función cuya gráfica se conoce, entonces la gráfica de la función: $y = c\,f(x)$ se comprime verticalmente.

A este tipo de transformación, lo llamaremos **dilataciones o distorsiones verticales.**



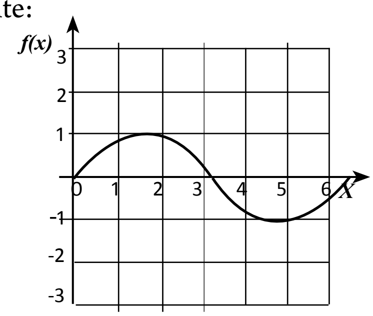
d. Dilataciones o distorsiones horizontales

5. La gráfica de un ciclo $f(x) = \text{Sen } x$ es:



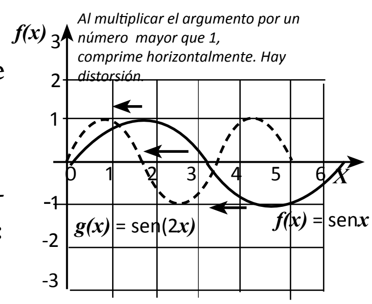
Utiliza Desmos para contestar lo siguiente:
-Obtén la gráfica de $g(x) = \text{sen }(2x)$, y $h(x) = \text{sen}\left(\frac{1}{2}x\right)$.
-Traza estas gráficas en el mismo plano coordenado de la derecha.
-Compara la gráfica de la función básica con la de las nuevas funciones.
Describe y explica lo observado

____



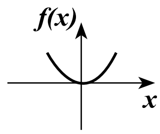
Conclusion 4

1. Si $c > 1$, y $y = f(x)$ es una función cuya gráfica se conoce, entonces la gráfica de la función:
   $y = f(cx)$ se comprime horizontalmente.
2. Si $0 < c < 1$, y $y = f(x)$ es una función cuya gráfica se conoce, entonces la gráfica de la función:
   $y = f(cx)$ se estira horizontalmente.



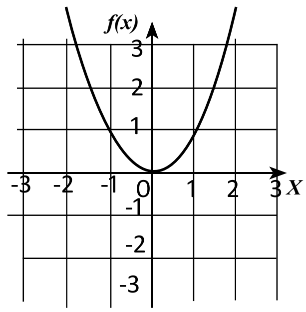
e. Reflexiones con respecto al eje *X*

6. La gráfica de $f(x) = x^2$ es:



Utiliza Desmos para contestar lo siguiente:
-Obtén la gráfica de $f(x) = -f(x)$.
Traza estas gráficas en el mismo plano coordenado de la derecha.
-Compara la gráfica de la función básica con la de las nuevas funciones.
Describe y explica lo observado

____



Conclusion 5

1. Si $y = f(x)$ es una función cuya gráfica se conoce, entonces la gráfica de la función:
$y = -f(x)$ se invierte verticalmente (arriba ⟷ abajo), es decir, ocurre un reflejo con respecto al eje X.

En las reglas anteriores la constante c, puede actuar o bien sobre los valores de la función (valores de y), o bien sobre los valores del argumento (valores de x).

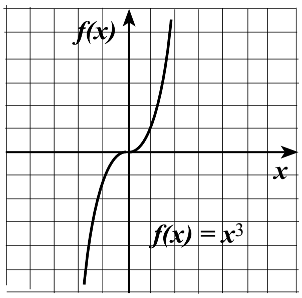
Cuando esté sumando, restando o multiplicando a las y, el efecto es sobre el eje Y, es decir, hacia arriba, hacia abajo, o efecto vertical.

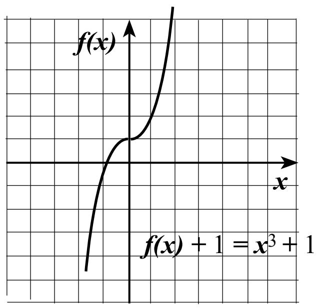
Ejemplos

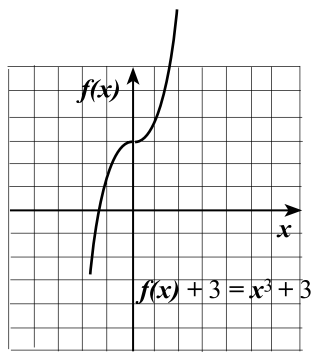
Observa:

Solución

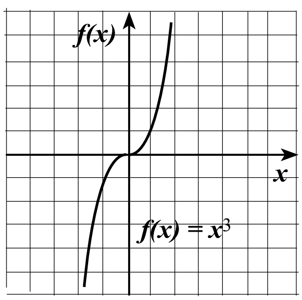
a)

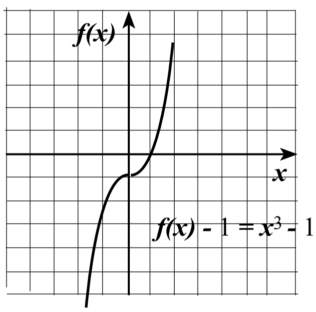


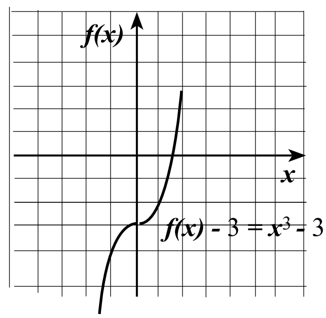




b)

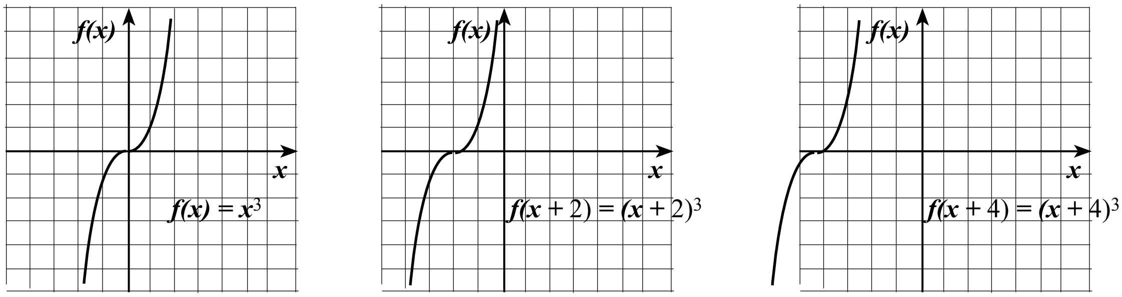




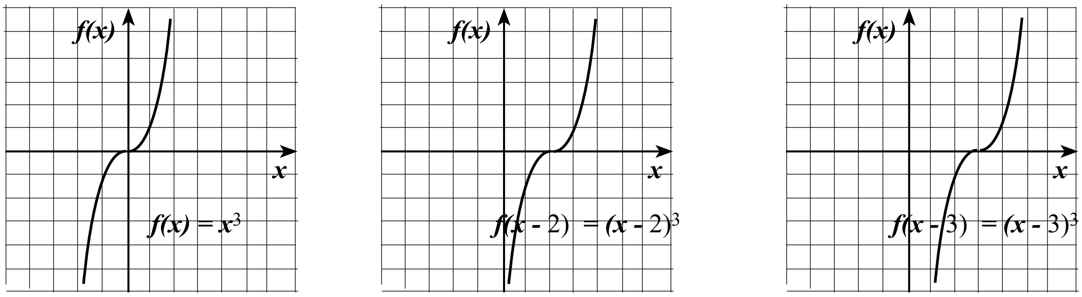


Cuando esté sumando, restando o multiplicando a las x, el efecto es sobre el eje X, es decir, hacia la derecha, hacia la izquierda, o efecto horizontal.

c)



d)



Observaciones

1. Uno de los errores más frecuentes es pensar que si queremos desplazar la gráfica de una función hacia la derecha le debemos sumar un número positivo (véanse las gráficas c). Al sumar un número positivo a la variable independiente, obtenemos un efecto visual de desplazamiento de la gráfica hacia la izquierda. Y, por el contrario, al restar un número positivo a x, la gráfica se desplaza a la derecha (véanse las gráficas d). Reflexiona y explora con una tabulación, sobre el por qué de este fenómeno.

2. El orden adecuado en que deben efectuarse las operaciones es de dentro hacia afuera; primero lo que esté adentro del paréntesis con x y después lo que esté con y.

Por ejemplo: función básica $f(x) = x^2$.
La transformación, $f(x + c) = (x + c)^2$, afecta a los valores x.
La transformación, $f(x) + c = x^2 + c$, afecta a los valores y.

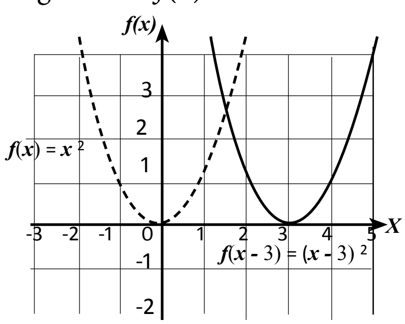
Ejemplo

Dibuja la gráfica de $g(x) = (x - 3)^2 - 2$, a partir de la gráfica de la función básica $f(x) = x^2$.

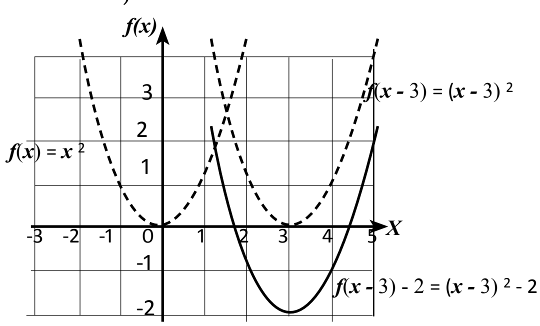
Solución

La transformación, $f(x + c) = (x + c)^2$, afecta a los valores x.
La transformación, $f(x) + c = x^2 + c$, afecta a los valores y.

Efectuando primero lo que está dentro del paréntesis con x, desplazamos 3 unidades hacia la derecha la gráfica de $f(x) = x^2$.



A continuación, consideramos el -2 que afecta los valores y, desplazando la gráfica última, dos unidades hacia abajo:



1.4 EJERCICIOS

- *Aspecto a evaluar:* Actividad de evaluación intermedia
- *Evidencia:* Reporte escrito de resolución de ejercicios y problemas
- *Competencia o atributo a evaluar:* 5.3, 6 y 8

1. Considera la gráfica de $f(x)=|x|$. Traza mediante transformaciones las gráficas de las siguientes funciones:

   a. $g(x)= -2+|x+2|$ b. $h(x) =3+|x-2|$ c. $i(x)= -|x+1|$ d. $j(x)= -2|x-1|+4$

2. Considera la gráfica de $f(x)= x^3$. Traza mediante transfromaciones las gráficas de las siguientes funciones:

   a. $g(x)= -3+(x+3)^3$ b. $h(x) = (x-3)^3+1$ c. $i(x)= -(x+3)^3+5$

3. Considera la gráfica de $f(x) = \sqrt{x}$. Traza mediante transfromaciones las gráficas de las siguientes funciones:

   a. $g(x)= \sqrt{x-5}-2$ b. $h(x) = \sqrt{x+1}+3$ c. $i(x)= -\sqrt{x-5}-2$

4. Considera la gráfica de $f(x) = \frac{1}{x}$. Traza mediante transformaciones las gráficas de las siguientes funciones:

   a. $f(x) = \frac{1}{x+3}$ b. $f(x) = \frac{1}{x-3}$ c. $f(x) = \frac{1}{x+3}+2$ d. $f(x) = \frac{1}{x-3}-1$

5. Considera la gráfica de $f(x)=$ sen x. Traza mediante transfromaciones las gráficas de las siguientes funciones:

   a. $g(x)= -2+\text{sen}\, x$ b. $h(x) =3\text{sen}\, x$ c. $i(x)= \text{sen}(x+1)$ d. $j(x)= \text{sen}(x+1)-3$

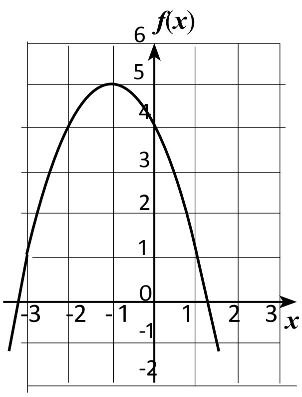
6. Considera la gráfica de $f(x) = \cos x$. Traza mediante transfromaciones las gráficas de las siguientes funciones:

   a. $g(x)= -2+\cos x$ b. $h(x) =3\cos x$ c. $i(x)= \cos(x+1)$ d. $j(x)= \cos(x+1)-3$

7. Utiliza el Desmos para graficar cada una de las ecuaciones anteriores. Compara estas gráficas con las que ya habías obtenido. Si hubo diferencias, reflexiona sobre posibles errores u omisiones.

8. Determina la fórmula de cada una de las siguientes funciones que tienen las gráficas mostradas.

a)

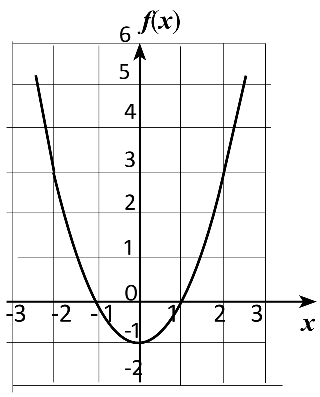


$f(x) =$ ______________

Justificación de la respuesta

____

b)



$f(x) =$ ______________

Justificación de la respuesta

____

1.5 Familia de funciones: un antecedente para la modelización de fenómenos del mundo real

Es útil agrupar funciones en familias con patrones de cambio similares porque estas funciones, y las situaciones que ellas modelan, comparten ciertas características generales. Entre estas familias tenemos, las funciones lineales, funciones cuadráticas, funciones exponenciales, funciones logarítmicas, funciones trigonométricas, entre otras. En esta sección explorarás lo relativo a estas cuestiones.

La perspectiva de covariación y la perspectiva de correspondencia

El objetivo de trabajar estas perspectivas, es desarrollar una estrategia que nos permita determinar la expresión algebraica de una función a partir de su representación tabular. Ésto se explicará a través de los siguientes ejemplos:

Ejemplo 1

Determina la expresión algebraica de la función representada en la siguiente tabla:

x	y
0	0
1	2
2	4
3	6
4	8
x	¿?

Solución

a. ¿Qué implicaría examinar la relación representada en la tabla desde una perspectiva de correspondencia?
Una perspectiva de correspondencia de la función, centra la atención, sobre una asignación de un conjunto a otro. Desde esta perspectiva, nos movemos desde los argumentos (valores de la variable independiente) hacia las imágenes (valores de la variable dependiente). En símbolos, tenemos la asignación: $x \to$ y que se traduce en:

$$0 \to 0,\ 1 \to 2,\ 2 \to 4, \text{ etc.}$$

x	y
0	0
1	2
2	4
3	6
4	8
x	¿?

La perspectiva de correspondencia trabaja de la siguiente manera:
¿Cómo encuentro y a partir de x?
¿Qué hacer? Descompongamos los valores de y en factores, tratando de que estos valores y aparezcan en función de x.

$$\begin{array}{c} y \quad\ \ x \\ \downarrow \quad\ \ \downarrow \\ 0 = 2\times 0 \\ 2 = 2\times 1 \\ 4 = 2\times 2 \\ 6 = 2\times 3 \\ 8 = 2\times 4 \\ y = 2x \end{array}$$

Concluimos que: $y = 2x$

Así, esta perspectiva nos ha permitido encontrar la representación simbólica de la función dada, a saber, $y = f(x) = 2x$.

b. ¿Qué implicaría examinar la relación representada en la tabla desde una perspectiva de covariación? Ésto, lo analizaremos a continuación:
Una perspectiva de covariación enfoca sobre patrones basados en cómo dos variables cambian simultáneamente. Esto significa, que debemos observar los cambios cuantitativos en cada una de las columnas de la tabla. Así pues, desde la perspectiva de covariación nos movemos y observamos cambios en los valores, primero de un valor de x, hacia otro valor de x, y posteriormente hacemos, lo mismo para los valores de y.

Solución

Uno podría observar que conforme aumentan los valores de x, también aumentan los de y. Específicamente, si x aumenta en 1, los valores de y se incrementa de manera constante en 2.

	x	y	
	0	0	
+1 ↓	1	2	+2
+1 ↓	2	4	+2
+1 ↓	3	6	+2
+1 ↓	4	8	+2
	x	¿?	

$y = f(x) = 2x$

Atención: Este patrón específico exhibido por la función de la tabla de un ***aumento aditivo constante*** en valores de salida, es característico de las funciones lineales. Más adelante se abundará al respecto.

Para futuros análisis, es conveniente establecer que esta cantidad en que cambian las salidas, son ***diferencias*** entre cada valor de salida y su predecesor, a saber: $2-0=2$; $4-2=2$; $6-4=2$; $8-6=2$.

Comparando estos resultados con la expresión $y = f(x) = 2x$, encontrada con el enfoque de correspondencia, puede observarse que el *aumento aditivo* constante de +2, en los valores de salida, es el coeficente de x en la ecuación de la función (aunque debe aclararse, que esta coincidencia sólo es posible si los valores de x aumentan en una unidad).

Ejemplo 2

Determina la expresión algebraica de la función representada en la siguiente tabla:

x	y
0	3
1	6
2	12
3	24
4	48
x	¿?

Solución

a. Perspectiva de correspondencia

x	y
0	3
1	6
2	12
3	24
4	48
x	¿?

¿Cómo encuentro y a partir de x? ¿Qué hacer? Descompongamos los valores de y en factores, tratando de que aparezcan en función de x.

y ↓ $\quad x$

$3 =$ ¿?

$6 = 3\times2 = 3\times2^1$

$12 = 3\times2\times2 = 3\times2^2$

$24 = 3\times2\times2\times2 = 3\times2^3$

$48 = 3\times2\times2\times2\times2 = 3\times2^4$

El valor inicial de y puede escribirse: $3 = 3\times2^0$

Concluimos que: $y = 3\times2^x$

b. Perspectiva de covariación

Puede observarse que, si x aumenta en 1, cada valor de y es 2 veces el anterior.

	x	y	
	0	3	
+1 ↓	1	6	×2
+1 ↓	2	12	×2
+1 ↓	3	24	×2
+1 ↓	4	48	×2
	x	¿?	

$y = f(x) = 3\times2^x$

Atención: Este patrón específico exhibido por la función de la tabla de un ***aumento multiplicativo constante*** en valores de salida, es característico de las funciones exponenciales. Más adelante se abundará al respecto.

Comparando estos resultados con la expresión $y = f(x) = 3\times2^x$, encontrada con el enfoque de correspondencia, puede observarse que el factor por el que se multiplica un valor de y para obtener el siguiente, es la base del exponente x de la ecuación de la función, y, el valor de y cuando x es 0, es coeficiente de dicha ecuación.

Ejemplo 3

Determina la expresión algebraica de la función representada en la siguiente tabla:

x	y
0	0
1	1
2	4
3	9
4	16
x	¿?

Solución

a. Perspectiva de correspondencia

x	y
0	0
1	1
2	4
3	9
4	16
x	¿?

¿Cómo encuentro y a partir de x? ¿Qué hacer? Descompongamos los valores de y en factores, tratando de que aparezcan en función de x.

y ↓ $\quad x$

$0 =\ $ ¿?

$1 = \quad 1\times1 = 1^2$

$4 = \quad 2\times2 = 2^2$

$9 = \quad 3\times3 = 3^2$

$16 = \quad 4\times4 = 4^2$

Concluimos que: $y = x^2$

b. Perspectiva de covariación

En esta función, un primer análisis de covariación (primeras diferencias), no proporciona mucha información; una estrategia es hacer un segundo análisis (segundas diferencias), y en este caso, encontramos un aumento aditivo constante en los valores de salida.

Atención: Este patrón específico exhibido por la función de la tabla de ***segundas diferencias constantes***, en valores de salida, es característico de las *funciones de segundo grado*. Más adelante se abundará al respecto.

	x	y		
	0	0		
+1 ↓			+1	
	1	1		+2
+1 ↓			+3	
	2	4		+2
+1 ↓			+5	
	3	9		+2
+1 ↓			+7	
	4	16		
	x	¿?		

Para esta función, la perspectiva de covariación sólo nos ha permitido concluir que esta función es de segundo grado. Una vez establecido el modelo general de estas funciones, ésto será de gran ayuda.

Ejemplo 4

Determina la expresión algebraica de la función representada en la siguiente tabla:

x	y
1	3
2	3/2
3	1
4	3/4
5	3/5
x	¿?

Solución

a. Perspectiva de correspondencia

x	y
1	3
2	3/2
3	1
4	3/4
5	3/5
x	¿?

¿Cómo encuentro y a partir de x? ¿Qué hacer? En este caso, no parece que proceda la descomposición de los valores de y en factores. Debes considerar este caso especial de comportamiento de las variables, que viene dado por: $xy = 3$; o bien $y = 3/x$

$x\,y$ ↓

$1\times3 = 3$

$2\times3/2 = 3$

$3\times1 = 3$

$4\times3/4 = 3$

Solución

b. Perspectiva de covariación

Puede observarse que, si x aumenta, y disminuye.

Atención: Este patrón específico exhibido por la función de la tabla de que mientras x aumenta, y disminuye, es característico de las funciones inversas. Las funciones inversas son del tipo:

$$xy = k; \text{ o bien } y = k/x$$

x	y
1	3
2	3/2
3	1
4	3/4
5	3/5
x	¿?

Aumenta ↓ Disminuye ↓

Razones de cambio

La tabla de la derecha, es la misma del ejemplo 1. En dicha tabla, se debe tener en cuenta que los valores de x, aumentan en una unidad. Bajo esta circunstancia, el aumento de 2 unidades en los valores de y, provoca que la expresión de la función sea $y = f(x) = 2x$.

x	y
0	0
1	2
2	4
3	6
4	8
x	¿?

Ahora, para esta misma función, supongamos que sólo conocemos los valores dados en la siguiente tabla:

x	y
0	0
2	4
4	8
6	12
¿?	x

+2 ↓ +2 ↓ +2 ↓   +4 +4 +4

$y = f(x) = 2x$

Debes convencerte que esta tabla representa a la misma función del ejemplo 1 cuya expresión algebraicas es: $y = f(x) = 2x$.

Contrario a lo sucedido en la tabla anterior, el aumento en los valores de y, no coincide con el coeficente de x en la expresión algebraica. Ésto sucede porque los aumentos en los valores x, no son unitarios.

Sin embargo, podemos razonar de la siguiente manera:
si x aumenta +2, y aumenta +4
si x aumenta +3, y aumenta +6
si x aumenta +4, y aumenta +8
si x aumenta +1, y aumenta +2.

Nos interesa lo que pasa con el aumento unitario de x, porque esto nos proporciona el coeficiente que lleva x en la expresión algebraica. Sin embargo, observamos lo siguiente:

$$\frac{4}{2} = \frac{6}{3} = \frac{8}{4} = \frac{2}{1} = 2$$

Éstas razones formadas entre la cantidad en la que cambian los valores y, y la cantidad en la que cambian los valores x, es precisamente el valor del coeficiente de x en la expresión algebraica de ésta función. Estas razones son de gran importancia al clasificar las funciones, por lo que reciben el nombre especial de ***razones de cambio***.

La idea de razón es central para el trabajo que hacemos en el análisis de situaciones funcionales. La descripción de razones de cambio en una relación funcional puede proporcionarnos información importante acerca de una situación. Antes de estudiar razones de cambio, estableceremos la siguiente definición:

La variación o cambio de una función en un intervalo, representa el aumento o disminución de la función en los extremos del intervalo. Estudia los siguientes ejemplos.

Ejemplo 1

Actualmente, Carlos mide 1.80 m de estatura, y hace 10 años tenía una estatura de 1.45 m.

a. ¿Cuánto ha cambiado la estatura de 10 años a la fecha?

Solución

En esta actividad se observan dos variables: estatura y tiempo. Se pide medir un cambio en la variable estatura al cambiar el tiempo. Asumiendo que estamos en el 2017, la variable tiempo toma valores en el intervalo [2007, 2017], y la estatura varía en el intervalo [1.45, 1.80].

Si a la variable estatura la denotamos como e, su valor inicial puede simboluizarse como $\boldsymbol{e_i}$ y su valor final como e_f; entonces *el cambio de esta variable puede medirse por la diferencia*:

$$e_f - e_i = \Delta e$$

En donde Δe *representa el cambio de la estatura*, y, según la información proporcionada, este cambio es: $\Delta e = e_f - e_i = 1.80 - 1.45 = +0.35$ metros.

De la misma manera, si a la variable tiempo, la denotamos como $\boldsymbol{t}$, y a su valor inicial y final como t_i y t_f respectivamente, entonces el *cambio de esta variable* **t**, *se mide por la diferencia*:

$$t_f - t_i = \Delta t$$

En donde Δt *representa el cambio en el tiempo*, y, según la información proporcionada, este cambio es: $\Delta t = t_f - t_i = 2017 - 2010 = +10$ años.

Tiempo	Estatura
2007	1.45
2017	1.80

+10

Valor final menos valor inicial: 2017 - 2010 = +10

+0.35

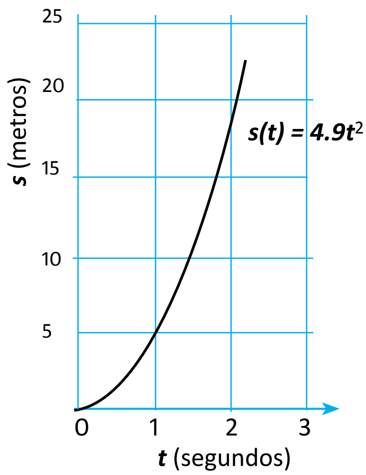
Valor final menos valor inicial: 1.80 - 1.45 = +0.35

Entonces la respuesta a la pregunta es: La estatura de Carlos tuvo un aumento de 0.35 m en 10 años.

A continuación determinaremos los cambios en variables a partir de la gráfica y regla de una función.

Ejemplo 2

Si desde una torre de 30 m de altura se deja caer una piedra, dicha caída libre se describe por la fórmula $s(t) = 4.9t^2$, en donde s es la distancia que cae el cuerpo en metros, y t el tiempo en segundos transcurrido al caer. ¿Cuánto cambia la distancia que cae la piedra entre 1 y 2 segundos?

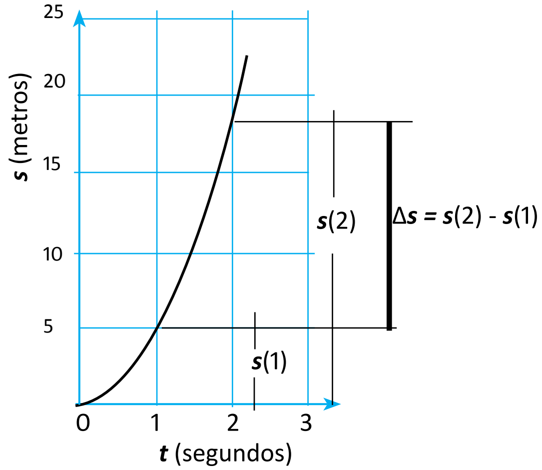


Solución

A partir de la gráfica, se puede observar que el cambio en la distancia de caída de la piedra entre 1 y 2 segundos, es aproximadamente:

$$\Delta \boldsymbol{s} = \boldsymbol{s_f} - \boldsymbol{s_i} = 19.6 - 5 = 14.6 \text{ m}$$

Este resultado es aproximado y puede variar de una persona a otra. Sin embargo, si utilizamos la fórmula que modela a este fenómeno, a saber, $s(t) = 4.9t^2$, se obtendría un resultado más preciso. Para dicho cálculo, necesitamos recordar cómo debe evaluarse una función a través de su regla y aplicar la siguiente expresión para medir el cambio: $\Delta s = s(2) - s(1)$



Si $s(t) = 4.9t^2$, entonces:
$s(1) = 4.9(1)^2 = 4.9$
$s(2) = 4.9(2)^2 = 4.9(4) = 19.6$
$\Delta s = s(2) - s(1) = 19.6 - 4.9 = 14.7$

Esto significa que un objeto en caída libre, recorre 14.7 metros entre los segundos 1 y 2.

Ejemplo 3

Determina el cambio de la función $y = x^2 + x$ en los intervalos: a. $[0, 1]$, b. $[2, 4]$.

Solución

a. $[0, 1]$ $\quad \Delta y = y_f - y_i = y(1) - y(0)$
$= (0^2 + 0) - (1^2 + 1) = 0 - 2 = -2$

b. $[2, 4]$ $\quad \Delta y = y_f - y_i = y(4) - y(2)$
$= (4^2 + 4) - (2^2 + 2) = (16 + 4) - (4 + 2) = 14$

Actividad 20

1. Considerando la información del ejemplo 2, contesta las siguientes preguntas:
   a. ¿Cuánto cambia la distancia que cae la piedra entre 0 y 2 segundos?
   b. ¿Cuánto cambia la distancia que cae la piedra entre 0 y 3 segundos?
2. Determina el cambio de la función $y = x^2 + 3x - 2$ en los intervalos indicados:
   a. $[2, 4]$; b. $[-2, 0]$

Recordemos que la covariación trata sobre los cambios simultáneos entre variables. Al analizar representaciones tabulares, esto se manifestó observando cambios tanto en los valores de x, como en los de y. En el caso de caída libre, evaluamos la distancia recorrida por un objeto respecto a cierto intervalo de tiempo. La idea que ahora necesitamos fijar, es que esta variación simultánea entre dos variables, es conveniente que se establezca para valores unitarios de los valores de entrada. Por ejemplo, si un automóvil recorre 200 km en 2 horas, lo más común, es que reportemos lo que recorre en 1 hora. Para ello, establecemos la razón: $\dfrac{distancia}{tiempo}$ y obtenemos:

$$\frac{distancia}{tiempo} = \frac{200\text{ km}}{2\text{ horas}} = \frac{100\text{ km}}{1\text{ horas}}$$

Esta razón se escribe simplemente como 100 km/hora. Así, cuando hablamos de velocidad, nos estamos refiriendo a una razón: la razón distancia con el tiempo.

Volviendo al ejemplo 1, si sabemos que Carlos creció 0.35 m en 10 años, ¿cuánto creció Carlos por año? La respuesta la obtenemos planteando la razón:

$$\frac{Cambio\ en\ estatura}{Cambio\ en\ tiempo} = \frac{0.35\text{ m}}{10\text{ años}} = 0.035\text{ m/año}$$

Hemos planteado una razón de cambio. Una razón de cambio nos permite ver cómo una variable cambia con respecto a otra variable, es decir, es un cambio relativo. En la situación planteada, la estatura de Carlos cambió con respecto al tiempo, a razón de 3.5 cm por año. Esto no significa que Carlos creció 3.5 cm cada año. Pudo crecer más al principio y luego dicho crecimiento pudo haber disminuido y después aumentar; pero en *promedio* se dio un crecimiento en la estatura de 3.5 cm por año. Debido a esto, realmente estamos calculando una razón de cambio promedio. Sin embargo, con frecuencia sólo usaremos "razón de cambio" en vez de "razón de cambio promedio".

Podemos entonces, definir razón de cambio de la siguiente manera:

Razón de cambio, es el cociente entre el cambio en la variable dependiente (valor de salida) dividido por el cambio en la variable independiente (valor de entrada).

$$\text{Razón de cambio} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\textit{Cambio en valor de salida}}{\textit{Cambio en valor de entrada}} = \frac{y_{final} - y_{inicial}}{x_{final} - x_{inicial}}$$

- Aspecto a evaluar: *Participación en clase*
- Evidencia: *Trabajo colaborativo*
- Competencia o atributo a evaluar: 8.3

Actividad 21

1. Un vigilante de un parque mide la profundidad del agua en un lago en el mismo sitio durante un periodo de varias semanas y registró los resultados en una tabla:

a. ¿Cuál fue el cambio en profunidad desde el día 7 hasta el día 14?

b. ¿Cuál fue el cambio en profundiad desde el día 14 hasta el día 28?

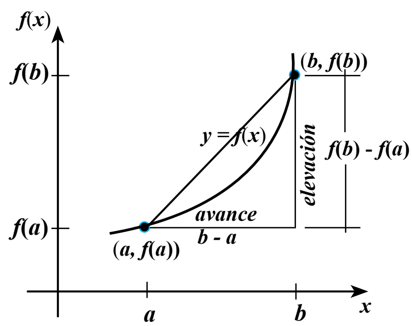
c. ¿Cuál fue la razón de cambio promedio en profundiad desde el día 7 hasta el día 14? ¿Desde el día 14 hasta el día 28? ¿Desde el día 7 hasta el día 42?

Día	Profundidad del lago en metros
7	15.29
14	15.43
28	15.57
35	15.71
42	15.85

En notación funcional, decimos que, dada cualquier función f (de valor real) definida en un intervalo $[a, b]$, la razón de cambio promedio de esta función sobre el intervalo, es el cambio en el valor de la función de a a b dividido por la longitud del intervalo de a a b.

Debido a que el cambio en el valor de la función entre a y b es $f(b) - f(a)$ y la longitud del intervalo de a a b es $b - a$, la razón promedio de cambio sobre el intervalo $[a, b]$ es:

$$\text{Razón de cambio} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$



En un escenario gráfico, con frecuencia describimos este cambio en la variable dependiente dividido por el cambio en la independiente como *"elevación sobre avance"*, que es la ***pendiente*** de la recta a través de $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$ tal y como se muestra en la figura de la derecha.

"*Elevación*" corresponde al cambio vertical en la gráfica (cambio en y), en contraste a un "*avance*", que corresponde a un cambio horizontal en la gráfica (cambio en x).

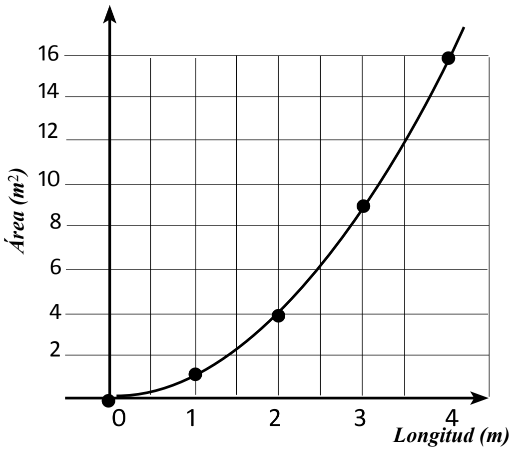
- Aspecto a evaluar: *Participación en clase*
- Evidencia: *Trabajo colaborativo*
- Competencia o atributo a evaluar: 8.3

Actividad 22

El área A de cualquier cuadrado es función de su lado l y está dada por la fórmula $A(l) = l^2$. Si l crece, entonces el área también crece.

a. ¿En cuál de los siguientes intervalos crece con mayor rapidez el área del cuadrado?
   a.1 Cuando l cambia de 0 a 1 metro.
   a.2 Cuando l cambia de 1 a 2 metro.
   a.1 Cuando l cambia de 2 a 3 metro.

b. ¿La rapidez con la que crece el área es constante o también cambia?



La razón de cambio de una función es un medio importante para describirla. La función que presenta la razón de cambio de manera más explícita, es la función lineal.

Funciones lineales

Si definimos geométricamente a las funciones, es decir, si atendemos la clase de gráfica que tienen, entonces, *una función es lineal si su gráfica está sobre una línea recta*. Como consecuencia de este hecho, las funciones lineales tienen otra característica relacionada con las razones de cambio.

Recordemos la situación del avión que vuela a 900 km por hora. La siguiente tabla ilustra el comportamiento de esta función bajo un enfoque de covariación.

+1 +1 +1 +1 +1 +1 +1 +1 +1 +1

t (tiempo transcurrido en horas)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
d (distancia recorrida en km)	0	900	1800	2700	3600	4500	5400	6300	7200	8100	9000

+900 +900 +900 +900 +900 +900 +900 +900 +900

Los valores en la tabla indican que por cada incremento en el tiempo de 1 hora, la distancia que recorre el avión desde el punto de partida aumenta 900 km. La razón de cambio es:

$$\frac{900-0}{1-0} = \frac{1800-900}{2-1} = \frac{2700-1800}{3-2} = \ldots = \frac{900}{1} = 900$$

Observación. Para ésta representación tabular de la función, el aumento aditivo constante de 900, en los valores de salida, es igual a la razón de cambio; sucede así, porque los valores de entrada, aumentan en una unidad.

Esta razón de cambio también puede calcularse con pares de valores no consecutivos; por ejemplo:

$5-2=+3$ $\qquad$ $10-6=+4$

t (tiempo transcurrido en horas)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
d (distancia recorrida en km)	0	900	1800	2700	3600	4500	5400	6300	7200	8100	9000

$4500-1800=+2700$ $\qquad$ $9000-5400=+3600$

$$\frac{4500-1800}{5-2}=\frac{2700}{3}=900$$

$$\frac{9000-1800}{10-6}=\frac{3600}{4}=900$$

Ciertamente, las funciones lineales, se caracterizan por tener un ***aumento aditivo constante***; pero, ésto puede apreciarse sólo cuando los valores de entrada cambian de manera uniforme. Por ejemplo, la tabla anterior, bien podría consistir de los siguientes valores:

$5-2=+3$ $\qquad$ $10-6=+4$

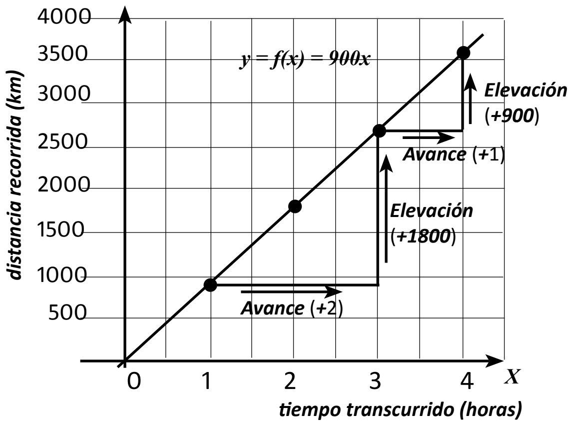
t (tiempo transcurrido en horas)	0	1	2	5	6	10
d (distancia recorrida en km)	0	900	1800	4500	5400	9000

$4500-1800=+2700$ $\qquad$ $9000-5400=+3600$

En esta presentación, no se aprecian aumentos constantes, pero tenemos en todos los casos, razones de cambio es 900. A partir de estos resultados podemos establecer el siguiente patrón:

Funciones lineales están caracterizadas por una razón de cambio constante

Para visualizar la razón de cambio en una gráfica, recordemos la gráfica de esta situación del avión. En tal gráfica, formamos triángulos con un segmento horizontal que llamaremos "*avance*" (la diferencia entre dos valores x), un segmento vertical que denominaremos "*elevación*" (la diferencia entre dos valores y), y un segmento de la recta misma. Triángulos como éstos, se denominan ***triángulos de pendiente***, y a la razón elevación/avance, se le denomina ***pendiente de la recta***, y se representa con la letra ***m***.

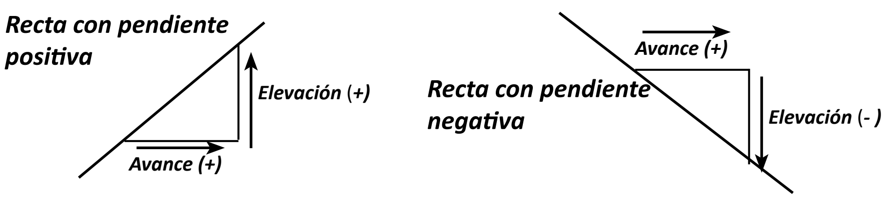


$$pendiente = m = \frac{Elevación}{Avance}=\frac{1800}{2}=\frac{900}{1}=900$$

Además, puede observarse que, lo que hemos denominado "*elevación*", corresponde a un cambio vertical en la gráfica (cambio en distancia), en contraste a avance, que corresponde a un cambio horizontal en la gráfica (cambio en el tiempo). Entonces:

$$pendiente = m = \text{Razón de cambio} = \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

Observación. Aunque utilizamos el término "*elevación*", esta "elevación" es negativa cuando la inclinación de la recta es hacia abajo; en contraste, asumimos que "avance" siempre es positivo.

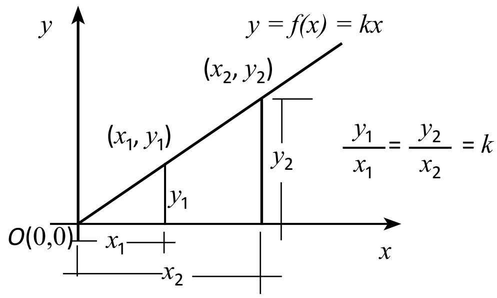


Funciones de variación directa

El ejemplo anterior de la situación del avión, es una función lineal puesto que su gráfica está sobre una recta. Pero ésta función en particular, tiene otra característica especial: pasa por el origen. Funciones como ésta se denominan funciones de variación directa, y, se dice que las variables involucradas, varían directamente proporcional. La variación directa puede definirse en términos de variable de la siguiente manera

Se dice que la variable y es directamente proporcional a la variable x si: $y = kx$

En el ejemplo mencionado, "la distancia recorrida por el avión varía directamente con el tiempo transcurrido según la fórmula $d = 900t$ ó $y = 900x$.



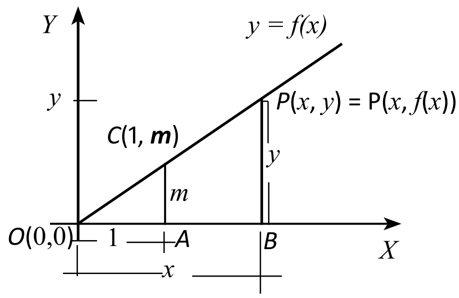
En términos de funciones, una variación directa, es una función, donde la razón entre un número y del rango (número de salida) y el correspondiente número x del dominio (número de entrada), es la misma para todas las parejas de la función.

Es decir, si (x_1, y_1) y (x_2, y_2) son cualesquiera dos pares ordenados de la función, entonces, se cumple que:

$y_1 = kx_1 \rightarrow y_1/x_1 = k$

$y_2 = kx_2 \rightarrow y_2/x_2 = k$, entonces: $\dfrac{y_1}{x_1} = \dfrac{y_2}{x_2}$

Esta es la bien conocida *regla de tres*.



Para encontrar la expresión algebraica de la función en términos de $\boldsymbol{m}$, consideremos la figura de la derecha en la que uno de los puntos tiene por coordenadas $(1, \boldsymbol{m})$, y el segundo punto tiene coordenadas genéricas (x, y):

Puesto que los triángulos OAC y OBP son semejantes, se cumple que: $\dfrac{y}{x} = \dfrac{m}{1}$

Resolviendo para y, obtenemos: $y = mx$. O bien: $f(x) = mx$

Estas son las fórmulas de las funciones de variación directamente proporcional.

A continuación, averiguaremos la fórmula para aquellas funciones que son lineales pero no son de variación directa.

Fórmula de las funciones lineales

Funciones lineales son útiles para modelar muchas situaciones del mundo real. La siguiente actividad explora una situación de este tipo:

Actividad 23

Un vendedor de uniformes, paga $ 26,250 por la compra de 100 uniformes grabados con las iniciales de quien lo compra, y venderá a $350 cada uniforme. (a) Describir en palabras la relación entre *ganancia* y el *número de uniformes vendidos*; (b) ¿Qué patrones puedes encontrar en la manera en la cual una cantidad varía en relación con la otra cantidad?; (c) Escribe una regla o expresión para esta relación; (d) Utiliza un software dinámico para trazar la gráfica de esta función; (e) Traza sobre la gráfica al menos dos triángulos de pendiente y utilízalos para comprobar que la razón de cambio es constante.

Ganancia (total), es una función del número de *uniformes vendidos* y se determina por el ingreso de vender n uniformes a \$350 la pieza, menos el gasto del vendedor (\$26250) al comprar 100 uniformes. Puesto que se empieza con una deuda inicial (inversión) de \$26,250.00, podemos establecer que al tener 0 uniformes vendidos, la ganancia es de -\$26,250.00, y, a partir de ese momento, por cada uniforme vendido, se irá reduciendo esa deuda en \$350.00, hasta llegar a un punto en que realmente empiece a haber ganancias.

+1 → +1 → +1 → +1 → +1 → +1 → +1 → +1 → +1 → +1 →

Uniformes vendidos (n)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Ganancia (G)	-26250	-25900	-25550	-25200	-24850	-24500	-24150	-23800	-23450	-23100	-22750

+350 +350 +350 +350 +350 +350 +350 +350 +350 +350

Por cada uniforme vendido, la ganancia se incrementa en una cantidad constante de \$350.

La razón de cambio es: $\textit{Razón de cambio} = \dfrac{\Delta G}{\Delta n} = \dfrac{\text{Cambio en } G}{\text{Cambio en } n} = \dfrac{350}{1} = 350$

En la siguiente tabla vemos valores de G, para incrementos de n (uniformes vendidos) distintos de 1.

+10 → +10 → +10 → +10 → +10 → +10 → +10 → +10 → +10 → +10 →

Uniformes vendidos (n)	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
Ganancia (G)	-26250	-22750	-19250	-15750	-12250	-8750	-5250	-1750	+1750	+5250	+8750

+350 +350 +350 +350 +350 +350 +350 +350 +350 +350

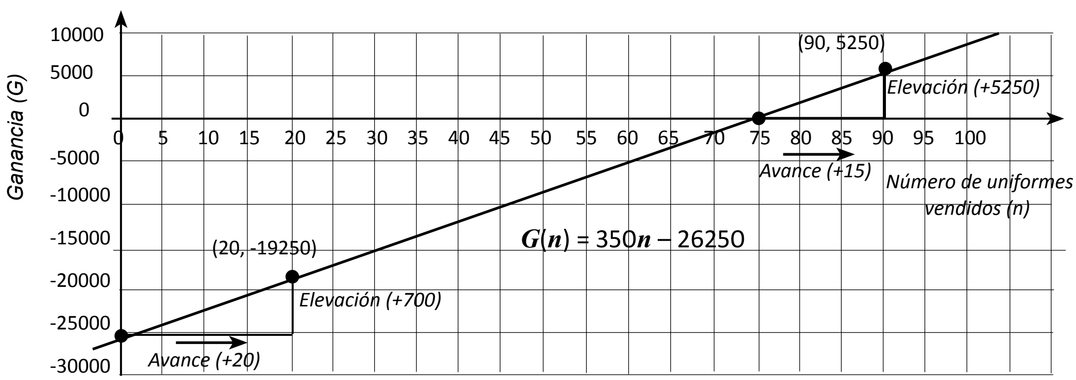
En esta tabla, se aprecia que la ganancia aumenta por una cantidad constante de \$3500 por cada aumento en 10 en el número de uniformes vendidos. Entonces:

$$\text{Razón de cambio} = \frac{\Delta G}{\Delta n} = \frac{\textit{Cambio en } G}{\textit{Cambio en } n} = \frac{3500}{10} = 350$$

Observación. En la tabla que considera variaciones unitarias de n, las diferencias entre valores de G son iguales a la razón de cambio ($350 = 350/1$). Sin embargo, en la otra tabla con variaciones en n distintas de 1, las diferencias (3500), no son iguales a la razón de cambio que sigue siendo 350. Las razones de cambio de una función, son razones, no diferencias.

Para encontrar una expresión algebraica que relacione ganancia con número de uniformes vendidos, debemos tener en cuenta dos cuestiones: primero, por cada uniforme vendido, el grupo recibe \$350. Esta idea se puede representar con $350n$. Segundo, esta expresión no tiene en cuenta los \$26250 de deuda por comprar 100 uniformes; por tanto, necesitamos incluir -\$26250 en la regla de la función, quedando como, $G(n) = 350n - 26250$.

A continuación se presenta una parte de la gráfica de esta función sobre la que se han trazado dos triángulos de pendiente:



Utilizando estos triángulos, la fórmula de la función, y la definición de razón de cambio en notación funcional obtenemos:

Intervalo $[0, 20]$:

$$\textit{pendiente} = m = \text{Razón de cambio} = \frac{\Delta G}{\Delta n} = \frac{G(20) - G(0)}{20 - 0} = \frac{(350(90) - 26250) - (350(0) - 26250)}{20}$$
$$= \frac{7000}{20} = 350$$

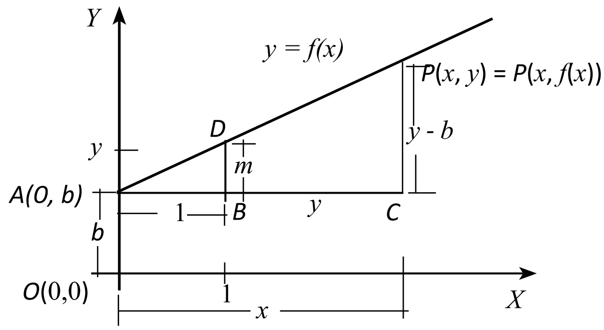
Intervalo $[75, 90]$:

$$\textit{pendiente} = m = \text{Razón de cambio} = \frac{\Delta G}{\Delta n} = \frac{G(90) - G(75)}{90 - 75} = \frac{(350(90) - 26250) - (350(75) - 26250)}{20}$$
$$= \frac{5250}{15} = 350$$

Una vez más, hemos demostrado, que en una función lineal, la razón de cambio puede obtenerse con cualesquiera dos pares de puntos (o cualesquiera dos pares de triángulos de pendiente).

La definición geométrica de funciones lineales, como funciones que yacen sobre una recta, y los conceptos de la semejanza de triángulos, nos permitirán encontrar la fórmula que caracteriza a estas funciones.

Sea $f(x)$ una función cuya gráfica yace sobre una recta. Sea $b = f(0)$ y m la pendiente de la recta; Sea $P(x, y)$ un punto genérico sobre la recta (pero no sobre el eje X). Con base en esta información y teniendo en cuenta que la pendiente m puede ser ilustrada en cualquier triángulo pendiente, podemos dibujar lo siguiente:



Puesto que los triángulos ABD y ACP son semejantes, se cumple que: $\dfrac{y - b}{x} = \dfrac{m}{1}$

Resolviendo para y, obtenemos: $y = mx + b$. Puesto que $y = f(x)$, podemos escribir: $f(x) = mx + b$

Resumiendo:

> Las funciones lineales están caracterizadas por una razón de cambio constante y tienen una fórmula del tipo $f(x) = mx + b$, donde m es la razón de cambio constante (pendiente de la recta), y b es el valor de y cuando $x = 0$ (intersección con el eje Y).

Si $b = 0$, la función lineal contiene al punto $(0, 0)$, y es de variación directa cuya ecuación, ya sabemos que es, $y = mx$.

Ya estamos en condiciones de determinar la expresión algebraica de toda función que sea lineal. Estudia el siguiente ejemplo:

Ejemplo 1

Determina si la función expresada en la tabla de valores de la derecha, es lineal. En caso de que lo sea, determina también su expresión algebraica (regla).

x	y
0	−1
1	4
2	9
3	14
4	19

Solución

	x	y	
	0	−1	
+1 ↓	1	4	$4-(-1)=5$
+1 ↓	2	9	$9-4=5$
+1 ↓	3	14	$14-9=5$
+1 ↓	4	19	$19-14=5$

Puesto que los valores en las entradas, aumentan en una cantidad constante, podemos calcular sobre la tabla, las diferencias en los valores de salida. En esta función, para cada aumento en 1 en la variable independiente, el valor de la variable dependiente aumenta en una cantidad constante. Por lo tanto, estamos en presencia de una función lineal. Entonces, su ecuación es de la forma: $y=f(x)=mx+b$.

Los valores que debemos determinar son el de m (razón de cambio) y el de b (valor de y cuando $x=0$).

Cálculo de m. $m = \text{Razón de cambio} = \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{\textit{Cambio en } y}{\textit{Cambio en } x} = \dfrac{5}{1} = 5$

Determinación de b. Puesto que $y=-1$, cuando $x=0$, entonces, $b=-1$.

Sustituyendo estos valores en $y=f(x)=mx+b$:

$$y=f(x)=5x+(-1).$$
$$y=f(x)=5x-1).$$

- Aspecto a evaluar: *Participación en clase*
- Evidencia: *Trabajo colaborativo*
- Competencia o atributo a evaluar: 8.3

Actividad 24

Representa gráficamente la función anterior, y determina la pendiente a través de un triángulo de pendiente.

Ejemplo 2

Determina si la función expresada en la tabla de valores de la derecha, es lineal. En caso de que lo sea, determina también su expresión algebraica (regla).

x	y
15	62
20	72
25	82
30	92

Solución

	x	y	
	15	62	
+5 ↓	20	72	$72-62=10$
+5 ↓	25	82	$82-72=10$
+5 ↓	30	92	$92-82=10$

Esta función, aunque no presenta aumentos unitarios en los valores de entrada, éstos aumentos son constantes; asimismo, los valores de salida presentan aumentos constantes. Por lo tanto, estamos en presencia de una función lineal. Entonces, su ecuación es de la forma: $y=f(x)=mx+b$.

Cálculo de m. $m = \text{Razón de cambio} = \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{\textit{Cambio en } y}{\textit{Cambio en } x} = \dfrac{10}{5} = 2$

Cálculo de b. En este caso, no conocemos el valor de y cuando $x=0$. Así que, debemos calcularlo.
Puesto que $m=2$, la fórmula "parcial" de esta función es: $y=f(x)=2x+b$.
Pero, ya sabemos que cualesquier par de puntos (x, y) de la función, es solución de su ecuación.
Si escogemos el primer par de valores: $x=15$, $y=62$.
Sustituyendo estos valores en $y=f(x)=2x+b$:

$$62=f(15)=2(15)+b.$$

Despejando a b: $62=2(15)+b.$

$$62-30=b.$$
$$b=32.$$

Sustituyendo este valor en $y=f(x)=2x+b$, obtenemos la fórmula pedida: $y=f(x)=2x+32$

Ejemplo 3

Determina si la tabla de valores de la derecha, corresponde a una función lineal.

x	-1	0	3	5	8
y	3.5	5	6.5	8	9.5

Solución

Revisemos sobre la tabla, las diferencias tanto en x como en y:

$+1 \rightarrow$ $+3 \rightarrow$ $+2 \rightarrow$ $+3 \rightarrow$

x	-1	0	3	5	8
y	3.5	5	6.5	8	9.5

$+1.5$ $+1.5$ $+1.5$ $+1.5$

Esta función, aunque presenta aumentos constantes en los valores de y; ésto no es así para los valores de x. Por lo tanto, esta función podría no es lineal. Calculemos las razones de cambio para verificar ésto:

$$\text{Razón de cambio} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\textit{Cambio en } y}{\textit{Cambio en } x} = \frac{1.5}{1} = 1.5$$

$$\text{Razón de cambio} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\textit{Cambio en } y}{\textit{Cambio en } x} = \frac{1.5}{3} = 0.5$$

No hay necesidad de seguir con estos cálculos; basta con encontrar dos razones de cambio diferentes para concluir que la función no es lineal.

- Aspecto a evaluar: *Participación en clase*
- Evidencia: *Trabajo colaborativo*
- Competencia o atributo a evaluar: 8.3

Actividad 25

1. Determina si la siguiente tabla corresponde a una función lineal. Si lo es, sigue los pasos indicados para encontrar su expresión algebraica.

x	-1	5	9	13	17
y	-3.25	-0.75	1.75	4.25	6.75

a. ¿Es una función lineal?__________¿ Por que?____________________________________

b. La expresión algebraica pedida es de la forma _______________
¿Cuáles son los datos necesarios para establcer la expresión de esta función? _______________
¿Cuál es la razón de cambio de la función? __________
¿Cómo se obtiene b (el intercepto con el eje Y?_________________
Encuentra el valor de b:
La expresión algebraica es:_________________________

2. ¿Cuáles de las siguientes tablas podrían representar funciones lineales? Encuentra la ecuación de aquellas que sí lo sean.

a.

x	0	1	2	3
y	27	25	23	21

b.

u	0	1	2	3
v	5	10	18	28

c.

x	5	9	11	14
y	20	32	44	56

3. En cada caso, grafica la recta que pasa por el punto dado, y que tiene la pendiente dada.

a. $(5, -2)$, $m = 2$ b. $(-2, 4)$, $m = 3/4$ c. $(3, 1)$, $m = -1/3$

d. $(0, 4)$, $m = -3$ e. $(4, 2)$, $m = 0$ f. $(-3, 1)$, sin pendiente.

Hemos explorado funciones lineales e identificados patrones lineales de cambio en tablas, gráficas y expresiones algebraicas. Ahora consideramos otras clases de funciones, cuyas razones de cambio no son constantes. Aunque estas funciones no tienen razones de cambio constantes como funciones lineales, ellas tienen razones de cambio que son predecibles, y ellas pueden usarse para para modelar fenómenos del mundo-real y relaciones matemáticas.

Funciones cuadráticas

Para continuar con el enfoque de covariación, asumiremos que tienes presente la siguiente definición de funciones cuadráticas:

> Las funciones cuadráticas son funciones que se pueden escribir en la forma $y = f(x) = ax^2 + bx + c$ para algunas constantes a, b y c, donde a no es 0.

Con la siguiente actividad, empezaremos a explorar este tipo de funciones.

Actividad 26

Dada la expresión algebraica de tres funciones cuadráticas:

1. Determina una tabla de valores para cada una de ellas.
   ¿Qué observas? ¿Qué destaca? Usa el enfoque de covariación y determina las diferencias entre cada uno de los valores inmediato e inferior. ¿Es una función lineal? ¿Por qué?

a. $y = x^2 + 2$

x	y
−1	
0	
1	
2	
3	
4	

b. $y = 3x^2 + 3x$

x	y
−1	
0	
1	
2	
3	
4	

c. $y = x^2 + 5x + 2$

x	y
−1	
0	
1	
2	
3	
4	

Podrías haber observado que a diferencia de las funciones lineales, aquí, conforme x se incrementa en 1, y se incrementa en una cantidad no constante.

Aunque estas funciones no tienen razones de cambio constantes como funciones lineales, ellas tienen razones de cambio que son predecibles, y ellas pueden usarse para modelar fenómenos del mundo-real y relaciones matemáticas. La siguiente actividad te permitirá avanzar hacia una caracterización que haga predecibles a estas funciones.

- Aspecto a evaluar: *Participación en clase*
- Evidencia: *Trabajo colaborativo*
- Competencia o atributo a evaluar: 8.3

Actividad 27

Ahora, vamos a dar un paso adicional: en los incisos b) y c), determina las segundas diferencias entre cada una de las primeras diferencias. ¿Qué observas?

a. $y = x^2 + 2$

x	y
−1	3
0	2
1	3
2	6
3	11
4	18

Primeras diferencias

−1
+1
+3
+5
+7

Segundas diferencias

$1 - (-1) = 2$
$3 - 1 = 2$
$5 - 3 = 2$
$7 - 5 = 2$

b. $y = 3x^2 + 3x$

x	y	Primeras diferencias	Segundas diferencias
−1	0	0	
0	0	+6	
1	6	+12	
2	18	+18	
3	36	+24	
4	60		

c. $y = x^2 + 5x + 2$

x	y	Primeras diferencias	Segundas diferencias
−1	−2	+ 4	
0	2	+6	
1	8	+8	
2	16	+10	
3	26	+12	
4	38		

Debiste observar que en estas funciones, las primeras diferencias, no son constantes, pero las segundas diferencias, sí son constantes. Este patrón específico de covariación exhibido por estas funciones es característica de las funciones cuadráticas.

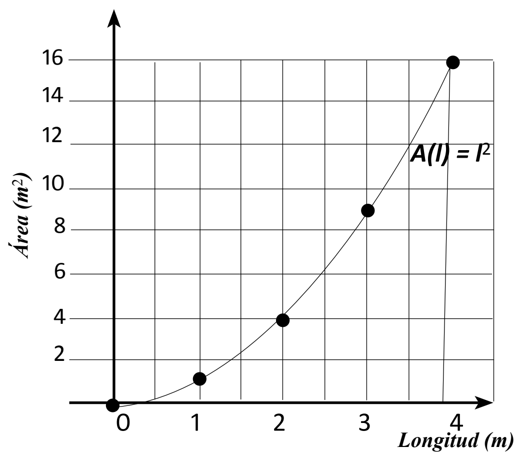
Si los valores de entrada varían en forma constante, y las segundas diferencias en valores de salida son iguales a una constante diferente de cero, entonces, la función es cuadrática.

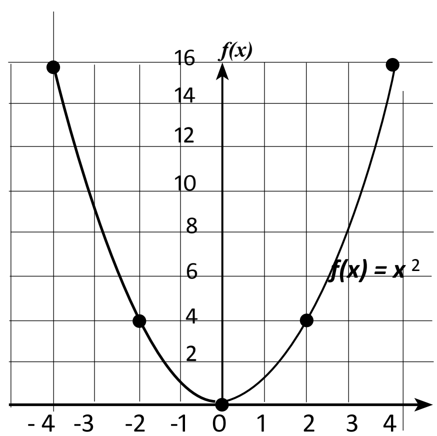
Aún más, en las tablas anteriores, los valores de entrada (valores de x) variaron en una unidad, por lo que las diferencias calculadas, son de hecho razones de cambio, así que podemos asegurar que:

Funciones cuadráticas están caracterizadas por razones de cambio que ellas mismas están cambiando a una razón constante. En otras palabras, en una relación cuadrática, la razón de cambio de la razón de cambio es constante.

Ahora bien, las funciones lineales tienen por gráfica una línea recta, ¿qué tipo de gráfica tendrá una función cuadrática?

En la actividad 15 ya trabajaste con una función cuadrática, a saber $A = l^2$, que describe la relación entre el área de una pared cuadrada y la longitud de su lado. En el contexto particular considerado, sólo valores positivos de l (longitud de los lados) tienen sentido, por lo que la gráfica obtenida sólo debe trazarse en el primer cuadrante, tal y como se muestra a continuación a la izquierda. Sin embargo, ésta gráfica (surgida de un contexto), es parte de la gráfica correspondiente a $y = x^2$, mostrada en la parte derecha:





Desde el punto de vista gráfico, una función cuadrática es aquella que tiene por gráfica una curva denominada parábola. Por tanto, la gráfica de cualquier función con una regla del tipo $f(x) = ax^2 + bx + c$, para a diferente de cero, tiene por gráfica una parábola.

Ya estamos en condiciones de determinar la expresión algebraica de toda función que sea cuadrática. Estudia el siguiente ejemplo.

Ejemplo

Determina la expresión algebraica (regla) de la función representada por los datos de la tabla de la derecha.

x	y
0	5
1	3
2	5
3	11
4	21

Solución

Primero revisemos si la función es cuadrática.

	x	y	Primeras diferencias	Segundas diferencias
	0	5		
+1 ↓			-2	
	1	3		$2-(-2)=4$
+1 ↓			2	
	2	5		$6-2=4$
+1 ↓			$+6$	
	3	11		$10-6=4$
+1 ↓			$+10$	
	4	21		

En esta función, al variar los valores x en forma constante, las segundas diferencias son valores constantes $(+4)$. Por lo tanto, estamos en presencia de una función cuadrática. Entonces, su ecuación es de la forma: $f(x) = ax^2 + bx + c$.

El trabajo ahora, es determinar los valores de a, b y c. Puesto que tenemos tres incógnitas, necesitamos utilizar tres condiciones que se cumplan para esta situación. Cada par ordenado de la tabla puede utilizarse.

De la tabla sabemos que:

$f(0) = 5$, entonces, $f(0) = 5 = a(0)^2 + b(0) + c \rightarrow 5 = c$

$f(1) = 3$, entonces, $f(1) = 3 = a(1)^2 + b(1) + c \rightarrow 3 = a + b + c$

$f(2) = 5$, entonces, $f(2) = 5 = a(2)^2 + b(2) + c \rightarrow 5 = 4a + 2b + c$

Por lo tanto, el problema se reduce a resolver el sistema:

$$\begin{aligned} c &= 5 \quad (1) \\ a + b + c &= 3 \quad (2) \\ 4a + 2b + c &= 5 \quad (3) \end{aligned}$$

→ Sustituyendo (1) en (2) y (3):

$$\begin{aligned} a + b + 5 &= 3 \quad (4) \\ 4a + 2b + 5 &= 5 \quad (5) \end{aligned}$$

Multiplicando (4) por -4 y sumando el resultado con (5)

→
$$\begin{aligned} -4a - 4b &= 8 \\ 4a + 2b &= 0 \\ \hline -2b &= 8 \\ b &= -4 \quad (6) \end{aligned}$$

Sustituyendo (1) y (6) en (2): →

$$\begin{aligned} a + (-4) + 5 &= 3: \\ a &= 2 \end{aligned}$$

→ Por lo tanto, la representación algebraica de esta función es:
$y = f(x) = 2x^2 - 4x + 5$

Funciones cuadráticas son útiles para modelar muchas situaciones del mundo-real. La siguiente actividad explora una situación de este tipo.

- Aspecto a evaluar: *Participación en clase*
- Evidencia: *Trabajo colaborativo*
- Competencia o atributo a evaluar: 8.3

Actividad 28

Se va a realizar un torneo de ajedrez, y uno de los organizadores propone que cada participante salude de mano a cada uno de los otros participantes. Algunos organizadores aprueban esta idea, pero otros piensan que tantos saludos de mano podrían llevar mucho tiempo. Para decidir la cuestión, alguien propuso que se intentara estimar cuantos saludos de mano podrían ocurrir, suponiendo que son 30 los participantes en el torneo. El número total de saludos de mano depende de, o es función de, el número de participantes en el torneo. Resuelve las siguientes cuestiones para determinar cúantos saludos de mano se producen.

a. En la siguiente tabla registra el número de saludos de mano para 2 a 7 participantes.

Número de participantes	2	3	4	5	6	7
Número de saludos de mano						

b. Analiza la función con un enfoque de covariación, empezando por determinar las primeras diferencias:

+1 ⟶ +1 ⟶ +1 ⟶ +31 ⟶

Número de participantes	2	3	4	5	6	7
Número de saludos de mano	1	3	6	10	15	21

Primeras diferencias: +2 ⟶ __ ⟶ __ ⟶ __ ⟶ __

¿La función es lineal?______ ¿Por qué? ____

c. La siguiente opción es indagar si la función es cuadrática; para ello determina las segundas diferencias:

+1 ⟶ +1 ⟶ +1 ⟶ +1 ⟶

Número de participantes	2	3	4	5	6	7
Número de saludos de mano	1	3	6	10	15	21

Primeras diferencias: +2 ⟶ +3 ⟶ +4 ⟶ +5 ⟶ +6 ⟶

segundas diferencias: +1 ⟶ __ ⟶ __ ⟶ __ ⟶

Debiste encontrar que, las segundas diferencias (en otras palabras, las diferencias que muestran el cambio en el cambio) son constantes. Por tanto, esta es una función cuadrática, por lo que su expresión algebraica es de la forma $f(x) = ax^2 + bx + c$.

El trabajo ahora, es determinar los valores de a, b y c. Puesto que tenemos tres incógnitas, necesitamos utilizar tres condiciones que se cumplan para esta situación. Sea x el número de participantes y $f(x)$ el número de saludos de mano.

De la tabla sabemos que:

$f(2) = 1$, entonces, $f(2) = 1 = a(2)^2 + b(2) + c \rightarrow 1 = 4a + 2b + c$

$f(3) = 3$, entonces, $f(3) = 3 = a(3)^2 + b(3) + c \rightarrow 3 = 9a + 3b + c$

$f(4) = 6$, entonces, $f(4) = 6 = a(4)^2 + b(4) + c \rightarrow 6 = 16a + 4b + c$

Por lo tanto, el problema se reduce a resolver el sistema:

$$4a + 2b + c = 1$$
$$9a + 3b + c = 3$$
$$16a + 4b + c = 6$$

La actividad 25 te invita a concluir la resolución de este problema.

- Aspecto a evaluar: *Participación en clase*
- Evidencia: *Trabajo colaborativo*
- Competencia o atributo a evaluar: 8.3

Actividad 29

1. Resuelve el sistema:

$$4a + 2b + c = 1$$
$$9a + 3b + c = 3$$
$$16a + 4b + c = 6$$

2. Sustituye los valores de a, b y c en $f(x) = ax^2 + bx + c$.
3. Evalúa $f(30)$.

   Debes encontrar que f(30) = 435. Por tanto, los 30 participantes producirán 435 saludos de mano.
4. ¿Cuáles de las siguientes tablas podrían representar funciones cuadráticas? Determina la ecuación de aquellas que sí lo sean.

a.

x	2	4	6	8	10
y	1	9	25	49	81

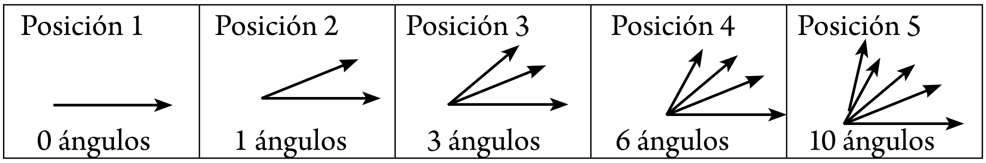
b.

u	1	2	3	6
v	2	5	10	17

c.

x	3	6	9	12
y	10	37	82	145

5. Considerar la serie de ángulos formados por 1, 2, 3, 4 y 5 rayos con un extremo común:



Al considerar el número de posición en la serie como x, variable independiente (valor de entrada), y el número de ángulos formado como y, variable dependiente (valor de salida), se crea una función denominada ángulos, con la siguiente tabla de valores:

x	1	2	3	4	5	n
y	0	1	3	6	10	$f(n)$

Comprueba que esta es una función cuadrática y encuentra su fórmula. ¿Cuántos ángulos forman 10 rayos?

Funciones exponenciales

Otra de las funciones con gran aplicación en la vida real son las funciones exponenciales. La característica que define a estas funciones es que cambian (aumentan o disminuyen) muy rápidamente y no en forma constante como ocurre con las lineales.

Funciones exponenciales modelan varias situaciones del mundo real en que cantidades aumentan o disminuyen en una razón proporcional a la cantidad presente. Crecimiento poblacional sobre el tiempo y depreciación en valor sobre el tiempo son ambos ejemplos de funciones exponenciales. Al igual que las funciones cuadráticas, funciones exponenciales tienen una razón de cambio que no es constante (como una función lineal) sino que cambia. En el crecimiento exponencial, la razón de cambio aumenta sobre el tiempo, pero en decrecimiento exponencial, la razón de cambio disminuye sobre el tiempo.

Definición y caracterización de funciones exponenciales

En ejemplo 2, de la página 51 exploramos una función que resultó ser exponencial. A continuación reproducimos el trabajo realizado con esta función:

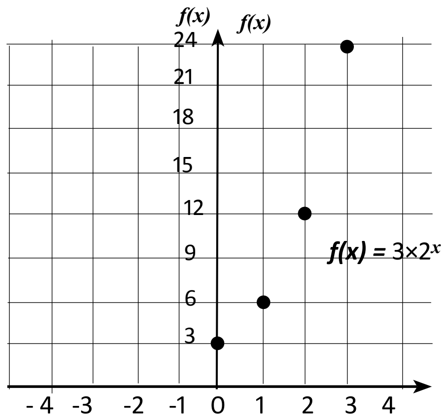
x	y
0	3
1	6
2	12
3	24
4	48
x	¿?

+1 ↓ +1 ↓ +1 ↓ +1 ↓ ×2 ×2 ×2 ×2

$y = f(x) = 3\times2^x$

En la tabla observamos lo siguiente:

- Los valores de x aumentan en 1, y cada valor de y es 2 veces el anterior. Es decir, ésta función presenta un ***aumento multiplicativo constante*** en valores de salida.
- El enfoque por correspondencia nos permitió determinar la expresión algebraica de esta función, a saber, $y = f(x) = 3\times2^x$.
- Puede observarse que el factor por el que se multiplica un valor de y para obtener el siguiente, es la base del exponente x de la ecuación de la función; este factor se denomina ***factor de cambio***.
- El valor de y cuando x es 0, es el coeficiente de dicha ecuación.



En el plano coordenado de la derecha, se han localizado las coordenadas mostradas en la tabla; une los puntos. ¿Qué forma tiene la gráfica: curva o recta? ¿Podría ser una parábola? Utiliza la fórmula $f(x) = 3\times2^x$ que describe a esta función para determinar más puntos que correspondan a valores de x negativos, e inclusive valores decimales tanto positivos como negativos.

La función f definida por $f(x) = 3\times2^x$, para todo número real x se denomina función exponencial con base 2.

Ésta función $f(x) = 3\times2^x$ ***es creciente***, puesto que al movernos de izquierda a derecha, su gráfica sube.

Para reforzar la comprensión de este tipo de fórmula, resuelve la siguiente actividad:

- Aspecto a evaluar: *Participación en clase*
- Evidencia: *Trabajo colaborativo*
- Competencia o atributo a evaluar: 8.3

Actividad 30

La siguiente tabla de datos representa el crecimiento de una planta h, como función del tiempo t. Analiza los datos para encontrar un patrón de comportamiento para esta función; para ello, reflexiona y contesta en las líneas lo que se te pide.

Tiempo t (semanas)	0	1	2	3	4
Altura h (mm)	5	7.5	11.25	16.875	25.3125

a. ¿La tabla dada corresponde a un modelo lineal?________ ¿Por qué?_________________________

b. ¿La tabla dada corresponde a un modelo cuadrático?______¿por qué?_____________________

c. ¿Cómo crece la altura de la planta? ____

d. ¿Qué altura de la planta esperas que haya para la sexta semana?____________________________

e. ¿Qué hiciste para obtener la cantidad anterior? ____

Pudiste haber aplicado el enfoque de covariación y establecer el siguiente comportamiento de las primeras y segundas diferencias:

+1 → +1 → +1 → +1 → +1 →

Tiempo t (semanas)	0	1	2	3	4
Altura h (mm)	5	7.5	11.25	16.875	25.3125

Primeras diferencias: +2.5 +3.75 +5.625 +8.4375

Segundas diferencias: +1.25 +1.875 +2.8125

Por lo tanto, estamos en presencia de una función que no es ni lineal ni cuadrática. Para poder avanzar, en vez de plantear diferencias, analizamos cada altura buscando un factor constante; convéncete que en esta función, cada valor (con excepción del 0^{th}), se obtiene multiplicando el anterior, por el factor constante 1.5, tal y como se observa en la siguiente tabla:

+1 → +1 → +1 → +1 → +1 →

Tiempo t (semanas)	0	1	2	3	4
Altura h (mm)	5	7.5	11.25	16.875	25.3125

×1.5 ×1.5 ×1.5 ×1.5

Para obtener un valor, el valor previo se multiplica por 1.5.

Para encontrar este factor, puedes dividir un valor de salida entre el valor de salida anterior:

$$\frac{\textit{Segundo valor de salida}}{\textit{primer valor de salida}} = \frac{7.5}{5} = 1.5 \qquad \frac{\textit{Tercer valor de salida}}{\textit{Segundo valor de salida}} = \frac{11.25}{7.5} = 1.5$$

$$\frac{\textit{Cuarto valor de salida}}{\textit{Tercer valor de salida}} = \frac{16.875}{11.25} = 1.5$$

t	h
0	5
1	7.5
2	11.25
3	16.875
4	25.3125

Para encontrar h a partir de t, descomponemos los valores de h en factores, utilizando el factor encontrado y tratando de que aparezcan en función de t.

h $\downarrow$ t

5 = ¿?

$7.5 = \quad 1.5\times5 = 5\times1.5^1$

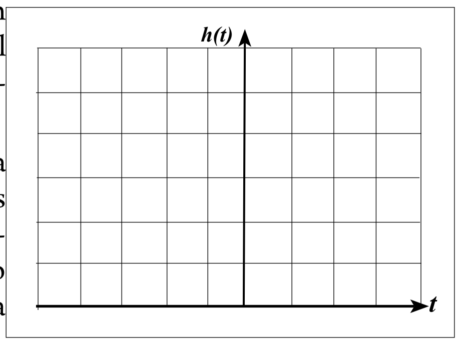
$11.25 = \quad 1.5\times7.5 = 1.5\times1.5\times5 = 5\times1.5^2$

$16.875 = \quad 1.5\times11.25 = 1.5\times1.5\times7.5 = 1.5\times1.5\times1.5\times5 = 5\times1.5^3$

$25.3125 = \quad 1.5\times16.875 = 1.5\times1.5\times11.25 = 1.5\times1.5\times1.5\times7.5 = 1.5\times1.5\times1.5\times1.5\times5 = 5\times1.5^4$

El valor inicial de h puede escribirse: $5 = 5\times1.5^0$ Concluimos que: $h(t) = 5\times1.5^t$

Para obtener esta fórmula $h(t) = 5\times1.5^t$ que describe la altura de una planta, consideramos que los valores de entrada para t eran enteros positivos, pero la fórmula para $h(t)$ tiene sentido inclusive cuando asignamos a t valores que no son enteros. Esta función $h(t) = 5\times1.5^t$, donde t puede tomar todos los números reales, es otro ejemplo de función exponencial. Estas funciones se caracterizan por tener un ***factor de cambio*** constante; es decir, podemos identificar un número que al multiplicarlo por un valor presente obtenemos el siguiente valor. Es por eso que estas funciones cambian muy rápidamente.



Traza la gráfica de esta función, en el plano coordenado de la derecha. Utiliza su fórmula $h(t) = 5\times1.5^t$ para determinar más puntos que correspondan a valores de t negativos; si lo consideras necesario, también utiliza valores decimales para t tanto positivos como negativos. Esta función, al igual que la discutida anteriormente, también es creciente.

A continuación realiza la siguiente actvividad que te permitirá explorar una función exponencial decreciente.

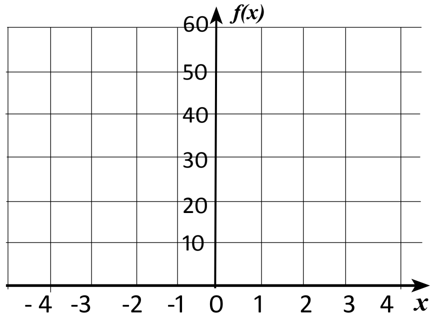
- Aspecto a evaluar: *Participación en clase*
- Evidencia: *Trabajo colaborativo*
- Competencia o atributo a evaluar: 8.3

Actividad 31

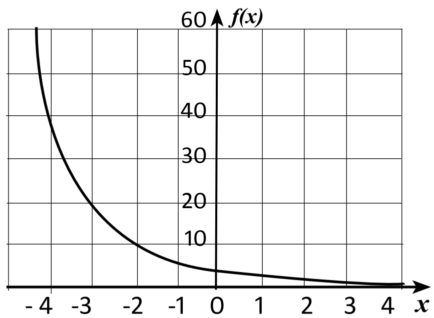
Analiza la siguiente representación tabular que corresponde a una función exponencial. (a) Calcula su factor de cambio, (b) Determina su ecuación, (c) Traza su gráfica, ¿Es creciente o decreciente?

+1 → +1 → +1 → +1 → +1 → +1 → +1 → +1 → +1

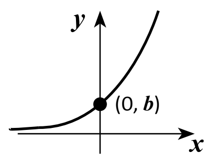
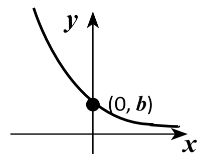
x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	96	48	24	12	6	3	1.5	0.75	0.375



Tu análisis debe permitirte establecer que esta función (cuya gráfica se muestra a la derecha), es decreciente, y que tiene por fórmula, $y = f(x) = 3\left(\frac{1}{2}\right)^x$



En general, se puede definir una función cuyo dominio es R y el rango es el conjunto de los números reales positivos, tal y como se muestra a continuación:

Concepto	Definición	Gráfica de f para $a > 1$	Gráfica de f para $0 < a < 1$
Función exponencial f con base a e intercepto con y en $(0, b)$	$y = f(x) = ba^x$ para toda x en R, donde $a > 0$ y $a \neq 1$.		

Las gráficas anteriores, muestran que si $a > 1$, entonces f es creciente en todo el dominio, y, el eje X es una asíntota horizontal. Si $0 < a < 1$, entonces f es decreciente en el dominio, con el eje X también como asíntota horizontal.

Conviene aclarar por qué excluimos los casos $a \leq 0$ y $a = 1$. Si $a < 0$, entonces a^x no es un número real para mucho valores de x como por ejemplo:

$$(-3)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{-3} = \text{no es real}$$

$$(-3)^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{(-3)^3} = \text{no es real}$$

Si $a = 0$, entonces, $a^0 = 0^0$ no está definido.
Si $a = 1$, entonces, $y = b(1)^0 = b$; representa a una recta horizontal.

En la fórmula $y = f(x) = ba^x$ de una función exponencial, el parámetro b es el intercepto con el eje Y (el valor de y cuando $x = 0$), al que llamaremos valor inicial, y, el parámetro a se llama base de la función y representa el *factor de cambio* de la función.

Intercepto con y

$$y = f(x) = ba^x$$

Factor de cambio

Trazo de gráficas de funciones exponenciales

Ejemplo

Trazar la gráfica de $y = f(x) = 2\left(\frac{3}{2}\right)^x$

Solución

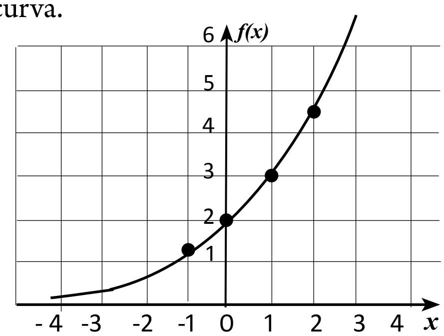
La gráfica es de la forma $y = f(x) = ba^x$. Con a > 0; por lo tanto, representa a una función exponencial creciente, con intercepto $(0, 2)$ y asíntota horizontal en el eje X. Con esta información, basta con determinar dos o tres puntos adicionales para un trazo confiable de la curva.

Sea: $x = -1; \rightarrow f(-1) = 2\left(\frac{3}{2}\right)^{-1} = 2\left(\frac{2}{3}\right) = 1.3.$

La curva pasa por $(-1, 1.3)$

Sea: $x = 1; \rightarrow f(1) = 2\left(\frac{3}{2}\right)^{1} = 2\left(\frac{3}{2}\right) = 3.$ La curva pasa por $(1, 3)$

Sea: $x = 2; \rightarrow f(2) = 2\left(\frac{3}{2}\right)^{2} = \frac{9}{2} = 4.5.$ La curva pasa por $(2, 4.5)$



- Aspecto a evaluar: *Participación en clase*
- Evidencia: *Trabajo colaborativo*
- Competencia o atributo a evaluar: 8.3

Actividad 32

Traza las gráficas de las siguientes funciones exponenciales:

a. $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ b. $f(x) = 2\left(\frac{1}{2}\right)^x$ c. $f(x) = 1.5\left(\frac{4}{3}\right)^x$

Debemos tener claro, que el ***factor de cambio***, no es la ***razón de cambio*** que hemos venido trabajando, y, puesto que la naturaleza de la razón de cambio de una función, determina el tipo de fórmula que tiene, a continuación revisaremos qué lugar ocupa la razón de cambio en las funciones exponenciales. Para ello, volveremos a revisar en la actividad siguiente, el caso de una función lineal, y posteriormente la función exponencial.

- Aspecto a evaluar: *Participación en clase*
- Evidencia: *Trabajo colaborativo*
- Competencia o atributo a evaluar: 8.3

Actividad 33

Da un argumento de por qué la razón de cambio de esta función lineal es 3, y a continuación verifica la validez de las siguientes afirmaciones:

x	$y = 3x + 1$	
0	1	
1	4	$\rightarrow f(1) - f(0) = 4 - 1 = 3$
2	7	$\rightarrow f(2) - f(1) = 7 - 4 = 3$
3	10	$\rightarrow f(3) - f(2) = 10 - 7 = 3$
4	13	$\rightarrow f(4) - f(3) = 13 - 10 = 3$
n	$y = 3n + 1$	$\rightarrow f(n) - f(n-1) = 3$

Ahora bien, puesto que los cálculos anexados a la tabla, se refieren a entradas con 1 unidad de diferencia, el valor 3, constante en cada diferencia entre un valor de salida y el anterior, es también la razón de cambio de la función; por lo tanto, podemos asegurar que para toda función lineal, con valores de entrada variando uno a uno, se cumple que:

$$f(n) - f(n-1) = \textit{Razón de cambio}$$

Ahora, haremos un análisis parecido al anterior, para la tabla de una función exponencial. Debes convencerte que el factor de cambio de esta función es 3, y a continuación verifica la validez de las siguientes afirmaciones:

x	y
0	5
1	15
2	45
3	135
4	405
n	¿?

×3 ×3 ×3 ×3

$\rightarrow f(1) - f(0) = 15 - 5 = 10 = 2(5)$

$\rightarrow f(2) - f(1) = 45 - 15 = 30 = 2(15)$

$\rightarrow f(3) - f(2) = 135 - 45 = 90 = 2(45)$

$\rightarrow f(4) - f(3) = 405 - 135 = 270 = 2(135)$

$\rightarrow f(n) - f(n-1) = 2f(n-1)$

Al igual que en la función anterior, los valores de entrada varían de uno en uno, y por lo tanto, cada diferencia entre un valor de salida y el anterior, es también la razón de cambio de la función; Además, se observa que esta razón de cambio es 2 veces el valor de salida anterior al tiempo evaluado. En otras palabras, ***la razón de cambio de esta función, es proporcional a la población***, con constante de proporcionalidad 2. Esta constante se denomina ***tasa*** o ***ritmo*** con el que la función aumenta (cuando es creciente), o disminuye (cuando es decreciente).

Ahora bien, si lo que se necesita para establecer la ecuación de una función exponencial es el factor de cambio, ¿qué papel juegan la *razón de cambio* y la denominada *tasa de variación*?

Si lo que tenemos como información es una tabla de valores (como en los ejemplos precedentes), lo que procede es determinar el factor de cambio, pero, lo más común es que se nos proporcione la tasa o ritmo con el que la función aumenta o disminuye, tal y como se muestra en el siguiente ejemplo.

Ejemplo

En el 2015, el Instituto Nacional de Estadística y Geografía reportó que la población de nuestro país alcanzó 119.5 millones de habitantes con una tasa de crecimiento promedio de 1.4 % anual en los últimos cinco años. Con esta tasa, estimar la población para 2016 y 2017.

Solución

Podemos considerar que la fecha actual es $t = 0$, la de 2016 es $t = 1$, y la de 2017 es $t = 2$, y construir la siguiente tabla:

t (años)	P(millones)
0	119.5
1	¿?
2	¿?

$\rightarrow$ Población actual: $P = 119.5$

$\rightarrow$ Población al pasar 1 año: $P = 119.5 + 1.4\%(119.5) = 119.5 + 0.014(119.5) = 119.5 + 1.67 = 121.2$

$\rightarrow$ Población al pasar 2 años: $P = 121.2 + 1.4\%(121.2) = 121.2 + 0.014(121.2) = 121.2 + 1.767 = 122.9$

t (años)	P(millones)
0	119.5
1	121.2
2	122.9

$\rightarrow P = 119.5$

$\rightarrow P = 119.5 + 1.4\%(119.5) = 119.5 + 0.014(119.5) = 119.5(1 + 0.014) = 119.5\,(\mathbf{1.014}) = 121.2$

$\rightarrow P = 121.2 + 1.4\%(121.2) = 121.2 + 0.014(121.2) = 121.2(1 + 0.014) = 121.2\,(\mathbf{1.014}) = 122.9$

Resuelve: ¿Cuál será la población para $t = 3$? ______________________________

La fórmula de esta función es: ________________

Así que, la cantidad en negritas nos indica que, si la población de un cierto año la multiplicamos por 1.014 se obtendrá la población del siguiente año. Es decir, el factor de cambio de esta función es 1.014.

Resuelve: Para esta función, la tasa de variación es 0.014, y su factor de cambio es 1.014, ¿qué relación hay entre ellos? ___________________________________

El análisis anterior, nos permite llegar a la siguiente conclusión:

Si una función exponencial creciente tiene una tasa de crecimiento de r % cada año, el factor de cambio se obtiene sumando una unidad a esa tasa anual. Similarmente, si la función es decreciente, el factor se obtiene restando esa tasa de la unidad. Es decir,

Factor de cambio = $1 + r$ Si la función es creciente
Factor de cambio = $1 - r$ Si la función es decreciente

Ejemplo

El número de bacterias de un cultivo aumenta 10% por minuto. Si inicialmente hay 1000 bacterias, plantea una fórmula que permita determinar el número de bacterias (B) en función del tiempo. ¿Cuántas habrá luego de tres minutos?

Solución

La información "aumenta 10% por minuto", significa que estamos en una situación de crecimiento exponencial. Por lo tanto, la ecuación a usar es: $f(x) = ba^x$.

De esta misma información, concluimos que la función tiene una tasa de crecimiento igual a 10%. Por lo tanto, el factor de cambio a es igual a: $1 + 0.20 = 1.20$.

La información "inicialmente hay 1000 bacterias", nos indica que el valor inicial b es igual a 1000. Por lo tanto, la ecuación que permite determinar el número de bacterias en función de tiempo es:

$$B(t) = 1000(1.20)^t.$$

La cantidad de bacterias que habrá después de 3 minutos será:

$$B(3) = 1000(1.20)^3 = 1000(1.728) = 1728 \text{ bacterias}$$

- Aspecto a evaluar: *Participación en clase*
- Evidencia: *Trabajo colaborativo*
- Competencia o atributo a evaluar: 8.3

Actividad 34

a. El censo 2010 muestra que cierta región tiene una población de 40,000 personas. Científicos sociales predicen que esta región experimentará una tasa de crecimiento de 5.5% al año. Sea P la función tal que $P(t)$ es la población predicha para esta región. Determina la fórmula para esta función, y, encuentra la población que habrá en 2020 si la tasa de crecimiento no cambia.

Establecer la fórmula de una función exponencial en la que los valores de entrada no cambian de uno en uno

El uso de la fórmula $f(x) = ba^x$, sólo es válido si los valores de la variable independiente varían de uno en uno. Cuando éste no sea el caso, el factor de cambio es afectado por un exponente. Para que este exponente se manifieste, *no debemos sustituir directamente* en $f(x) = ba^x$, dicho factor de cambio, sino proceder tal y como se indica en el siguiente ejemplo:

En la tabla siguiente se muestra una función que es exponencial con factor de cambio igual a 5. determinar su ecuación

x (años)	0	2	4	6
y (población en millones)	3	15	75	375

+2, +2, +2

×5, ×5, ×5

Puesto que la función es exponencial, la ecuación a usar es $f(x) = ba^x$.

De la tabla observamos que $b = 3$ (valor de y para $x = 0$). Entonces, podemos escribir: $f(x) = 3a^x$

La tabla también nos indica que el factor de cambio es 5, pero los valores de x no cambian de uno en uno, sino de dos en dos. Ésto nos impide sustituir directamente el 5 en la fórmula, por lo que procedemos como se indica a continuación:

Ya sabemos que la ecuación buscada tien la formar: $f(x) = 3a^x$

Pero, también conocemos tres pares de coordenada (x, y) que deben satisfacer esa ecuación.

Si elegimos $x = 2$, y su respectiva imagen $y = 15$, entonces se debe cumplir que:

$$f(2) = 15 = 3a^2$$

Despejando a: $15 = 3a^2$ $\quad 5 = a^2$

$\frac{15}{3} = a^2$ $\quad (5)^{1/2} = a \rightarrow$ Éste es el valor de a que debe sustituirse en la fórmula original $f(x) = ba^x$

Por lo tanto, la ecuación buscada es: $f(x) = 3((5)^{1/2})^x = 3\times5^{x/2}$, en general, podemos concluir: En una función exponencial con valor inicial b y factor de cambio a, si los valores de x cambian de n en n, la función queda expresada de la forma $f(x) = ba^{x/n}$.

A continuación resolveremos algunos ejemplos que consisten en determinar la fórmula o modelo de funciones exponenciales.

Ejemplo

A partir de la siguiente representación tabular que corresponde a la evolución de cierta población, determina la fórmula de la función.

x (años)	0	20	40	60
y (población en millones)	5	15	45	135

Solución

Primero debemos identificar qué tipo de función es; veamos si es lineal:

x (años)	0	20	40	60
y (población en millones)	5	15	45	135

+20, +20, +20

+10, +30, +90

Razones de cambio: $\frac{10}{20} \neq \frac{30}{20} \neq \frac{90}{20}$

La función presenta razones de cambio de distinto valor. Por lo tanto, la función no es lineal.
Revisemos si la función presenta un factor de cambio constante:

$$\text{Factor de cambio: } \frac{15}{5} = \frac{45}{15} = \frac{135}{45} = 3$$

La función presenta al 3 como un factor de cambio constante. Por lo tanto, ésta función es exponencial. Ahora bien, puesto que los valores de entrada varían de 20 en 20, no debemos usar la ecuación $f(x) = ba^x$, sino ecuación modificada, $f(x) = ba^{x/n}$.

Los datos que necesitamos conocer son, b, a y n. En este caso, la información proporcionada nos permite establcer de manera directa estos valores, a saber: $b = 5$, $a = 3$ y $n = 20$.

Entonces, la ecuación de esta función es: $f(x) = 5(3)^{x/20}$:

De esta forma queda indicado que el factor de cambio de la población es cada 20 años.
Sin embargo, aplicando leyes de exponentes, podemos escribir $f(x) = 5(3^{1/20})^x$; Elevando 3 al exponente 1/20, la ecuación queda expresada como $f(x) = 5(1.056467)^x$. Esta expresión, ya presenta un factor de cambio para valores de salida que pueden obtenerse cuando los valores de entrada varían de uno en uno.

- Aspecto a evaluar: *Participación en clase*
- Evidencia: *Trabajo colaborativo*
- Competencia o atributo a evaluar: 8.3

Actividad 35

En la tabla adjunta, se muestra el crecimiento de la población de cierta ciudad, el cual ha sido exponencial en el periodo de 1990 a 2015.

Año	2010	2015
Habitantes	345,291	1,536,723

a. Plantea una fórmula para esta población en función del tiempo.
b. De continuar esa tendencia ¿cuál será la población en 2020?

Funciones logarítmicas

Las funciones logarítmicas tienen amplias aplicaciones, pero en el presente estudio sólo atenderemos los aspectos que son necesarios para complementar algunos cálculos implicados en las funciones exponenciales.

¿Qué es un logaritmo?

Iniciemos resolviendo la ecuación: $2^x = 32$

Para calcular el valor de x, contestemos la pregunta: ¿a qué exponente hay que elevar la base 2 para obtener el número 32? La respuesta es 5 puesto que: $2^5 = 32$

Éste número $x = 5$, recibe el nombre de ***logaritmo base*** 2 de 32 y se denota por: $5 = \log_2 32$

Ejemplo

Resolver $10^x = 10{,}000$

Solución

La respuesta es $x = 4$ puesto que: $10^4 = 10{,}000$

Éste número $x = 4$, recibe el nombre de ***logaritmo base*** 10 de 10,000 y se denota por: $4 = \log 10{,}000$

Observación: ¿Por qué no se escribe $4 = \log_{10} 10{,}000$? Porque cuando se trata de la base 10 ésta no se escribe. Por tanto, siempre que veamos escrito ***log n***, debemos sobreentender que la base es 10.

$$\log n = \log_{10} n$$

- Aspecto a evaluar: *Participación en clase*
- Evidencia: *Trabajo colaborativo*
- Competencia o atributo a evaluar: 8.3

Actividad 36

Revisa las siguientes proposiciones que se refieren a notación logarítmica, e interpreta su significado en términos de exponentes. Sigue el ejemplo.

Ejemplo: $log_5 u = 2 \rightarrow$ Significa: "el exponente al que hay que elevar la base 5 para obtener u es 2; es decir, la notación $log_5 u = 2$, es equivalente a $5^2 = u$".

$log_b 8 = 3 \rightarrow$ Significa: ____

$r = log_p q \rightarrow$ Significa: ____

$w = log_4(2t + 3) \rightarrow$ Significa: ____________________________________

$log\, x = 3z \rightarrow$ Significa: ____

Dada una ecuación exponencial, despejar su exponente

En los ejemplos previos en los que se pedía el valor de un exponente x, no hubo necesidad de despejar x. Sin embargo, ¿cómo resolver por ejemplo la ecuación $3^x = 25$?

Es aquí donde aplicaremos los logaritmos. Para ello, razonamos en forma inversa a como se hizo en la actividad previa: es decir, debemos pasar de la forma exponencial a la logarítmica.

Ejemplo

Resolver $10^x = 25$

Solución

Razonando en función de la notación logarítmica, procedemos como sigue:
Puesto que el exponente es el logaritmo, la base es 10 y lo que debe obtenerse es 25, ecribimos:

$$x = log_{10} 25.$$

Pero, aquí la base es 10, así que escribimos: $x = log\, 25$. Leemos: "x es el logaritmo base 10 de 25".
Ahora bien, ¿cómo determinamos el valor de $log\, 25$?
Debemos usar una calculadora científica, en la que, para determinar $log\, 25$, pulsamos las siguientes teclas:

$$\boxed{log}\ \boxed{25}\ \boxed{=}$$

Y obtenemos: 1.398.
Entonces, el valor de x en $10^x = 25$ es $x = 1.398$.
Este procedimiento, que se basa en la equivalencia entre logaritmos y exponentes, puede cambiarse por uno que consiste en la aplicación de la siguiente propiedad, que nos permite "bajar" el exponente convirtiéndolo en coeficiente:

$$\boxed{log_a (u^c) = c\, log_a u}$$

Argumentación:	Sea $r = log_a u$	
	Entonces, $a^r = u$	Interpretación de logaritmo como exponente
	$u^c = (a^r)^c$	Elevando ambos lados a la potencia c.
	$u^c = a^{cr}$	Propiedad de exponentes.
	$log_a(u^c) = log_a (a^{cr})$	Extraer log_a a ambos lados
	$log_a(u^c) = cr$	Interpretación del significado de logaritmo.
	$log_a(u^c) = c\, log_a u$	Definición de r.

Ejemplo 1

Despejar x, de $5^x = N$

Solución

Extrayendo *log* a ambos lados: $log\,(5^x) = log\,N$

$x log\,5 = log\,N$ *Propiedad de logaritmos*

$x = \dfrac{log\,N}{log\,5}$ *Dividiendo ambos lados entre log 5*

Ejemplo 2

Despejar $10^x = 16$

Solución

Extrayendo *log* a ambos lados: $log\,(10^x) = log\,16$

$x log\,10 = log\,16$ *Propiedad de logaritmos*

$x = \dfrac{log\,16}{log\,10}$ *Dividiendo ambos lados entre log 5*

$x = \dfrac{1.204}{1} = 1.204$

Ejemplo 3

Mil truchas, cada una de ellas de 1 año, se introducen en un gran estanque. Se pronostica que el número de $N(t)$ todavía vivas después de t años estará dada por la ecuación $N(t) = 1000(0.9)^t$. ¿En qué tiempo 500 truchas estarán vivas?

Solución

De la ecuación $N(t) = 1000(0.9)^t$, sabemos que $N(t) = 500$, y se nos pregunta cuál es valor de t para que se cumpla dicha cantidad.

El problema se reduce a resolver la ecuación:

$500 = 1000(0.9)^t$

$\dfrac{500}{1000} = 0.9^t$

$0.5 = 0.9^t$

Extrayendo *log* a ambos lados:

$log\,0.5 = log\,(0.9^t)$

$log\,0.5 = t\,log\,(0.9)$

$\dfrac{log\,0.5}{log\,0.9} = t$

$\dfrac{-0.301}{-0.046} = t$

$t = 6.54$. Por lo tanto, en el estanque habrá 500 truchas en 6.54 años

- Aspecto a evaluar: *Participación en clase*
- Evidencia: *Trabajo colaborativo*
- Competencia o atributo a evaluar: 8.3

Actividad 37

1. Resolver las ecuaciones siguientes:

   a. $2^{x+1} = 3^x$ b. $7^{2x-1} = 4^{3x-2}$ c. $2.97^x = 2.71^{x+2}$

2. Resolver los sistemas de ecuaciones siguientes:

   a. $\begin{cases} 5^{2x+3y} = 120 \\ 2^{3x+5y} = 30 \end{cases}$ b. $\begin{cases} 13^{4x-y} = 15 \\ 7^{5x-y} = 50 \end{cases}$

3. Cien renos, cada uno de ellos de 1 año de edad, se introducen en una reserva de caza. El número $N(t)$ vivos después de t años se pronostica que es $N(t) = 100(0.9)^t$. Estima el número de animales vivos después de: (a) 1 año; (b) 5 años; (c) 10 años.

4. Con la información del problema anterior, contesta: ¿Cúantos años deben pasar para que haya 10 animales vivos?

Cerraremos esta introducción a los logaritmos con la definición de función logarítmica y el trazado de su gráfica.

Sea a un número real positivo diferente de 1. La ***función logarítmica*** se define como

$y = f(x) = log_a x$ si y sólo si $x = a^y$

para toda $x > 0$ y todo número real y.

Gráfica de la función logarítmica

Para poder determinar una tabla de valores, necesitamos utilzar una calculadora; sin embargo, puesto que ésta sólo trabaja en base 10, necesitamos una propiedad que nos cambie cualquier base a una base 10. Ésta propiedad es la siguiente:

Si $u > 0$ y si a y b son número real positivo diferente de 1, entonces $log_b u = \frac{log_a u}{log_a b}$

Argumentación:

Sean las siguientes proposiciones equivalentes

$$w = log_b u \qquad y \qquad b^w = u$$

entonces podemos establecer que:

$b^w = u$	Enunciado
$log_a(b^w) = log_a(u)$	Extraer log_a a ambos lados
$wlog_a(b) = log_a(u)$	Propiedad de logarimtos
$w = \frac{log_a u}{log_a b}$	Dividiendo entre $log_a b$
$log_b u = \frac{log_a u}{log_a b}$	Sustituyendo el valor de w

Ejemplo

Traza la gráfica de $y = f(x) = log_2 x$.

Solución

Tabulemos algunos puntos (tener en cuenta que la calculadora no nos proporciona logaritmos para bases diferentes de 10, y aquí la base es 2). Los cálculos y la gráfica se muestran a continuación.

x	1	2	3	4	5
$f(x)$	0	1	1.6	2	

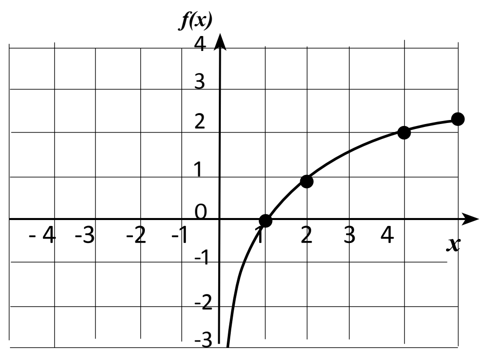
$$log_2 1 = \frac{log 1}{log 2} = \frac{0}{0.30} = 0$$

$$log_2 2 = \frac{log 2}{log 2} = \frac{0.30}{0.30} = 1$$

$$log_2 3 = \frac{log 3}{log 2} = \frac{0.48}{0.30} = 1.6$$

$$log_2 4 = \frac{log 4}{log 2} = \frac{0.60}{0.30} = 2$$

$$log_2 5 = \frac{log 5}{log 2} = \frac{0.70}{0.30} = 2.3$$



- Aspecto a evaluar: *Participación en clase*
- Evidencia: *Trabajo colaborativo*
- Competencia o atributo a evaluar: 8.3

Actividad 38

a. En la gráfica anterior, verifica que $x = 0$ es una asíntota vertical de $y = f(x) = log_2\, x$.

b. En el mismo plano en el que dibujaste la gráfica de $y = f(x) = log_2\, x$, traza las gráficas de $y = f(x) = 2^x$ y la de $y = f(x) = x$. ¿Qué observas?

c. Ahora, en el mismo plano traza la gráfica de $y = f(x) = x^2$, en el domino $[0, \infty)$, la de $f(x) = +\sqrt{x}$ y la gráfica de $f(x) = x$. ¿Qué observas?

Debe llamarte la atención, que las función $f(x) = log_2\, x$, es un reflejo de $f(x) = 2^x$ sobre la recta dada por $f(x) = x$, y también que la gráfica de $f(x) = x^2$ es un reflejo de $f(x) = +\sqrt{x}$ sobre la recta $f(x) = x$..

Las funciones que cumplen con esta propiedad, se llaman ***funciones inversas***. Así, las funciones $f(x) = log_2\, x$, y $f(x) = 2^x$ son funciones inversas. También $f(x) = x^2$ es inversa de $f(x) = +\sqrt{x}$.

- Aspecto a evaluar: *Participación en clase*
- Evidencia: *Trabajo colaborativo*
- Competencia o atributo a evaluar: 8.3

Actividad 39

1. Mediante tabulación, traza las gráficas en el mismo plano coordenado las siguientes funciones:
   a. $f(x) = log_3\, x$, y $f(x) = 3^x$ b. $f(x) = log\, x$, y $f(x) = 10^x$ c. $f(x) = log_4\, x$, y $f(x) = 4^x$
2. Utilizando las gráficas que obtuviste del inciso a, y el método de las transformaciones, de la sección 1.4, traza las gráficas de las siguientes funciones:
   a. $f(x) = log_3\,(x + 2)$; b. $f(x) = 3^{x+1}$; c. $f(x) = log(x - 1)$;
   d. $f(x) = 10^{x-1}$; e. $f(x) = log_4\,(x + 1)$; f. $f(x) = 4^{x+1}$
3. Utilizando el software Desmos, traza las gráficas de todas las funciones de la actividad anterior, y verifica si las que tu obtuviste, coinciden con las trazadas con el software.

1.6 Interpretación de gráficas cartesianas

Para la interpretación de gráficas funcionales, podemos guiarnos con las siguientes cuatro preguntas y sus respectivas acciones:

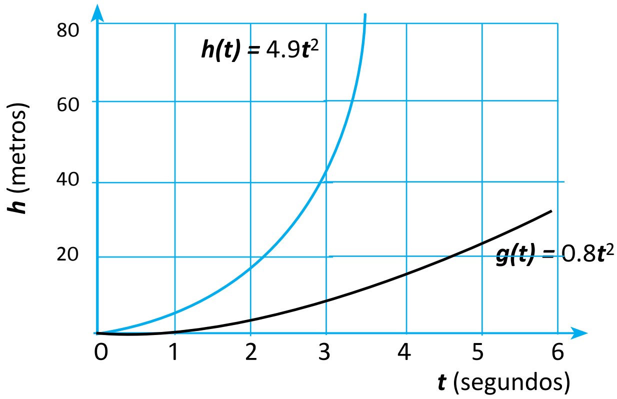
1) *¿Qué cambia?* Para responder, debemos: identificar variables, ubicar puntos en el plano y determinar los intervalos de variación.
2) *¿Cuánto cambia?* Se requiere hacer comparaciones y operaciones entre valores de entrada y valores de salida de la función y atender la covaración entre los cambios.
3) *¿Cómo cambia?* Ésto se determina estableciendo el crecimiento y decrecimiento de la gráfica.
4) *¿Qué tan rápido cambia?* Para contestar, debemos tener en cuenta la razón de cambio promedio de la variable dependiente en relación con la independiente.

Ejemplo

En la ilustración adjunta, se han graficado las funciones $h(t) = 4.9t^2$ y $gt = 0.8t^2$ que describe la caída libre de los cuerpos en la superficie terrestre, y en la supeficie lunar respectivamente. Supóngase que dos cuerpos se dejan caer simultáneamente tanto en la Tierra como en la Luna. ¿Cuál de ellos cae con mayor rapidez?

Solución

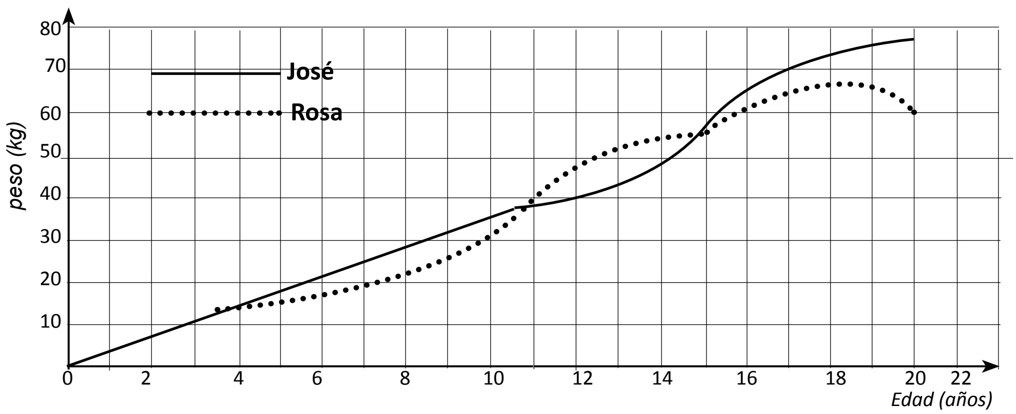
Se puede observar que en intervalos iguales de tiempo, los cuerpos recorren mayor distancia en la superficie terrestre; en otras palabras, la razón de cambio d/t con la que caen los cuerpos es mayor en la Tierra que en la Luna.



- Aspecto a evaluar: *Participación en clase*
- Evidencia: *Trabajo colaborativo*
- Competencia o atributo a evaluar: 8.3

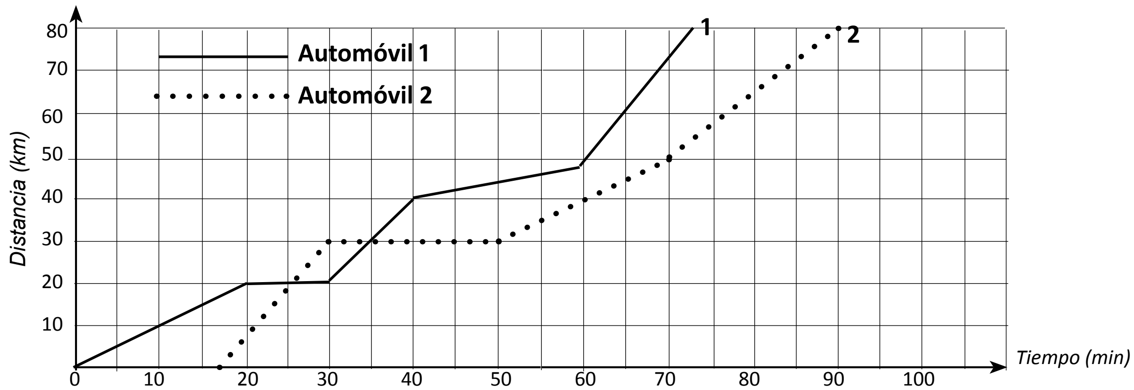
Actividad 40

1. En la siguiente gráfica se muestra la evolución del peso de un joven y una joven hasta los veinte años. Contesta las siguientes preguntas:



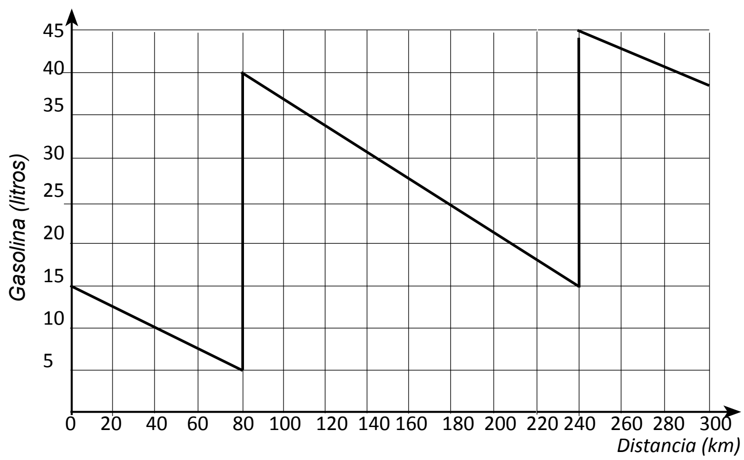
a. ¿Cuál era el peso de José a los nueve años? ¿y el de Rosa a los diecisiete?
b. ¿A qué edad José pesaba 50 kg? ¿y Rosa 20 kg?
c. ¿Cuándo José pesaba menos de 50 kg? ¿y Rosa menos de 30kg?
d. ¿Cuándo José pesaba más que Rosa? ¿Cuándo pesaban igual?
e. ¿Cuál fue el aumento de peso de Rosa entre los diez y los quince años?
f. ¿Cuál fue el aumento promedio por año en el periodo anterior?
g. ¿Cuándo aumentó Rosa más rápidamente de peso? ¿y José?

2. La siguiente gráfica muestra la distancia recorrida por dos automóviles al realizar el mismo viaje de 80 km. Contesta las siguientes preguntas:



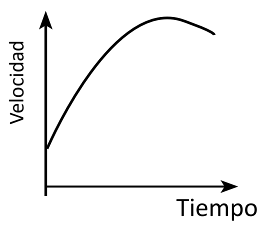
a. ¿A qué hora salió cada coche? ¿Cuál llegó antes? ¿Cuál invirtió mayor tiempo en realizar el recorrido?
b. ¿Cuánto tiempo estuvo parado cada coche? ¿En qué km se detuvieron?
c. ¿Cuándo la velocidad del primer coche fue mayor? ¿Y la del segundo?

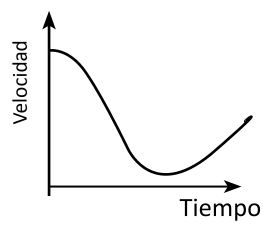
3. La siguiente gráfica representa la cantidad de gasolina que hay en el depósito de un coche a lo largo de un viaje de 300 km.



a. ¿Cuántos litros tenía el depósito a la salida?
b. ¿En qué kilómetro se encontraba cuando tenía 10 litros? ¿Y cuándo tenía el depósito más lleno?
c. ¿Qué sucedió en el km 80? ¿Y en el 240?
d. ¿Cuándo puso más gasolina?
e. ¿Cuántos litros gastó durante el viaje? ¿Cuándo gastó más gasolina?
f. ¿Cuál fue el consumo medio (litros por cada 100 km) en este viaje?
g. ¿Se puede saber el tiempo que tardó en hacer el viaje? ¿Y la velocidad?

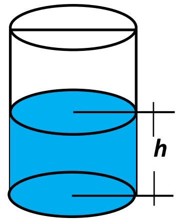
4. Queremos representar una gráfica para describir la variación de velocidad que experimenta una pelota de básquetbol en un lanzamiento de tres puntos, desde el momento en que sale de las manos del jugador hasta que llega a la canasta.





a) ¿Cuál de las dos gráficas adjuntas crees que es más correcta?
b) ¿Por qué?

Ejemplo

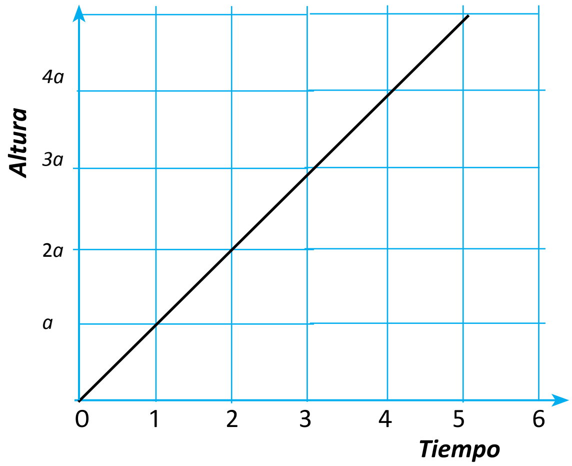


En el contexto del llenado de recipientes, una de las cuestiones que puede plantearse es: Cuando viertes agua de un grifo en un recipiente cilíndrico, que no tiene fugas, a velocidad constante, la altura del agua es una funcion del tiempo. Dibuja la gráfica de la funcion tiempo-altura del recipiente cilíndrico.

Solución

Se podría razonar de la siguiente manera: Si suponemos que *por cada unidad de tiempo*, el nivel del agua en el cilindro *aumenta una unidad a* en la altura, tenemos que

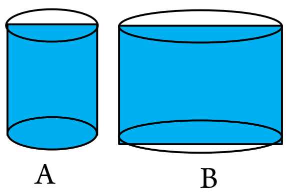
Tiempo	Altura	
0	0	$+a$
1	a	$+a$
2	$2a$	$+a$
3	$3a$	$+a$
4	$4a$	
.	.	
.	.	
t	ta	$+a$

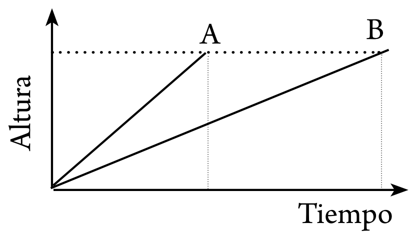


Ejemplo

Se tienen dos cilindros (cuyas secciones transversales son constantes), tales que la seccion transversal de uno de ellos es mayor a la del otro; explicar qué sucede al llenarlos simultáneamente.

Solución



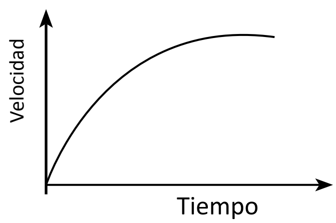


Se podría razonar de la siguiente manera: Tenemos dos recipientes con la misma altura y con sección transversal constante. Según la fórmula del volumen para un cilindro, $V = \pi r^2 h$, el volumen de llenado y (por ende la altura de llenado), se describe mediante una recta; ahora bien, conforme se van llenando los dos recipientes, y por ende aumentando la altura h, el nivel del agua tiende a subir más rápidamente por unidad de tiempo en el cilindro de menor radio, y cuanto mas grande sea el area A de la seccion transversal del cilindro, mas lentamente aumentará la altura.

Ejemplo

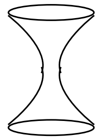
Considérense las mismas cuestiones de la pregunta anterior pero en referencia a un recipiente cónico:

Solución



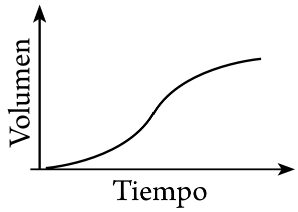
Se podría razonar de la siguiente manera: Conforme se va llenando el recipiente cónico y por ende aumentando la altura h, el agua tiende a ocupar mayor área por unidad de tiempo, y, cuanto mas grande sea el area A de la seccion transversal del cilindro, mas lentamente aumentará la altura.

Ejemplo



Supongamos que se sirve café a una razón constante en la taza que se muestra en la Figura adjunta. Haz un boceto de la gráfica del llenado de la taza con respecto al tiempo.

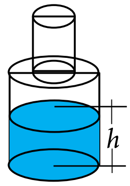
Solución

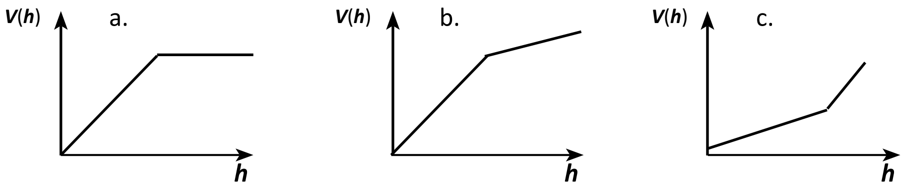


Al servir el café de manera constante, al inicio el nivel en la tasa será lento puesto que el espacio inferior es amplio porque la base es mayor; pero conforme la tasa se llena, al irse reduciendo el espacio y al mantener constante el llenado, el nivel aumenta rápidamente hasta llegar a un punto de rapidez de llenado máximo ubicado justo en el centro del recipiente que es la parte más angosta; a partir de este punto, la tasa se invierte de modo que en cada unidad de tiempo el nivel de llenado irá decrecerá a medida que la sección pasa de angosta a ancha.

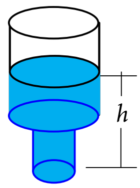
Actividad 41

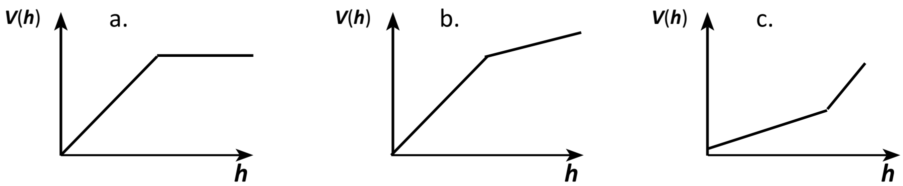
1. El siguiente recipiente se está llenando con un líquido. ¿Qué gráfica, *volumen* contra *altura*, representa mejor al fenómeno? Justifica tu respuesta.





2. El siguiente recipiente se está llenando con un líquido. ¿Qué gráfica, volumen contra altura, representa mejor al fenómeno? Justifica tu respuesta.





1.7 Operaciones con funciones

Las funciones se pueden combinar, descomponer y transformar de mucha maneras diferentes. En forma más precisa: las funciones se pueden sumar, sustraer, multiplicar y dividir. Ademas, con estos objetos matemáticos se puede realizar una operación denominada composición de funciones.

Suma, multiplicación y división de funciones

Dadas dos funciones f y g que asignan números reales y tienen el mismo dominio, podemos formar nuevas funciones, $f+g$, $f-g$, $f\bullet g$, y f/g, definidas por las siguientes reglas:

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x) \qquad (f-g)(x)=f(x)-g(x)$$
$$(f\bullet g)(x)=f(x)\bullet g(x) \qquad (f/g)(x)=(f(x))/(g(x))$$

Estas funciones todas tienen el mismo dominio que f y g, excepto para aquellas x para las cuales $g(x)=0$ puede necesitar ser removida para el domino de f/g.

Ejemplo

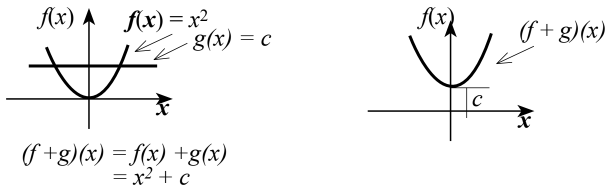
Sea $f(x) = 4x^2 - 9$ y $g)(x) = 2x - 3$. Determina: a) $(f+g)(x)$; b) $(f-g)(x)$; c) $(fg)(x)$; d) $(f/g)(x)$.

Solución

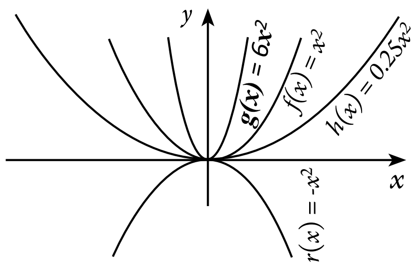
a) $(f+g)(x) = f(x) + g(x) = (4x^2 - 9) + (2x - 3) = 4x^2 - 9 + 2x - 3 = 4x^2 + 2x - 12$
b) $(f-g)(x) = f(x) - g(x) = (4x^2 - 9) - (2x - 3) = 4x^2 - 9 - 2x + 3 = 4x^2 - 2x - 6$
c) $(fg)(x) = f(x)g(x) = (4x^2 - 9)(2x - 3) = 8x^3 - 12x^2 - 18x + 12$
d) $(f/g)(x) = f(x) / g(x) = (4x^2 - 9) / (2x - 3) = 2x + 3$

Sumar y multiplicar una función por una constante es de interés especial porque sus efectos sobre la gráfica de una función son fáciles de describir. Si sumamos una función constante, $g(x) = c$, (donde c es una constante), a una función f cuyo dominio está en los números reales, entonces la gráfica de la función suma resultante, $f + g$, simplemente se desplaza verticalmente $|c|$ unidades hacia arriba si c es positivo y hacia abajo si c es negativo.

Así, por ejemplo, mientras c va tomando todos los números reales, la gráfica de $y = x^2 + c$ consiste de todos los puntos de la gráfica de $y = x^2$, pero desplazados verticalmente $|c|$ unidades.



Multiplicando una función por una función constante dilata la gráfica de la función verticalmente, y también refleja la gráfica sobre el eje X si la constante es negativa.



Composición de funciones

Sean f y g dos funciones cualesquiera tales que el rango de g se encuentra dentro del dominio de f; la composición de f y g es la función dada por $f(g(x))$, y se dentota como $f \circ g$, entonces:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

Ejemplo 1

Sea $f(x) = x^2$ y $g(x) = x + 2$, determina (a) $(f \circ g)(3)$ y (b) $(g \circ f)(3)$

Solución

(a) $(f \circ g)(3) = f(g(3))$

Primero encuentra $g(3)$:
$g(3) = 3 + 2$
$= 5$

Después encuetra $f(g(3))$
$f(g(3)) = f(5)$
$= 5^2 = 25.$

(b) $(g \circ f)(3) = g(f(3))$

Primero encuentra $f(3)$:
$f(3) = 3^2$
$= 9$

Después encuetra $g(f(3))$
$g(f(3)) = g(9)$
$= 9 + 2 = 11.$

Ejemplo 2

Sea $f(x) = 4x^2 - 9$ y $g(x) = 2x - 3$. Determina (a) $(f \circ g)(x)$ y (b) $(g \circ f)(x)$

Solución

(a) $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(2x - 3)$
$= 4(2x - 3)2 - 9$
$= 16\times 2 - 48x + 27.$

(b) $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(4\times 2 - 9)$
$= 2(4\times 2 - 9) - 3$
$= 8\times 2 - 21.$

Podemos ver la adición de una función constante a una función, y multiplicación de una función por una función constante como la composición de funciones. Con éste fin, definamos las funciones T_k y D_k de la siguiente manera:

Para un número real k, sean T_k y D_k las funciones de R en R, definidas como:

$$T_k(x) = x + k \text{ y}$$
$$D_k(x) = kx$$

Sea $f(x)$ una función cualquiera; determinemos $(T_k \circ f)(x)$ y $(D_k \circ f)(x)$

$$(T_k \circ f)(x) = T_k(f(x)) = f(x) + k$$

$$(D_k \circ f)(x) = D_k(f(x)) = kf(x)$$

Observamos que para sumar la función constante k a la función f, podemos formar la función compuesta $T_k \circ f$, y para multiplicar la función f por la función constante k, podemos formar la función $D_k \circ f$.

Ahora, hagamos la composición de estas funciones pero en el orden opuesto:

$$(f \circ T_k)(x) = f(T_k(x)) = f(x + k)$$
$$(f \circ D_k)(x) = f(D_k(x)) = f(kx)$$

Observamos que la gráfica de $f \circ T_k$ es la misma que la gráfica de f excepto que está trasladada horizontamente: se traslada a la izquierda si k es postivo, y se traslada a la derecha $|k|$ unidades si k es positivo.

Asimismo, la gráfica de $f \circ D_k$ es la misma que la gráfica de f excepto que está dilatada (o distorsiona) horizontalmente y también está reflejada a través del eje Y si k es negativa.

- Aspecto a evaluar: *Participación en clase*
- Evidencia: *Trabajo colaborativo*
- Competencia o atributo a evaluar: 8.3

Actividad 42

Sean las funciones $T_k(x) = x + k$ y $D_k(x) = kx$; $f(x) = x^2$, $h(x) = x^3$. Determina las composiciones indicadas y traza la gráfica de la función resultante aplicando las transformaciones a las que equivalen.

a. $(T_k \circ f)(x)$ b. $(f \circ T_k)(x)$ c. $(D_k \circ f)(x)$ d. $(f \circ D_k)(x)$
e. $(T_k \circ h)(x)$ f. $(h \circ T_k)(x)$ g. $(D_k \circ h)(x)$ h. $(h \circ D_k)(x)$

EXAMEN 1 (PROBLEMARIO)

- *Aspecto a evaluar:* Producto integrador de unidad
- *Evidencia:* Examen (problemario)
- *Competencia o atributo a evaluar*: 2, 4 y 5.

INSTRUCCIONES: Resuelve los siguientes problemas como preparación para evaluar lo indicado. En cada respuesta se debe incluir el razonamiento seguido para llegar a la solución.

Problema 1. Traza la gráfica de cada una de las siguientes ecuaciones. Debes mostrar un análisis completo que incluya: tabulación, interceptos, simetrías, extensión de x y asíntotas (en caso de ser necesario).

a) $x^2y - 4xy + 4y - 1 = 0.$ b) $y = \sqrt{x-3}$

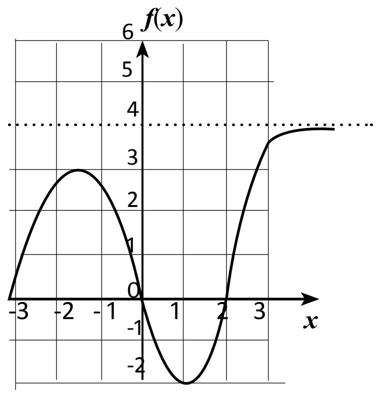
Problema 2. Un barco de carga tiene un tanque de almacenamiento para combustible para 2500 litros. Al navegar cada día consume aproximadamente 150 litros de combustible. Sea $C(t)$ la función "cantidad de combustible" y t la variable tiempo.

a) Establece la expresión algebraica que modela esta situación.
b) ¿Cuál es el dominio de la función C?
c) ¿Cuál es el rango de la función C? ¿Después de cuantos días en el mar se debe llenar el tanque de combustible?
d) Dibuja la gráfica correspondiente.

Problema 3. Se arroja una pelota directamente hacia arriba con una velocidad de 32 m/s por lo que su altura t segundos después, es $y(t) = 32t - 5t^2$.

a) ¿Cuál es el dominio de la función?
b) ¿Cuál es el rango de la función?
c) ¿Al cabo de cuánto tiempo regresará la pelota?
d) ¿A qué altura está la pelota a los 3 segundos?
e) ¿En qué tiempo está la pelota a 30 metros de altura?
e) Dibuja la gráfica correspondiente.

Problema 4. La gráfica siguiente muestra el comportamiento de una función:



a) ¿Cuál es el dominio de la función?
b) ¿Cuál es el rango de la función?
c) ¿En qué intervalos la función es creciente?
d) ¿En qué intervalos la función es decreciente?
e) ¿En qué intervalos la función es cóncava hacia abajo?
f) ¿En qué intervalos la función es cóncava hacia arriba?

Problema 5. Determina de manera analítica el dominio de las siguientes funciones y traza su gráfica:

a) $f(x) = 2x - 5x^2$ b) $y = +\sqrt{x-3}$ c) $y = +\sqrt{x-3} + 2$

d) $f(x) = \dfrac{x}{3x+6}$ e) $f(x) = \dfrac{4}{x+5} - 3$

Problema 6. Para cada una de las siguientes tablas establece la fórmula que relaciona a las variables indicadas.

a)

x	1	2	3	4	5
y	3	6	9	12	15

b)

m	0	2	4	6	8
n	0	2	4	6	8

c)

x	1	2	3	4	5
y	1	4	9	16	25

d)

x	1	2	3	4	5
y	1	8	27	64	125

e)

x	0.1	0–5	1	1.5	2
y	10	2	1	2/3	1/2

Problema 7. Algunas de las siguientes tablas corresponden a funciones lineales, cuadráticas o exponenciales. En cada caso, identifica a cual de ellas corresponde cuáles y establece su fórmula.

a)

x	1	2	3	4	5
y	3	6	12	24	48

b)

m	−2	1	4	7	10
n	6.3	7.8	9.3	10.8	12.3

c)

x	−1	3	7	11	15
y	3.4	4.6	5.8	7	8.2

d)

p	1	2	3	4	5
q	2	5	10	17	26

e)

x	1.5	2	2.5	3	3.5
y	172.3	155.07	139.56	125.61	113.05

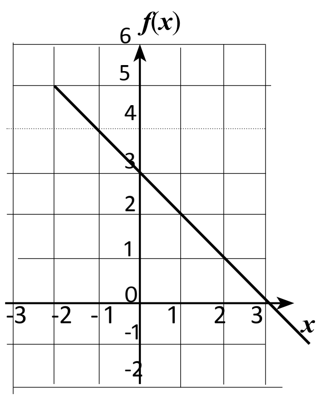
f)

m	2	4	6	8	10
n	−8	−10	−13	−17	−22

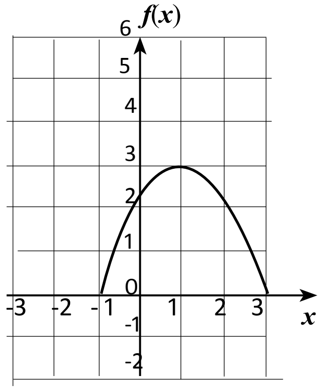
g)

x	−1	3	7	11	15
y	3.4	4.6	5.8	7	8.2

Problema 8. Obtén la ecuación para la función dada en la siguiente gráfica:



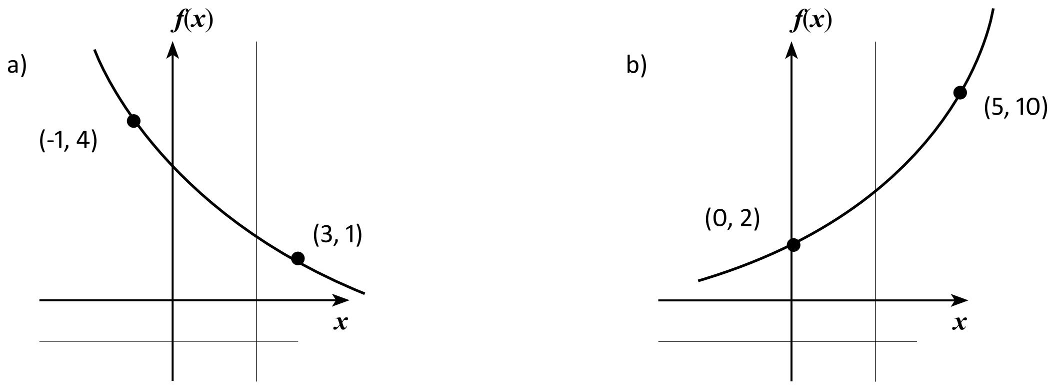
Problema 9. Obtén la ecuación para la función dada en la siguiente gráfica:



Problema 10. A parir de la construcción de una tabla, determinar el valor de la suma de los ángulos de un polígono conocido el número de lados.

Número de lados	3	4	5	6	?
Suma de los ángulos	180	360	?	?	1080

Problema 11. Asumiendo que las siguientes gráficas tienen un comportamiento exponencial, determina su ecuación:



Problema 12. El valor de una computadora es de $18,000.00. Después de 5 años su valor es de $12,600.00; suponiendo un comportamiento exponencial:

a) Determina la fórmula que relacione el valor de la computadora con el tiempo.
b) ¿Cuál será el valor de la computadora 12 después de su compra?

Problema 13. Describa cómo la cantidad de agua en una piscina (V, para el volumen) cambia con el tiempo (t) en cada caso: